Práctica 5

Derivadas - Regla de L'Hôpital

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes casos, utilizando la definición, calcular la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P. Dar la ecuación de la recta y graficar la curva y la recta.

a) $f(x) = x^2 - 2 \qquad P = (3,7)$

b) $f(x) = x^2 - 2 \qquad P = (-2,2)$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x} \qquad P = (2,1)$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x} \qquad P = (-1,-2)$

Ejercicio 2. En cada uno de los siguientes casos hallar la derivada de la función f usando las reglas de derivación:

a) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

b) $f(x) = 3x^5$

c) $f(x) = -4\sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^2}}$

e) $f(x) = 2x^3 - 4x + 3$

f) $f(x) = 3x + \cos(x) + \pi$

g) $f(x) = 5x^2 + \ln(x)$

h) $f(x) = e^x \cos(x) - 2e$

i) $f(x) = (2x+3)e^x$

j) $f(x) = (x^4 - 3x^3)(\ln(x) + 3)$

k) $f(x) = \dfrac{3x^2 + x}{x^4 + 3}$

l) $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

m) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 1}{\cos(x)}$

n) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

Ejercicio 3. En cada uno de los siguientes casos, hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa x_0:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 \qquad x_0 = 2$

b) $f(x) = -2x^2 + 13x - 15 \qquad x_0 = 3$

c) $f(x) = e^{-x}\cos(x) \qquad x_0 = 0$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x} - \sqrt{x} \qquad x_0 = 4$

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes casos, hallar la derivada la función f:

a) $f(x) = (2x+3)^4$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x}$

c) $f(x) = \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{10}$

d) $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$

e) $f(x) = \cos^2(x)$

f) $f(x) = \ln(3x^2+1)$

g) $f(x) = \sqrt{5x+\operatorname{sen}(x)}$

h) $f(x) = \sqrt{(2x-3)^7}$

i) $f(x) = e^{x^2}+x$

j) $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(x))$

k) $f(x) = e^{x\operatorname{sen}(x)}$

l) $f(x) = \ln(e^{\frac{1}{x}}-7x)$

m) $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+1}{2x}\right)$

n) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{3x}\right)e^{-2x}$

ñ) $f(x) = \ln^2(5x^2+1)$

o) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x^3+x)$

p) $f(x) = e^{x^2}\ln\left(\dfrac{3}{x}\right)$

Ejercicio 5. En cada uno de los siguientes casos, hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa x_0:

a) $f(x) = \sqrt{2x-3}$ $\qquad x_0 = 6$

b) $f(x) = 3\operatorname{sen}(2x)$ $\qquad x_0 = 0$

c) $f(x) = \ln(x^4+2x-2)$ $\qquad x_0 = 1$

d) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{2x-1}$ $\qquad x_0 = 0$

Ejercicio 6.

a) Hallar todos los valores de x_0 para los que la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x) = \ln(9x^2-4)$ en $(x_0, f(x_0))$ es igual a 2.

b) Sea $f(x) = x^3-2x^2+2$. Hallar el punto del gráfico de f en el que la ecuación de la recta tangente es $y = -x+2$.

c) Hallar todos los puntos del gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+12x+2}{x+1}$ para los cuales la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 2x+3$. Para cada punto hallado, escribir las ecuación de la recta tangente correspondiente.

Ejercicio 7.

a) Sea $f(x) = 4 + ae^{x^2-3bx}$. Determinar los valores de a y b para que la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 0$ sea $y = -3x + 6$.

b) Sea $f(x) = \ln(x^2 - 6x + k)$. Hallar $k \in \mathbb{R}$ de modo que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 4$ sea igual a 2.

c) Sea $f(x) = \dfrac{x}{5x^2 + a}$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = -1$ sea horizontal.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos, calcular f', f'' y f''':

a) $f(x) = \cos(3x)$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x} + 2x$

c) $f(x) = xe^{2x}$

d) $f(x) = \sqrt{3x+2}$

Ejercicio 9.

a) El desplazamiento (en metros) de un objeto que se mueve en línea recta está dado, al cabo de t segundos, por la función $x(t) = 6t^2$. Hallar la velocidad instantánea en $t = 2$ segundos dada por $v(2) = x'(2)$.

b) La posición x en el instante $t \geq 0$ de un móvil que se desplaza en línea recta está dada por $x(t) = \dfrac{1}{6}t^3 - 8t$. Determinar la aceleracii¿½n $a(t) = x''(t)$ en el instante en el cual la velocidad $v(t) = x'(t)$ se anula.

Ejercicio 10. Dos móviles A y B se desplazan según las ecuaciones

$$A : s(t) = 3t^4 - 2t + t \qquad\qquad B : e(t) = t^2 + at + b$$

a) Calcular a y b para que, en el instante $t = 1$, A y B se encuentren en el mismo lugar y tengan además la misma velocidad.

b) Para los valores de a y b hallados, calcular la posición, la velocidad y la aceleración de cada móvil en el instante $t = 1$.

Ejercicio 11. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-5x-3}{x^3-2x^2-2x-3}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-x+1}{x^2-5x+4}$ *e)* $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{(x+2)^2}$ *f)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-2x-1}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ *h)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)-x+1}{e^{1-x}+x-2}$ *i)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3x+1)}{\sqrt{5x+4}-2}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{\operatorname{sen}(7x)}$ *l)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

Ejercicio 12. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3+2x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+2x}{e^x}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x}$ *e)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2-1)+x^2}{x^2+x+1}$ *f)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(x^2-1)+x^2}{x^2+x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$ *h)* $\lim\limits_{x\to +\infty} x.\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *i)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\ln(\operatorname{sen}(x))}$

Ejercicio 13. Determinar si la función $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{\ln(4x^2+1)}{3x^2}$ tiene una asíntota vertical en $x=0$.

Ejercicio 14. Hallar $a\in\mathbb{R}$ para que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-3x^2-xe^{-3x}}{ax^3}=3$.

Ejercicio 15. Dada la función $f(x)=\dfrac{5-x}{\ln(x-4)}$, hallar su dominio y las ecuaciones de todas sus asíntotas.

Ejercicio 16. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(5x^2+2x)}{4x} & \text{si } x\neq 0\\ a & \text{si } x=0\end{cases}$, hallar $a\in\mathbb{R}$ para que f sea continua en $x_0=0$.