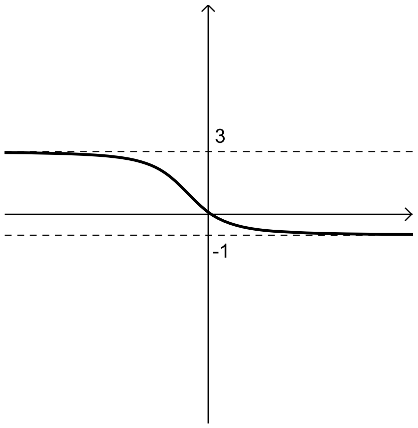
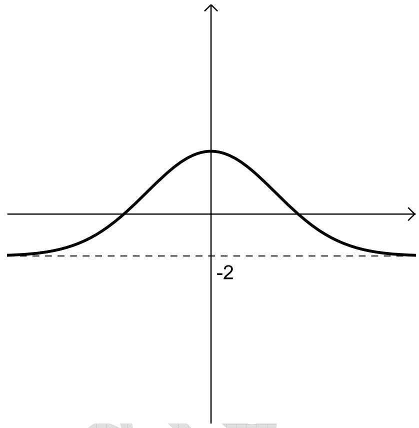
LÍMITE DE FUNCIONES Y ASÍNTOTAS

Ejercicio 1.- Analizando el gráfico de f, determinar, si existen, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

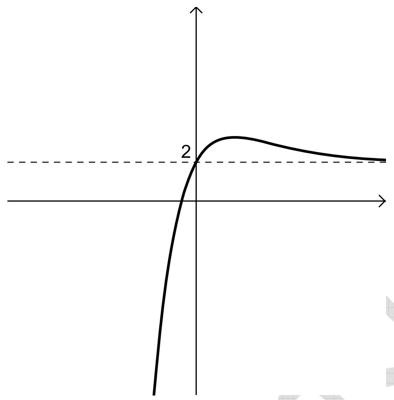
a.



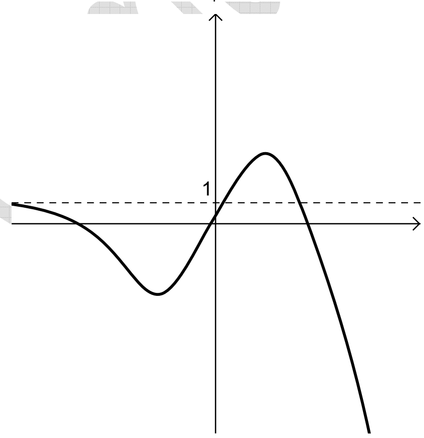
b.



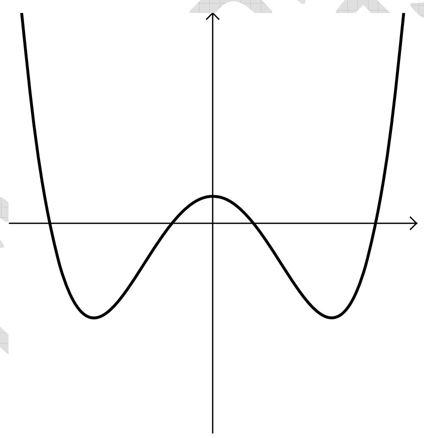
c.



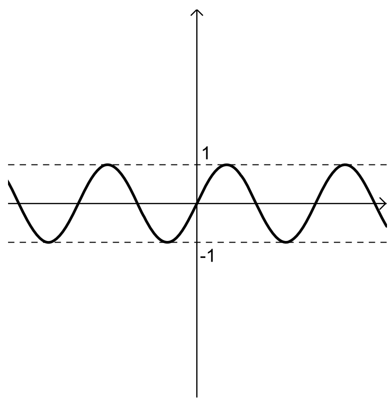
d.



e.



f.



Ejercicio 2.- Calcular.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^5$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^3}$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{3}{x}+5\right)$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(-2+\dfrac{7}{x}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(6-\dfrac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(9+\dfrac{1}{x}\right)}$

h. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-7x^4+9x^2+100\right)$

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6x^5-2x^3+x+9\right)$

j. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^5+x^3-3}{x^6+1}$

k. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x}{-2x^2+1}$

l. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3+6}{6x^3+x^2+12x}$

m. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^4+2x^3-5x}{x^3+9x^2+10x}+5\right)$

n. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8x^3-16x^2}{x+1}\right)$

o. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x+2}-1\right)\left(6+\dfrac{1}{x}\right)$

p. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9x^2-x+1}{-3x^2+7x}\right)\left(\dfrac{5}{x-4}\right)$

Ejercicio 3.- Calcular.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(9-\dfrac{2}{x^2}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^4-7x^3+20\right)$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{-6x^4+7}$

f. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x+5}$

g. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{-x^2+2}$

h. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3}$

j. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{x-3}+1\right)$

k. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{15x^3+6x^5}{2x^5-15x^3}$

l. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^7+x^5+2}{3x^4-1}$

Ejercicio 4.- Analizar la existencia de asíntotas horizontales y, cuando existan, dar sus ecuaciones.

a. $f(x)=\dfrac{2x}{x+9}-4$

b. $f(x)=\dfrac{3x+5}{-x+2}$

c. $f(x)=\dfrac{8x}{4x^2+6x+1}$

d. $f(x)=\dfrac{2x^2-5x}{x+6}$

e. $f(x)=\dfrac{6}{x+1}+1$

f. $f(x)=\dfrac{x^6+5x^5+3x^3}{2x^3+x+1}$

g. $f(x)=\dfrac{30x^2-25x+6}{5x^2+6x-3}$

h. $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{6x^4-x^3+1}$

Ejercicio 5.- Determinar el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que se verifique:

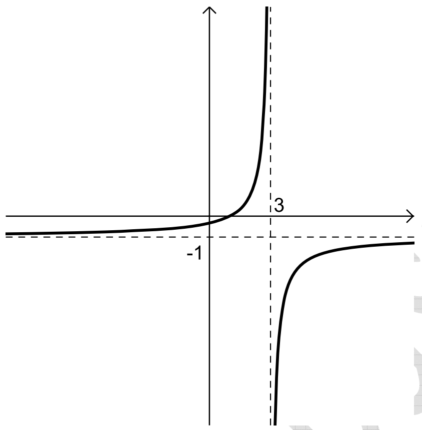
a. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-5}{ax+1}=6$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax^2-2x+5}{6x^2+1}=-\dfrac{2}{3}$

c. La recta de ecuación $y=-2$ es asíntota horizontal para $f(x)=\dfrac{ax}{3x-1}+1$

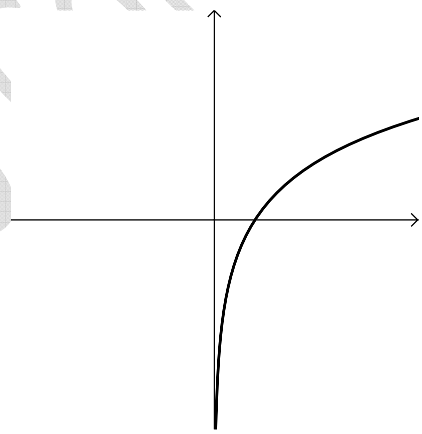
Ejercicio 6.- Dado el gráfico de f, calcular los límites que se indican. Escribir las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

a.



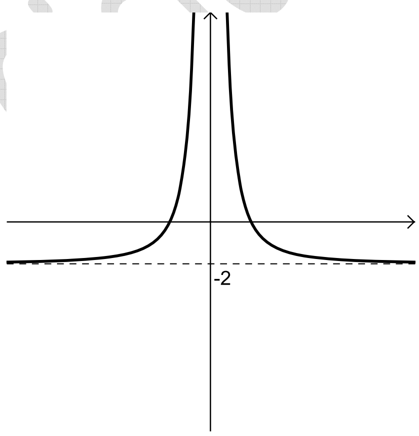
$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b.



$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

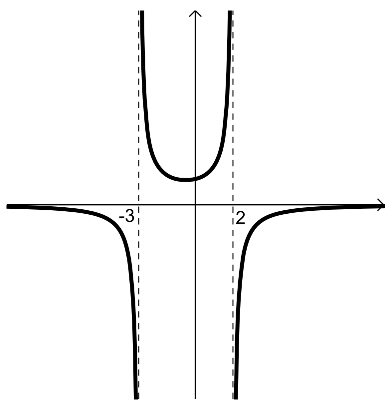
c.



$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

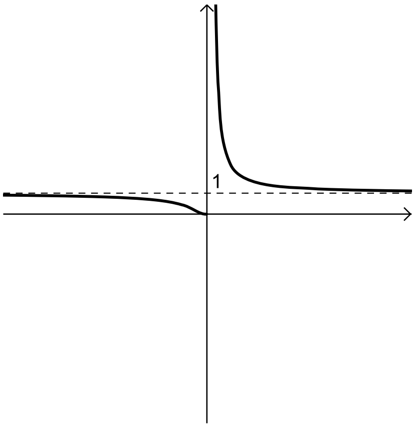
d.



$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

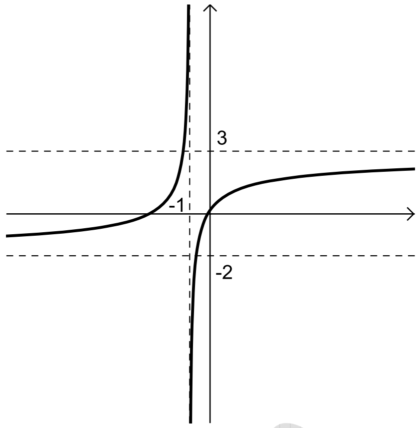
e.



$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

f.



$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Ejercicio 7.- Calcular.

a. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3}$

b. $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{-5x+1}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-5x+1}{x+2}$

c. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{3}{x^2}-1\right)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{3}{x^2}-1\right)$

d. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4x-4}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4x-4}{x^2-1}$

e. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4x}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{4x}{x^2-4}$

f. $\lim\limits_{x\to 3} \left(2x^2+x-10\right)$

g. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+9}{x-1}$

h. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-2}{x^2-3x-4}$, $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2x^2}{x^2-3x-4}$

Ejercicio 8.- Analizar la existencia de asíntotas verticales y, cuando existan, dar sus ecuaciones.

a. $f(x)=\dfrac{-x+5}{2x+1}$

b. $f(x)=\dfrac{6x}{(x-2)^3}$

c. $f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2-x-6}$

d. $f(x)=\dfrac{2x^2-18}{x^2-2x-15}$

Ejercicio 9.- Dar el dominio y las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de f.

a. $f(x)=3-\dfrac{1}{x+2}$

b. $f(x)=\dfrac{2}{x^3}+1$

c. $f(x)=\dfrac{-2x^2+x}{5x^2+25}$

d. $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2+4x+3}$

e. $f(x)=\dfrac{-6x+3}{x+3}$

f. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

g. $f(x)=\dfrac{-x^2+x+6}{x^2+x-2}$

h. $f(x)=\dfrac{6x^2-24}{x^2-4x+4}$

Ejercicio 10.-

a. Sea $f(x)=\dfrac{-20x+4}{ax+10}$. Determinar el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $x=2$ sea asíntota vertical para f. Para el valor hallado, dar la ecuación de la asíntota horizontal de f.

b. Sea $f(x)=\dfrac{ax^2-2x}{x^2+ax-5}$. Determinar $a\in\mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $x=-1$ sea asíntota vertical de f. Para el valor hallado, dar las ecuaciones de todas las asíntotas verticales y horizontales de *f*.

FUNCIONES HOMOGRÁFICAS

Ejercicio 11.- Hallar el dominio, la imagen, los ceros, los intervalos de positividad y de negatividad y las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de *f*. Hacer un gráfico de *f*.

a. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

b. $f(x)=\dfrac{-2}{x+4}$

c. $f(x)=\dfrac{3}{x+2}+1$

d. $f(x)=\dfrac{4}{3x+1}-3$

e. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

f. $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+1}$

Ejercicio 12.-

a. Sea $f(x) = \dfrac{2}{x+a} - b$. Determinar a y $b \in \mathbb{R}$ para que las rectas de ecuaciones $x = -3$ e $y = \dfrac{5}{3}$ sean asíntotas de f.

b. Sea $f(x) = \dfrac{ax+3}{bx+1}$. Determinar a y $b \in \mathbb{R}$ para que $\dfrac{3}{2}$ sea cero de f y la recta $y = 6$ sea asíntota horizontal de f.

Ejercicio 13.- Hallar la expresión de la longitud L de un lado de un rectángulo en función de la longitud x del otro lado, si el área es 36. Calcular $\lim_{x \to 0^+} L(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} L(x)$.

Ejercicio 14.- Hacia un tanque que contiene agua pura, fluye agua salada de modo que la concentración de sal en un tiempo t está dada por la función

$$c(t) = \frac{3t}{100t + 4000} \quad , \quad t > 0 .$$

Dibujar el gráfico de $c(t)$ y discutir el comportamiento de la función cuando $t \to +\infty$ e interpretar el significado.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Ejercicio 15.- Dadas las funciones f y g, calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.

a. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x^2 + 3$

b. $f(x) = -x + 1$, $g(x) = \dfrac{1}{3-x} + 2$

c. $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

d. $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{3}{x} - 2$

e. $f(x) = x + 2$, $g(x) = -x(x+1)(x-3)$

f. $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x\sqrt{x^2 + 2}$

Ejercicio 16.-

a. La relación funcional entre grados Celsius y grados Kelvin es lineal. Sabiendo que $0^0C = 273\,K$ y que $27^0C = 300\,K$, encontrar la función f que da la temperatura en grados Celsius conocida la misma en grados Kelvin.

b. La función $g(x) = 1{,}8x + 32$ expresa la temperatura en grados Fahrenheit, conocida la misma en grados Celsius; encontrar la expresión de la temperatura en grados Fahrenheit en función de la temperatura en grados Kelvin. ¿Es lineal?

Ejercicio 17.-

a. Sean $f(x) = x + k$ y $g(x) = \frac{2}{x}$. Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de manera que $(g \circ f)(1) = -4$. Para el valor de *k* encontrado, calcular $(f \circ g)(1)$.

b. Sean $f(x) = kx - 2$ y $g(x) = \frac{2x+6}{-x+4}$. Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que $(g \circ f)(1) = 5$. Para el valor de *k* hallado, calcular $(f \circ g)(1)$.

Ejercicio 18.- Sean $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = \frac{1}{x+3} - 2$. Hallar las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$. Escribir las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de dichas funciones.

FUNCIÓN INVERSA

Ejercicio 19.- Resolver la ecuación $f(x) = b$. Representar gráficamente.

a. $f(x) = 2x + 1$ $\quad b = 9$, $\quad b = -1$

b. $f(x) = x^2 - 3$ $\quad b = 13$, $\quad b = -4$

c. $f(x) = \frac{x-2}{3x+1}$ $\quad b = -\frac{1}{4}$, $\quad b = \frac{1}{3}$

Ejercicio 20.- Calcular f^{-1} y dar su dominio. Graficar f y f^{-1}.

a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2x-4$

b. $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

c. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sqrt[3]{x}$

d. $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{2x-5}{x+1}$

e. $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3x^2+2$

f. $f:\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{3}\right\}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{2}{3x-1}+5$

g. $f:[-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sqrt{x+2}$

Ejercicio 21.- La función $f(x)=1{,}8x+32$ expresa la temperatura en grados Fahrenheit, conocida la misma en grados Celsius. Dar la función que permite, dada una temperatura cualquiera en grados Fahrenheit, obtener la misma en grados Celsius. Sabiendo que el papel arde aproximadamente a $451°F$, ¿a cuántos grados Celsius tendrá que exponer esta práctica para quemarla? (¿recuerda la novela de Ray Bradbury?)

Ejercicio 22.- Dadas f y g, calcular $h=g\circ f$ y h^{-1}. Dar las ecuaciones de las asíntotas de h y de h^{-1}.

a. $f(x)=-2x+1$ $\quad g(x)=\dfrac{-x+3}{4x-1}$

b. $f(x)=4x-2$ $\quad g(x)=\dfrac{x+2}{2x-3}+1$

c. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ $\quad g(x)=x+2$

d. $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+5}$ $\quad g(x)=2x-1$

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Sea *g* la función polinómica de grado 3 tal que $g(-4) = g(0) = g(2) = 0$ y $g(1) = 10$. Si $f(x) = x + 3$ y $h = g \circ f$, hallar el conjunto de ceros y el conjunto de negatividad de *h*.

Ejercicio 2.- Sea $f(x) = \dfrac{ax-2}{3x-b}$. Hallar *a* y *b* para que las rectas de ecuación $y = 2$ y $x = 5$ sean asíntotas de *f*. Para los valores de *a* y *b* hallados, dar el conjunto de positividad de *f*.

Ejercicio 3.- Sea $f(x) = \dfrac{a}{5-2x}$. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique que $f(4) = 2$. Para el valor de *a* hallado, calcular $f^{-1}(x)$.

Ejercicio 4.- Sean $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-3}$, $g(x) = ax - 2$ con $a \in \mathbb{R}$ y $h = f \circ g$. Hallar el valor de *a* para que el dominio de *h* sea igual a $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{4}\right\}$. Para el valor de *a* encontrado calcular h^{-1}.

Ejercicio 5.- Sea $f(x) = \dfrac{x-1}{4+2x}$. Determinar el dominio y la imagen de *f*. Hallar el valor de *k* para el cual el punto $(k, 2)$ pertenece al gráfico de *f*.

Ejercicio 6.- Sea $f(x) = \dfrac{kx-5}{2-x}$. Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. Para el valor de k hallado, dar las ecuaciones de las asíntotas y representar gráficamente.

Ejercicio 7.- Sean $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $g(x) = 3x + 1$ y $h = f \circ g$. Hallar los ceros de $h^{-1}(x)$.

Ejercicio 8.- Dada $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$, dar las ecuaciones de las asíntotas. Hallar los intervalos de positividad. Representar gráficamente.

Ejercicio 9.- Sea $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+2}$. Determinar los valores de a y b de manera que $x=\dfrac{1}{3}$ sea cero de f y la recta de ecuación $y=3$ sea la asíntota horizontal de *f*. Para los valores encontrados, hallar el dominio de *f*.

Ejercicio 10.- Sea $f(x)=\dfrac{4}{x-3}+2$. Hallar la función inversa f^{-1} y dar el conjunto de positividad de f^{-1}.

Ejercicio 11.- Dadas $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$, $g(x)=x-a$ y $h=f\circ g$, determinar $a\in\mathbb{R}$ de modo que $h(4)=5$. Para el valor hallado, dar $h^{-1}(x)$.

Ejercicio 12.- Sea $f(x)=\dfrac{4x^2}{ax^2-3}$. Hallar $a\in\mathbb{R}$ de modo que la recta $y=12$ sea una asíntota horizontal de *f*. Para el valor de a encontrado, dar las ecuaciones de todas las asíntotas de f.