Práctica 9

Matrices - Determinantes

Ejercicio 1. En cada caso, escribir explícitamente la matriz $A = (a_{ij})$ definida por

a) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $a_{11} = a_{22} = 1$ y $a_{12} = a_{21} = 0$ (matriz identidad I_2).

b) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $a_{ii} = 1$ si $1 \leq i \leq 3$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (matriz identidad I_3).

c) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $a_{ij} = 0$ si $i > j$, $a_{ii} = 2$ si $1 \leq i \leq 3$ y $a_{ij} = j$ si $i < j$.

d) $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que $a_{i1} = i$ si $1 \leq i \leq 3$ y $a_{i2} = 2i$ si $1 \leq i \leq 3$.

e) $A \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tal que $a_{i1} = -i$ si $1 \leq i \leq 3$.

Ejercicio 2. Dados los conjuntos $S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (conjunto de matrices triangulares superiores) y $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (conjunto de matrices diagonales):

a) Escribir, para cada uno, 2 matrices que pertenezcan al conjunto.

b) Decidir si cada una de las siguientes matrices pertenece a ellos o no:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Usando las matrices A, B, C y D del ejercicio anterior:

a) Calcular $A + B$, $A + B + C$, $\frac{1}{2}A$, $2C + B$, $-3(A + 2B)$, A^t y $C^t + C$.

b) Encontrar una matriz $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $X + A = C$.

Ejercicio 4. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ x & y & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} z & 2 & 0 \\ w & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ w+1 & 5 & 10 \end{pmatrix}$, hallar en cada caso, si es posible, los valores de x, y, z y $w \in \mathbb{R}$ tales que *a*) $A + 2B = C$ *b*) $2A + B = C$

Ejercicio 5. Calcular los siguientes productos de matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0{,}5 & 8 \end{pmatrix}$$

calcular, si es posible, $B.A$, $A.B$, $B.C$, $C.B$, $A.D + B$, $D.A + B$ y C^2.

Ejercicio 7. De las matrices A y B se conocen sólo algunos coeficientes, de forma tal que

$$A = \begin{pmatrix} * & -1 & 3 \\ * & -2 & * \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} * & -1 & * \\ 1 & * & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si $C = (c_{ij}) = (2A - B).A$ calcular, si es posible, c_{32}.

Ejercicio 8.

a) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$, hallar a y b en $\mathbb{R}$ tales que $A.B^t = C$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$, determinar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $A^2 = 17.I_2$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2x \\ x & 3 \end{pmatrix}$, hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $A.B = B.A$.

Ejercicio 9.

a) Escribir el sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$ en la forma matricial $A.x = b$.

b) Elegir dos soluciones particulares v_1 y v_2 del sistema anterior y calcular $A.(v_1 + v_2)$ y $A.(v_1 - v_2)$. ¿El resultado depende de las soluciones v_1 y v_2 elegidas?

Ejercicio 10. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix}$, determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema $A.x = b$ es compatible.

Ejercicio 11. Las familias Pérez, Hirsch, Ferraro y Smith colaboran con la cooperadora de un hospital. Hace dos años donaron respectivamente \$25000, \$10000, \$3000 y \$8000; el año pasado, la donación fue de \$10000, \$3000, \$1000 y \$700 respectivamente y, este año, cada una donó un 20 % más que el año pasado.

a) Presentar estos datos en una matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$.

b) Dar una matriz B tal que, si se multiplican **convenientemente** A y B, se obtenga el total donado por cada una de las cuatro familias.

c) Dar una matriz C tal que, si se multiplican **convenientemente** A y C, se obtenga el total donado en cada uno de los tres últimos años.

d) Multiplicar **convenientemente** la matriz A por dos matrices de modo que el producto de las tres matrices sea el total de las donaciones recibidas por el hospital durante los 3 años, de las 4 familias.

Ejercicio 12. En las primeras 15 fechas del campeonato de fútbol, los equipos A, B, C y D tuvieron las siguientes actuaciones: el equipo A ganó 4 partidos, empató 8 y perdió 3; el equipo B ganó 3, empató 4 y perdió 8; el equipo C ganó 4, empató 4 y perdió 7 y el equipo D ganó 7 y perdió 8. Los equipos obtienen 3 puntos por cada partido ganado, 1 punto por cada partido empatado y 0 punto por cada partido perdido.
Escribir la información de las 15 fechas en forma de matriz y utilizar el producto de matrices para obtener el puntaje obtenido por cada uno de los equipos.

Ejercicio 13. Para las próximas elecciones hay 3 candidatos: X, Y y Z.
En una encuesta se recogieron las siguientes opiniones: entre las mujeres menores de 50 años, el 30 % votará al candidato X, el 25 % a Y y el resto a Z; entre las mayores de 50 años, el 50 % votará al candidato X, el 30 % a Z y el resto a Y; entre los varones menores de 50 años, el 25 % votará al candidato X, el 50 % a Y y el resto a Z; entre los mayores de 50 años, el 30 % votará al candidato X, el 40 % a Y y el resto a Z.
Se espera que concurran a votar 18000 mujeres, 7000 de ellas menores de 50 años y 16000 varones, 9000 de ellos menores de 50 años.
Mostrar la información de la intención de voto según la encuesta en una matriz conveniente y utilizar el producto de matrices para estimar la cantidad de votos que obtendría cada candidato de conservarse las tendencias de la encuesta.

Ejercicio 14.

a) Dadas las ciudades A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5, la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

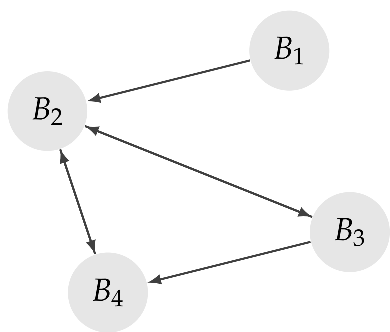
tiene un 1 en el coeficiente m_{ij} si hay un vuelo directo de A_i a A_j y un 0 si no.

i) Dibujar en un diagrama las cinco ciudades uniendo con una flecha las que están conectadas por vuelos directos.

ii) Calcular M^2. Comprobar que los coeficientes de M^2 cuentan los vuelos con exactamente una escala que hay entre esas cinco ciudades.

iii) Calcular $M + M^2$. ¿Qué representa cada coeficiente de esta matriz?

b) i) Construir la matriz M correspondiente a los vuelos sin escala para la situación siguiente:



ii) Determinar, analizando el diagrama, cuántos vuelos con exactamente una escala hay entre cada par de ciudades. A partir de este anĺisis, calcular M^2.

iii) Calcular M^3. ¿Qué representa cada coeficiente de M^3?

Ejercicio 15. Determinar si cada una de las siguientes matrices es inversible y, en caso afirmativo, calcular la inversa:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ *b*) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$ *c*) $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *e*) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ *f*) $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 16. Para las matrices C y D del ejercicio anterior, usar lo calculado para resolver los siguientes sistemas:

a) $C.x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *b*) $D.x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 17. Determinar en cada caso las condiciones sobre a, b y c que hacen que la matriz dada sea inversible:

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Ejercicio 18. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices para decidir si son inversibles o no:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 6 & \frac{2}{5} \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *e*) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *f*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 19. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}$, determinar $k \in \mathbb{R}$ para que $\det(A) = 2$.

Ejercicio 20. Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz dada

a) no es inversible:

i) $\begin{pmatrix} 4 & 1-x \\ x & -3 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & x-1 & -1 \end{pmatrix}$

b) es inversible:

i) $\begin{pmatrix} 4 & x \\ x & 4 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & 1 & x-1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 21. Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

calcular $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(A.B)$, $\det(2A)$ y $\det(A+B)$.
Verificar que $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ y que $\det(2.A) = 2^3.\det(A)$.
Notar que $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Ejercicio 22. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales

a) $\det(A+B) = 3$;

b) $\det(A+A^t) = -29$.

Ejercicio 23.

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & k+1 \\ k-2 & -1 \end{pmatrix}$ hallar los $k \in \mathbb{R}$ para los que $\det(A.B) = 0$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$ hallar los $k \in \mathbb{R}$ para los que $A.B$ no es inversible.

Ejercicio 24. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 5 \end{pmatrix}$, hallar **los dos valores** de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\det(A.B) = \det(A)$.

Ejercicio 25. Determinar en cada caso todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene solución única:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + kx_2 + kx_3 = -2 \\ 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 - kx_3 = -2 \\ 3x_1 + kx_2 = k \end{cases}$

Ejercicio 26. Dado el sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 + kx_3 = k+3 \end{cases}$ determinar si existe $k \in \mathbb{R}$ para que tenga infinitas soluciones.

Ejercicio 27. Determinar, en cada caso, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema no tiene solución, tiene solución única o tiene infinitas soluciones:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + (k^2-3)x_2 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 1-k \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + k^2x_3 = k-1 \end{cases}$