Práctica 7

Integrales - Áreas - Introducción a las ecuaciones diferenciales

Ejercicio 1.

a) En cada caso, hallar una función g tal que

i) $g'(x) = x^3$ ii) $g'(x) = 3$ iii) $g'(x) = \cos(x)$

iv) $g'(x) = \operatorname{sen}(x)$ v) $g'(x) = e^x + 4$ vi) $g'(x) = x^5 + 2x$

b) En cada caso, hallar una primitiva F de f:

i) $f(x) = 2\ \operatorname{sen}(x)$ ii) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$

iii) $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$ iv) $f(x) = -4e^x$

Ejercicio 2. En cada caso, hallar la función g que satisface simultáneamente:

a) $g'(x) = 8x$ y $g(0) = 4$ *b)* $g'(x) = -x^3$ y $g(1) = 5$

c) $g'(x) = -2\cos(x)$ y $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$

Ejercicio 3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x^{123}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int (2 + \sqrt{x})\,dx$ *c)* $\displaystyle\int (6x^2 + \operatorname{sen}(x))\,dx$

d) $\displaystyle\int x^2(1 + \sqrt{x})\,dx$ *e)* $\displaystyle\int (e^x + \frac{1}{x^4})\,dx$ *f)* $\displaystyle\int (3\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x))\,dx$

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales aplicando el método de sustitución:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{1}{5x-2}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(4x)\,dx$ *e)* $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+1)^2}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ *h)* $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^5(x)}\,dx$ *i)* $\displaystyle\int e^{-6x}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,dx$ *k)* $\displaystyle\int x^2\cos(x^3)\,dx$ *l)* $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{\ln(-2x+3)}{-4x+6}\,dx$ *n)* $\displaystyle\int \frac{4x^3+6x^2}{3x^4+6x^3-9}\,dx$ *ñ)* $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\,dx$

o) $\displaystyle\int x(3x+1)^5\,dx$ *p)* $\displaystyle\int xe^{x^2+5}\,dx$ *q)* $\displaystyle\int e^{\cos(x)}\operatorname{sen}(x)\,dx$

Ejercicio 5. Calcular las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes:

a) $\displaystyle\int x\cos(x)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int xe^x\,dx$ *c)* $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\,dx$

d) $\displaystyle\int x^9\ln(x)\,dx$ *e)* $\displaystyle\int x^3\ln\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,dx$

g) $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(x)\,dx$ *h)* $\displaystyle\int (x^2+x)(x-2)^{-3}\,dx$ *i)* $\displaystyle\int e^x\operatorname{sen}(x)\,dx$

Ejercicio 6. Calcular las siguientes integrales aplicando el método de fracciones simples:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-2)}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-9}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-5x+6}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2+3x-4}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+x-2}\,dx$

Ejercicio 7. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x^{\frac{3}{2}}(x-3)^2\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln(x))}{x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \left(x^3+5x^2+(5x-1)^5\right)\,dx$ *d)* $\displaystyle\int \ln(\operatorname{sen}(x))\,\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{\cos(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}+1\right)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \left(x^2\cos(6x-2)+e^{2x}\right)\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}\,dx$ *h)* $\displaystyle\int \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}+e^x-6}\,dx$

Ejercicio 8. En cada caso, hallar la función g que cumple simultáneamente:

a) $g'(x) = \dfrac{4x^3-6x+2}{x^4-3x^2+2x+1}$ y $g(1)=5$ *b)* $g'(x) = x\sqrt{3x^2+9}$ y $g(3)=20$

c) $g'(x) = xe^x$ y $g(0) = 4$

d) $g'(x) = \ln(\sqrt{x+2})$ y $g(-1) = 3$

Ejercicio 9. La aceleración de un móvil que se desplaza en línea recta está dada en el instante t para $0 \leq t \leq 6$ por la función $a(t) = t(t-6)\,\frac{\text{km}}{\text{h}^2}$. Si el móvil parte en el instante $t = 0$ a una velocidad de $40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿cuál es la velocidad $v(t)$ para $0 \leq t \leq 6$? (Recordar que la aceleración $a(t)$ es la derivada de la velocidad $v(t)$, es decir $a(t) = v'(t)$.)

Ejercicio 10. Un cohete está en reposo en el instante $t = 0$ y comienza a desplazarse en línea recta. Mediante mediciones en el interior del cohete se comprueba que experimenta una aceleración $a(t) = \sqrt{t} + 2$, para todo $t \geq 0$, donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración en $\frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$ ¿Qué velocidad tiene el cohete en el instante $t = 36$? ¿A qué distancia del punto de partida está en ese instante? (Recordar que la aceleración $a(t)$ es la derivada de la velocidad $v(t)$ y que la velocidad $v(t)$ es la derivada de la función posición $x(t)$, es decir $a(t) = v'(t)$ y $v(t) = x'(t)$.)

Ejercicio 11. Usando la regla de Barrow, calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 4x\,dx$

b) $\displaystyle\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(t)\,dt$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(u)\,du$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x+1}\,dx$

Ejercicio 12. Usando la regla de Barrow, calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^x(x+1)^2\,dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{e-1} \frac{dt}{t+1}$

c) $\displaystyle\int_{0}^{3} (x^2+2)\sqrt{x+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\operatorname{sen}^2(u)}\,du$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} (e^{2x} - e^{-2x})\,dx$

f) $\displaystyle\int_{1}^{4} \left(\frac{\ln^2(x)}{x} + x\right)dx$

g) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} (t-\pi)\cos(t)\,dt$

Ejercicio 13.

a) Sabiendo que $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 5$, calcular $\displaystyle\int_{1}^{3} (f(x)+2x)\,dx$.

b) Sabiendo que $\displaystyle\int_{-2}^{1} (f(t)-3)\,dt = -2$, calcular $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(t)\,dt$.

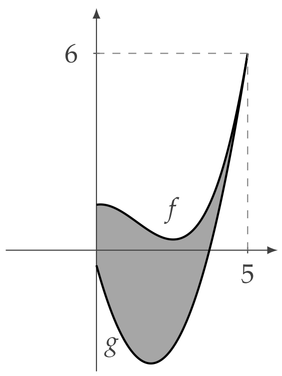
Ejercicio 14.

a) Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_1^a \frac{4}{x^2}\,dx = \frac{16}{5}$.

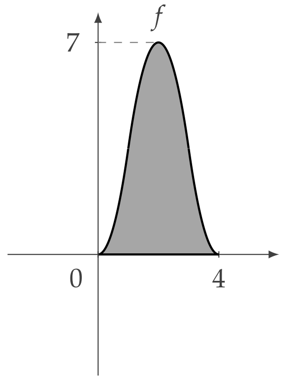
b) Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^4 (3\sqrt{x} + ax)\,dx = 0$.

Ejercicio 15. Expresar, usando integrales definidas, el área de cada una de las regiones sombreadas:

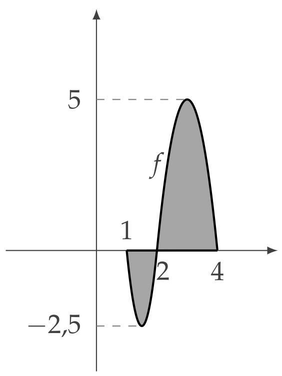
a)



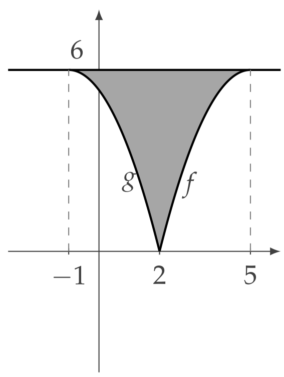
b)



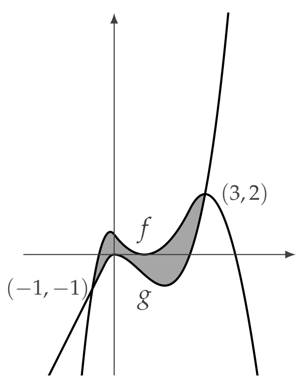
c)



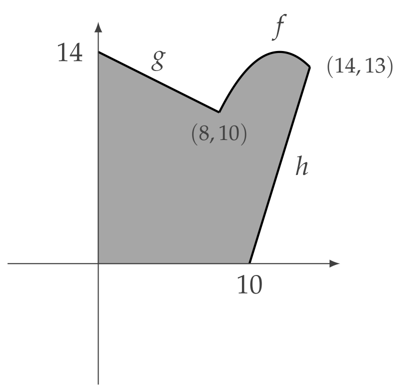
d)



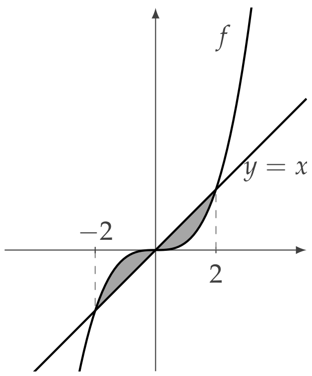
e)



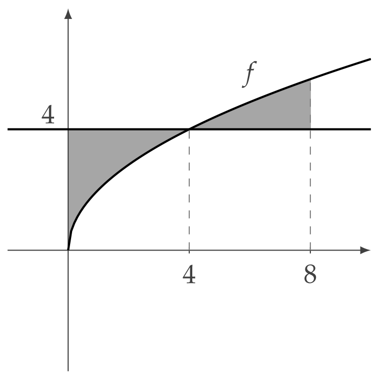
f)



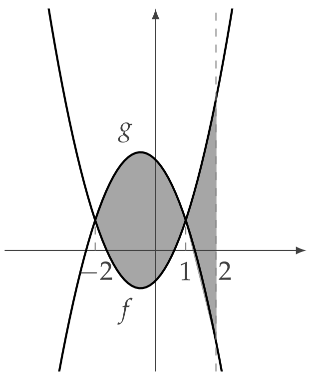
g)



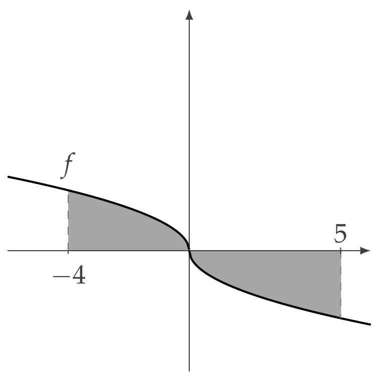
h)



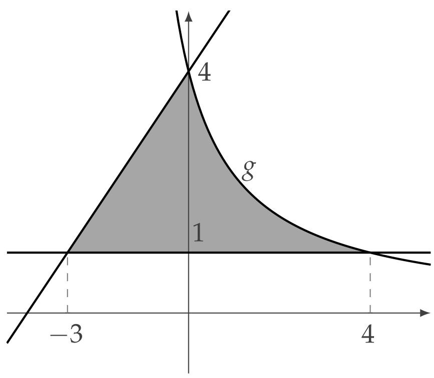
i)



j)



Ejercicio 16. Sabiendo que el área de la región sombreada vale $8{,}5$, calcular $\displaystyle\int_0^4 g(x)\,dx$.



Ejercicio 17. Calcular el área de la región encerrada entre:

a) el gráfico de $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y el eje x.

b) el gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$ y el eje x.

c) los gráficos de $f(x) = -x + 4$ y $g(x) = x^2 + 2x$.

d) los gráficos de $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = 4x - 1$.

e) los gráficos de $f(x) = 2x^2 + 6x - 5$ y $g(x) = x^2 - 3x + 5$.

Ejercicio 18. Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de

a) $f(x) = -x + 2$ y $g(x) = x(x-2)$ para $0 \leq x \leq 3$

b) $f(x) = -x + 2$ y $g(x) = x(x-2)$ para $-2 \leq x \leq 4$

c) $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{2x}$ para $-1 \leq x \leq 1$

d) $f(x) = -x^2 - x + 2$ y el eje x para $-3 \leq x \leq 3$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$ para $1 \leq x \leq 10$

f) $f(x) = x^2 + 4x + 2$ y $g(x) = -2x^2 + 7x + 8$ para $-2 \leq x \leq 6$

Ejercicio 19. Calcular el área de la región limitada por

a) los gráficos de $f(x) = \sqrt{x-5}$, $g(x) = \sqrt{5-x}$ y la recta $y = 2$.

b) los gráficos de $f(x) = \sqrt{10-x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ y el eje x.

c) los gráficos de $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -x + 6$ y el eje x.

d) el eje y, la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = -x + 6$.

e) las curvas $y = \dfrac{16}{x^2}$, $x = 4$, $y = 2x$.

f) las curvas $y = \dfrac{16}{x^2}$, $y = 2x$, $y = 16$.

g) las curvas $y = \sqrt{x-2}$, $y = 2x - 10$ y el eje x.

Ejercicio 20. Hallar $y = f(x)$ que satisfaga simultáneamente $y'y = 2x^3 + 6x$ e $y(1) = 3$.

Ejercicio 21. Hallar $y = f(x)$ que satisfaga simultáneamente $y' + 2xy = 0$ e $y(0) = 3$.

Ejercicio 22. Hallar todas las funciones $y(x)$ que satisfacen $y' + 2y = 0$. Estudiar el comportamiento de las soluciones para $x \to +\infty$.

Ejercicio 23. Encontrar todas las soluciones $y = f(x)$ de la ecuación $\dfrac{y'}{y} = xe^x$.

Ejercicio 24. Los átomos de elementos radiactivos son inestables. En un intervalo de tiempo dado, una fracción fija de los átomos se escinde espontáneamente para formar un nuevo elemento de modo que, si $N(t)$ denota el número de átomos existentes en el tiempo t (medido en años), entonces $N'(t)$, la velocidad a la que cambia este nḿero de átomos, es proporcional a $N(t)$. Es decir

$$N'(t) = -dN(t)$$

donde $d > 0$ es una constante que se conoce como la constante de decaimiento de la sustancia. Se sabe que la constante de decaimiento del carbono 14 es $d = 0,0001216$. Si en el instante $t = 0$ hay 10^6 átomos de carbono 14:

a) Calcular el número de átomos $N(t)$ para $t > 0$.

b) ¿En qué momento habrá la mitad de átomos de carbono 14 de los que había inicialmente? (semivida)

c) Elegir otro número inicial de átomos cualquiera y repetir el cálculo de la semivida. Comprobar que la semivida no depende de este número inicial.

Ejercicio 25. La temperatura de un cuerpo que se enfría cambia a una tasa que es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente. Así, si $C(t)$ es la temperatura del cuerpo en tiempo t (medido en horas) y a es la temperatura ambiente (a la que supondremos constante), se tiene que

$$C'(t) = -\lambda(C(t) - a),$$

donde $\lambda > 0$ es una constante llamada la conductividad térmica del cuerpo.
En un ambiente que está a 22° C, se coloca un cuerpo a 30° C. Se sabe que la conductividad térmica para dicho cuerpo es de $\lambda = 0{,}5$.

a) Hallar la temperatura del cuerpo $C(t)$ para $t > 0$.

b) Calcular $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$ e intentar explicar el significado físico del límite encontrado.

c) ¿En qué momento la temperatura del cuerpo es de 25° C? ¿Y de $22{,}1^\circ$ C?