

PRÁCTICA 7

AUTOVECTORES Y AUTOVALORES

Ejercicio 1.- Para cada matriz calcular todos los autovalores y para cada uno de ellos hallar el subespacio asociado.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{g) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.-

a) Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene a 1 como autovalor.

b) Para los valores de k hallados, calcular todos los autovalores de A .

Ejercicio 3.- Encontrar una base B de \mathbb{R}^3 para la cual $M_B(f)$ sea diagonal.

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.- Sean $B = \{ (1, 1, 1); (0, 1, 1); (0, 0, 1) \}$ y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t. l. definida por

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Encontrar una base } B' \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ tal que } M_{B'}(f) \text{ sea diagonal.}$$

Ejercicio 5.- Sea $B = \{(1, -1, 0); (0, 0, 1); (-3, 2, 0)\}$ y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que

$$M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 9 \\ 4 & 4 & -9 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}. \text{ Decidir si } f \text{ es diagonalizable.}$$

En caso afirmativo, encontrar una base B' tal que $M_{B'}(f)$ sea diagonal.

Ejercicio 6.- Determinar si la matriz A es diagonalizable; en caso afirmativo encontrar matrices C y D tales que D es diagonal y $A = C D C^{-1}$.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e) } A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7.- Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, calcular A^{10} .

Ejercicio 8.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbb{S} = \langle (a+3, a^2-4, 1) \rangle$.

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$.

Ejercicio 9.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 4x_2 + 4x_3, 5x_1 + 7x_2 + 10x_3, -6x_1 - 7x_2 - 10x_3).$$

Encontrar una base de B de \mathbb{R}^3 tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ k & 3 & -1 \end{pmatrix}$ tiene un autovalor igual a -2 .

Decidir si A es diagonalizable.

2. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Hallar una base B de \mathbb{R}^3 , $B = \{(-1, 1, 0), \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tal que $M_B(f)$ sea diagonal.

3. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base del espacio vectorial \mathbb{V} y $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ la t.l. definida por:

$f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$; $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$; $f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_3$. Hallar una base de autovectores de f .

4. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de \mathbb{R}^3 y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar los autovalores y autovectores de f . ¿Es f diagonalizable?

5.- Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 2x_3, -7x_1 - 3x_2 + x_3, \alpha x_1 + 4x_3)$.

Determinar α para que f no sea isomorfismo y decidir si existe una base B de \mathbb{R}^3 tal que $M_B(f)$ sea diagonal.

6. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, 3x_2 + 2x_3, -x_3)$.

Hallar una base B de \mathbb{R}^3 tal que $M_B(f^{-1})$ sea diagonal.

7. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, 0) \rangle$.

Hallar una t.l. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que sus autovalores sean 3, -2 y 0; $\text{Im } f = \mathbb{T}$ y $\text{Nu } f \subset \mathbb{S}$.

8. Sean $B = \{(0, 1, 1), (1/2, -1/2, 0), (0, 0, -1)\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que

$M_{EB}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar una base B' tal que $M_{B'}(f)$ sea diagonal.

9. Sean $B = \{(0,0,1), (1,0,0), (0,1,0)\}$; $B' = \{(0,0,-1), (-1,-1,-1), (3,2,1)\}$ y

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar los autovalores de $f \circ f$.

10. Sea $B = \{(1,0,-1), (0,2,1), (-1,3,2)\}$ y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que

$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar a y b para que $f(-1, -1, 0) = (-1, -1, 0)$.

Para los valores hallados, decidir si f es diagonalizable.

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 0 & b & -2 \\ 1 & a+2b & 2 \end{pmatrix}$.

Determinar a y b para que $(1, -1, 0)$ sea autovector de A .

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & -4 \\ -8 & 8 & k \end{pmatrix}$, hallar $k \in \mathbb{R}$ sabiendo que 1 es autovalor de A .

Para ese valor de k , determinar si A es diagonalizable.

13. Sean $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ y $B' = \{v_1; v_1 - v_3; v_2 + v_3\}$ bases de \mathbb{R}^3 y sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

tal que $M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Decidir si f es diagonalizable.

14. Sean $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B'' = \{v_2+v_3; v_2-v_1; v_2\}$ bases de \mathbb{V} . Sea $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ la t. l. tal

que $M_{B''B'}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y sea $g: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ definida por $g(v) = f(v) - 2v$.

Hallar una base B de \mathbb{V} tal que $M_B(g)$ sea diagonal.

15. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una t. l. que verifica: $f(1,1,0) = (2,-10, k)$; $f(0,-1,0) = (0, 3, 0)$ y

$f(0,1,1) = (2,-2, 4)$.

Hallar, si es posible, los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales f no es monomorfismo.

Para los valores de k encontrados, decidir si f es diagonalizable.

16. Sean $B = \{(1, -2, 2); (0, -1, 0); (0, 1, -1)\}$ y $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la t. l. tal que

$$M_{EB}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & -1 \\ 5-k & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de k para los cuales 1 es autovalor de f y f es diagonalizable.

17. Sean $B = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; -\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$ bases de un e.v. \mathbb{V} y

$$f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \text{ la transformación lineal tal que } M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hallar, si es posible, una base de autovectores de f , sabiendo que $2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ es un autovector de f .