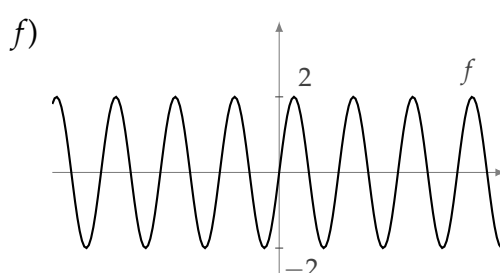
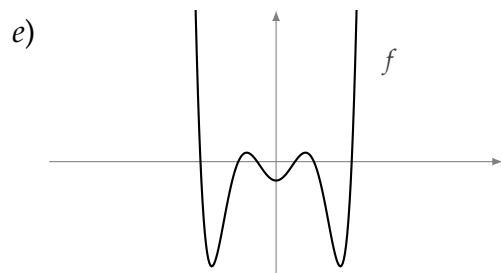
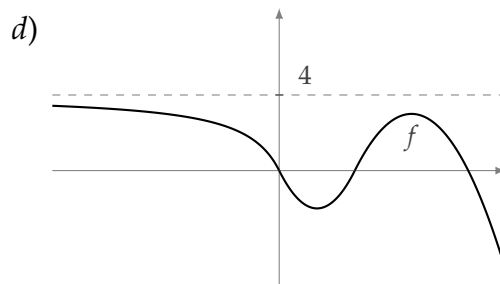
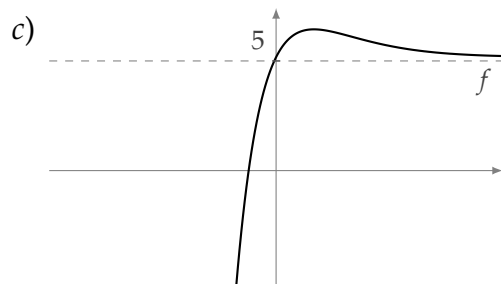
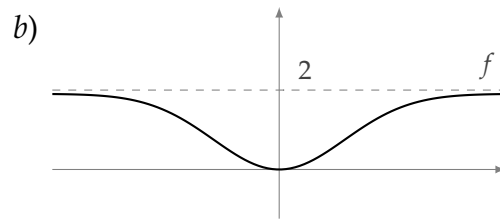
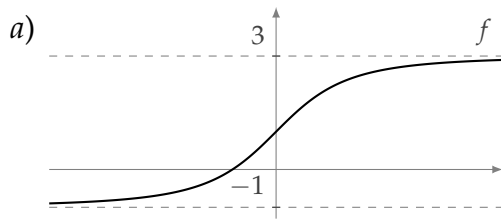


Práctica 4

Límite de funciones - Asíntotas - Continuidad

Ejercicio 1. En cada caso, a partir del gráfico de f , determinar (si existen) los valores de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:



Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^5$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x} + 5$

- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-2 + \frac{7}{x} \right)$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - \frac{5}{x^2}}{x^2 \left(9 + \frac{1}{x} \right)}$
- g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6x^5 - 2x^3 + x + 9$
- h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^5 + x^3 - 3}{x^6 + 1}$
- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x}{-2x^2 + 1}$
- j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 + 2x^3 - 5x}{x^3 + 9x^2 + 10x} + 5$
- k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x+2} - 1 \right) \left(6 + \frac{1}{x} \right)$
- l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{9x^2 - x + 1}{-3x^2 + 7x} \right) \left(\frac{5}{x-4} \right)$
- m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} - x$
- n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+x+1}$
- ñ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 3$
- o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + x + 1)$

Ejercicio 3. Calcular los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(9 - \frac{2}{x^2} \right)$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 - 7x^3 + 20$
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{-6x^4+7}$
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2+x+1}$
- g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x-3} + 1 \right)$
- h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3+x+1}$
- i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-3} + 1$
- j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1)$

Ejercicio 4. En cada caso, analizar la existencia de asíntotas horizontales al gráfico de f y, cuando existan, dar sus ecuaciones:

- a) $f(x) = \frac{3x+5}{-x+2}$
- b) $f(x) = \frac{2x}{x+9} - 4$
- c) $f(x) = \frac{8x}{4x^2+6x+1}$
- d) $f(x) = \frac{2x^2-5x}{x+6}$
- e) $f(x) = \frac{6}{x+1} + 1$
- f) $f(x) = \frac{30x^2-25x+6}{5x^2+6x-3}$
- g) $f(x) = e^{x^3+1} + 2$
- h) $f(x) = \ln(x^2+1) + 7$

Ejercicio 5. En cada caso, determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique lo pedido:

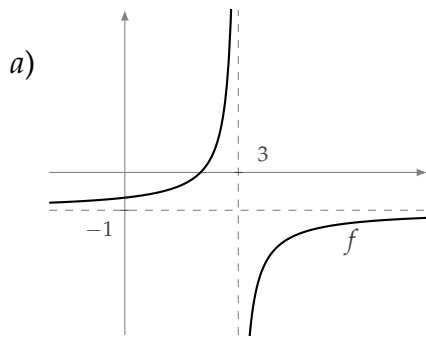
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5}{ax + 1} = 6$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 - 2x + 5}{6x^2 + 1} = -\frac{2}{3}$

c) La recta de ecuación $y = -2$ es asíntota horizontal para $f(x) = \frac{ax}{3x - 1} + 1$

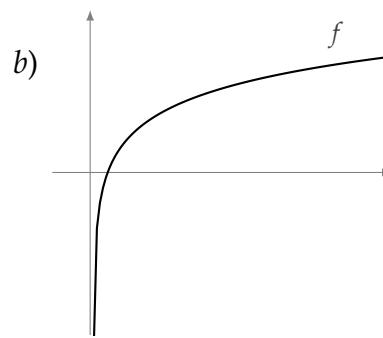
d) La recta de ecuación $y = 3$ es asíntota horizontal en $+\infty$ para $f(x) = e^{-x+3} + \frac{1}{x} + a$

Ejercicio 6. A partir del gráfico de f , en cada caso, dar el valor de los límites que se indican y escribir las ecuaciones de todas las asíntotas verticales y horizontales al gráfico:

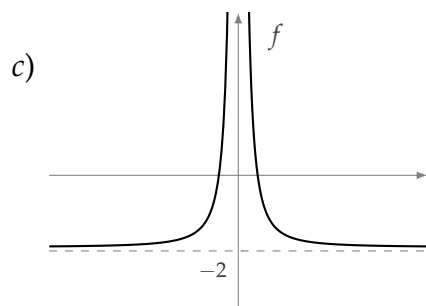


$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

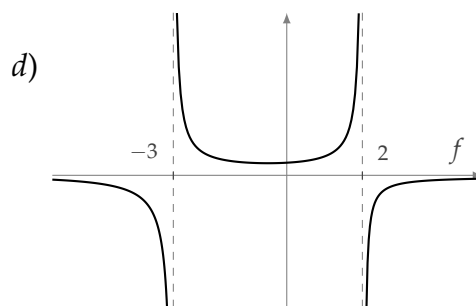


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

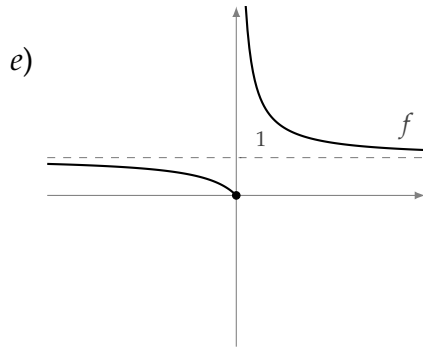
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$$

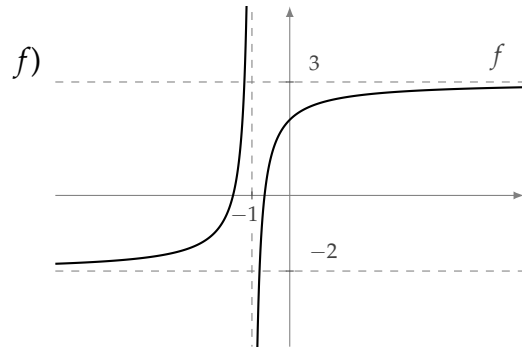
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Ejercicio 7. Calcular, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 + x - 10$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+9}{x-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3}, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-5x+1}{x+2}, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-5x+1}{x+2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^2} - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^2} - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} - 1$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x-4}{x^2-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-4}{x^2-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-4}{x^2-1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x}{x^2-4}, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4x}{x^2-4}$

h) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2-2}{x^2-3x-4}, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^2-2}{x^2-3x-4}, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x^2-2}{x^2-3x-4}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x), \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x)$

k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-3), \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \ln(3-x)$

Ejercicio 8. Calcular, en cada caso, el dominio de f , analizar la existencia de asíntotas verticales a su gráfico y, cuando existan, dar sus ecuaciones:

$$a) f(x) = \frac{-x + 5}{2x + 1}$$

$$b) f(x) = \frac{6x}{(x - 2)^3}$$

$$c) f(x) = \frac{4x - 3}{x^2 - x - 6}$$

$$d) f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 2x - 15}$$

$$e) f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$f) f(x) = \ln(2x + 3)$$

Ejercicio 9. Hallar en cada caso el dominio, la imagen, los ceros de f y las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales a su gráfico. Hacer un gráfico aproximado de f y, a partir del gráfico, determinar los conjuntos de positividad y de negatividad de f .

$$a) f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

$$b) f(x) = \frac{-2}{x + 4}$$

$$c) f(x) = \frac{3}{x + 2} + 1$$

$$d) f(x) = \frac{3x + 2}{x + 1}$$

Ejercicio 10. Hallar, para cada f , su función inversa f^{-1} y las ecuaciones de las asíntotas de ambas:

$$a) f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

$$b) f(x) = \frac{2x - 5}{x + 1}$$

Ejercicio 11. Hacia un tanque que contiene agua pura, fluye agua salada de modo que la concentración de sal en un tiempo t está dada por la función $c(t) = \frac{3t}{100t + 4000}$ para $t > 0$. Graficar $c(t)$. Calcular el límite de la función cuando $t \rightarrow +\infty$ e interpretar el significado.

Ejercicio 12. Hallar la expresión de la longitud L de un lado de un rectángulo en función de la longitud x del otro lado, si se sabe que el área es 36. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x)$.

Ejercicio 13. En cada caso, calcular el dominio de f y dar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales a su gráfico:

$$a) f(x) = \frac{2}{x^3} + 1$$

$$b) f(x) = \frac{-2x^2 + x}{5x^2 + 25}$$

c) $f(x) = \frac{x+4}{x^2+4x+3}$

d) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

e) $f(x) = \frac{-x^2+x+6}{x^2+x-2}$

f) $f(x) = \frac{6x^2-24}{x^2-4x+4}$

g) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

h) $f(x) = \ln(x^2-4)$

Ejercicio 14. Hallar en cada caso el dominio y todas las asíntotas de f :

a) $f(x) = \frac{3}{\ln(x)} + 5$

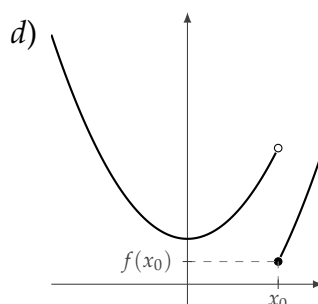
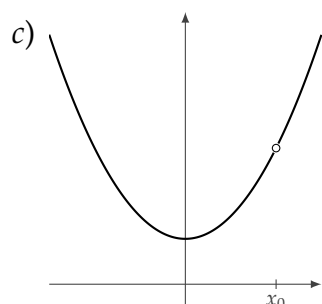
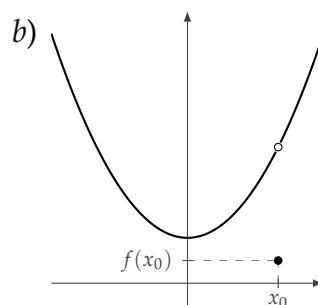
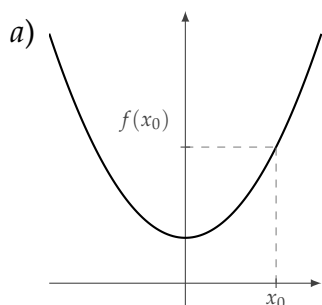
b) $f(x) = \frac{2}{1+e^x}$

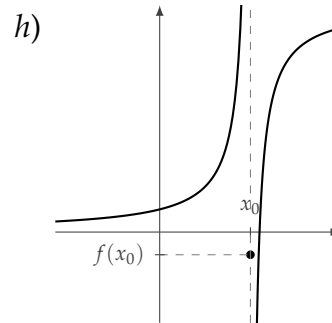
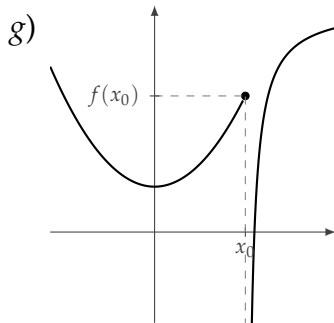
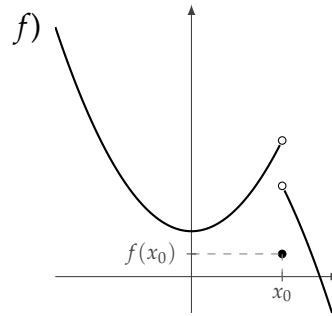
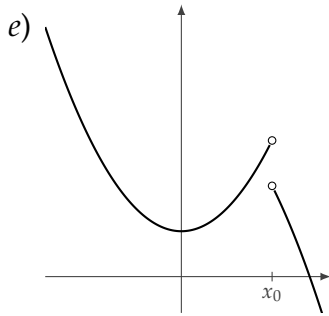
Ejercicio 15.

a) Sea $f(x) = \frac{-20x+4}{ax+10}$. Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $x = 2$ sea asíntota vertical al gráfico de f . Para el valor de a hallado, dar la ecuación de la asíntota horizontal al gráfico de f .

b) Sea $f(x) = \frac{ax^2-2x}{x^2+ax-5}$. Determinar $a \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $x = -1$ sea asíntota vertical al gráfico de f . Para el valor hallado, dar las ecuaciones de todas las asíntotas verticales y horizontales al gráfico de f .

Ejercicio 16. Analizando el gráfico de la función f , determinar en cada caso si f está definida en x_0 , si existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y, en caso afirmativo, si estos dos valores coinciden. Usar la información anterior para deducir en cada caso si f es continua en x_0 :





Ejercicio 17. En cada uno de los siguientes casos, decidir si la función f es continua en el valor de x_0 especificado:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 8$ en $x_0 = 3$

b) $f(x) = \text{sen}(x - \pi) + 3$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$

c) $f(x) = xe^{3x-6} + \ln x$ en $x_0 = 2$

d) $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x + 1}$ en $x_0 = 2$

e) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ en $x_0 = 1$

f) $f(x) = \ln(x - 5)$ en $x_0 = 5$

g) $f(x) = \frac{1}{\cos(x - \pi)}$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$

h) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

j) $f(x) = \begin{cases} \frac{(x - 3)(x^2 + 1)}{x^2 - 9} & \text{si } x \neq 3 \\ \frac{5}{3} & \text{si } x = 3 \end{cases}$ en $x_0 = 3$

Ejercicio 18. En cada uno de los siguientes casos, hallar el valor de k para que la función f sea continua en el valor de x_0 especificado:

$$a) f(x) = \begin{cases} -5 + xe^{x^2-4} & \text{si } x > -2 \\ 3x + k & \text{si } x \leq -2 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = -2$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 1$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x^3 + 2x^2 - 8x} & \text{si } x < -4 \\ \frac{k}{6 + x} & \text{si } x \geq -4 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = -4$$

Ejercicio 19. En cada uno de los siguientes casos, hallar todos los puntos de discontinuidad de la función f en el intervalo indicado:

$$a) f(x) = |x + 3| \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$b) f(x) = \frac{xe^{x^2-9} - 5}{x^3 - 4x^2 + 3x} \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\ln(x-3)} \quad \text{en } [3, +\infty)$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x^2 + x - 2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-3}{x^2-9} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R}$$

Ejercicio 20. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que corta al eje x en exactamente tres puntos y de la cual se conoce la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	-2	3	5	4	1	-1

a) Para cada uno de los ceros de f indicar un intervalo de amplitud 1 que lo contenga.

b) Determinar, si es posible, el signo de f en los intervalos dados:

i) $(0; 1)$

ii) $(2; 3)$

iii) $(5; +\infty)$

iv) $(-\infty; -2)$

v) $(0; 2)$

vi) $(-3; -1)$

c) Hacer el gráfico de una función f que satisfaga las condiciones dadas.

Ejercicio 21. En cada una de las siguientes situaciones, hallar el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de la función f si se sabe que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y que f es continua en todo punto:

a) Los únicos ceros de f son -3 y 2 y $f(-5) = -4$, $f(0) = -2$ y $f(3) = 6$.

b) Los únicos ceros de f son -2 , 0 y 3 y $f(-3) = -1$, $f(-1) = 1$, $f(2) = 5$ y $f(5) = -4$.

Ejercicio 22. En cada uno de los siguientes casos, hallar todos los ceros de la función polinómica f y determinar su conjunto de positividad y de negatividad:

a) $f(x) = (2x + 3)(3x - 9)(x - 4)$

b) $f(x) = x^2(2x - 3)^2$

c) $f(x) = 5(x + 1)(x^2 + x - 2)$

d) $f(x) = (x^3 + 3x^2 + 2x) \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)$

Ejercicio 23. Hallar, en cada caso, el dominio, el conjunto de ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de la función f :

a) $f(x) = \frac{3x + 7}{x + 3}$

b) $f(x) = |5x + 2| - 17$

c) $f(x) = \frac{|x - 3| - 5}{x - 6}$

d) $f(x) = \frac{4 - \sqrt{x}}{\ln(x - 3)}$

e) $f(x) = (x - 2)e^{\frac{1}{x}}$

f) $f(x) = \ln\left(\frac{3x + 7}{x + 3}\right)$ (Sugerencia: usar el ítem a) para calcular el dominio de f)

Ejercicio 24. En cada uno de los siguientes casos, escribir el conjunto A como intervalo o unión de intervalos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} / (3x - 6)(x + 2)(x - 5) < 0\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} / |2x - 6| \geq 8\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{3 - 6x}{x + 4} \leq 3\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{3x - 12}{x^2 - 4} \leq 3\}$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} / \ln(x^2 - 3) > 0\}$

f) $A = \{x \in [-2\pi; 2\pi] / \cos(2x + \frac{\pi}{2}) > 0\}$

Ejercicio 25. Sea $f(x) = x^3 + x - 7$. Probar que

a) f tiene un cero en el intervalo $(1; 2)$

b) f tiene un cero en el intervalo $(1,7; 1,8)$

c) f tiene un cero en el intervalo $(1,73; 1,74)$

Ejercicio 26. En cada uno de los siguientes casos, aproximar con error menor que $\frac{1}{8}$ un cero de f en el intervalo indicado:

a) $f(x) = x^5 - x - 32$ en $(2; 3)$

b) $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1000$ en $(9; 10)$