Práctica 1

Conjuntos

Definiciones y propiedades

Conjuntos, pertenencia e inclusión

Un *conjunto* es una colección de objetos. A los objetos que forman un conjunto, se los llama *elementos* del conjunto. En un conjunto, no importa el orden de los elementos, ni se tienen en cuenta repeticiones de elementos.

Algunos conjuntos que se utilizan frecuentemente en matemática son los siguientes:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, el conjunto de los números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, el conjunto de los números enteros;
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$, el conjunto de los números racionales (fracciones);
- $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales.

Se define el *conjunto vacío* como el conjunto que no tiene ningún elemento, y se lo representa con el símbolo $\emptyset$.
Si A es un conjunto y a es un elemento de A, se dice que a *pertenece* a A, y se escribe $a \in A$.
Si un objeto b no pertenece a un conjunto A, escribimos $b \notin A$.

Dos conjuntos A y B son *iguales* si tienen exactamente los mismos elementos. En este caso, se escribe $A = B$.

Dos formas de describir un conjunto son por *extensión* y por *comprensión*. Por ejemplo, el conjunto A que contiene a todos los números naturales del 1 al 4 se puede definir como sigue:

- (por *extensión*) enumerando todos sus elementos, escritos entre llaves: $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
- (por *comprensión*) a través de una propiedad que verifican los elementos del conjunto y ningún otro: $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$.

Para definir un conjunto por comprensión, usualmente se necesita dar un conjunto *referencial*, también llamado conjunto *universal* y que se nota $\mathcal{U}$, de donde se eligen los elementos. En el ejemplo anterior, el conjunto referencial es $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.

Se dice que un conjunto B *está incluido* en un conjunto A, o que B es un *subconjunto* de A, si cada elemento de B es un elemento de A. En este caso, se nota $B \subseteq A$. Si B no es un subconjunto de A, escribimos $B \not\subseteq A$.
Observamos que:

- $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$ para todo conjunto A;
- si A, B y C son conjuntos tales $C \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $C \subseteq A$;
- $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Unión, intersección y complemento

Sean A y B dos conjuntos.

- La *unión* de A y B, que se nota $A \cup B$, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B (o sea, los elementos que pertenecen a alguno de los dos conjuntos, incluyendo los que pertenecen a ambos); es decir, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$.
- La *intersección* de A y B, que se nota $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B; es decir, $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$.
- La *diferencia* de conjuntos "A menos B", que se nota $A \setminus B$, es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B; es decir, $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$.

  Observamos que, en general, las diferencias $A \setminus B$ y $B \setminus A$ no son iguales.

Si A es un conjunto incluido en un conjunto universal $\mathcal{U}$, el *complemento* de A (en $\mathcal{U}$), que notaremos A^c, es el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{U}$ que no pertenecen a A; es decir, $A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $2 \in \{1,2,3,6,7\}$

b) $3 \notin \{1,2,3,6,7\}$

c) $\{2,6\} \subseteq \{1,2,3,6,7\}$

d) $\{2,6,8\} \subseteq \{1,2,3,6,7\}$

e) $\{2,4\} \not\subseteq \{1,2,3,6,7\}$

Ejercicio 2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $2 \in \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 8\}$

b) $\{3, \pi\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 8\}$

c) $\{2, 3\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 = 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

Ejercicio 3. Describir por extensión los siguientes conjuntos.

a) $\{1,2,3,6,7\} \cup \{2,4,6\}$ *b)* $\{1,2,3,6,7\} \cup \{1,2,3\}$ *c)* $\{1,2,3,6,7\} \cup \{9,10,11\}$

d) $\{1,2,3,6,7\} \cap \{2,4,6\}$ *e)* $\{1,2,3,6,7\} \cap \{1,2,3\}$ *f)* $\{1,2,3,6,7\} \cap \{9,10,11\}$

g) $(\{1,2,3,6,7\} \cap \{2,4,6\}) \cup \{1,2,5\}$ *h)* $\{1,2,3,6,7\} \cap (\{2,4,6\} \cup \{1,2,5\})$

i) $(\{1,2,3,6,7\} \cup \{1,2,5\}) \cap (\{2,4,6\} \cup \{1,2,5\})$

j) $(\{1,2,3,6,7\} \cap \{2,4,6\}) \cup (\{1,2,3,6,7\} \cap \{1,2,5\})$

Ejercicio 4. Describir por extensión los siguientes conjuntos.

a) $\{a,b,c,d\} \setminus \{a,b,e\}$ *b)* $\{a,b,e\} \setminus \{a,b,c,d\}$

c) $(\{a,b,c,d\} \setminus \{a,b,e\}) \cup \{a,b,e\}$ *d)* $(\{a,b,e\} \setminus \{a,b,c,d\}) \cup \{a,b,c,d\}$

e) $\{a,b\} \setminus \{a,b,c,d\}$ *f)* $\{a,b,c,d\} \setminus \{a,b\}$ *g)* $\{a,b,c\} \setminus \{d,e\}$

h) $\{a,b,c,d\}^c$, siendo $\mathcal{U} = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ el conjunto universal

i) $\{a,b,c,d\}^c$, siendo $\mathcal{U} = \{a,b,c,d,e\}$ el conjunto universal

Ejercicio 5. Graficar en la recta los siguientes conjuntos.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 = 9\}$ *b)* $B = \{x \in \mathbb{R}: x > 4 \text{ y } x \leq 7\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 4 \text{ o } x \geq 7\}$ *d)* $D = \{x \in \mathbb{R}: 2 < x \leq 5\}$

e) $A \cap D$ *f)* $B \cap C$ *g)* $B \cup D$ *h)* $B \cap D$

i) $D \setminus A$ *j)* $B \setminus D$ *k)* B^c, siendo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$

Ejercicio 6. Graficar en el plano los siguientes conjuntos.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 8, 1 \leq y \leq 4\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \leq 8, 1 \leq y < 4\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 < x \leq 5, 2 \leq y < 3\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \leq x \leq 9, 2 \leq y < 3\}$

e) $A \setminus B$ *f*) $A \setminus C$ *g*) $A \setminus D$ *h*) $C \setminus D$

i) $A \cap C$ *j*) $A \cup C$ *k*) $A \cap D$ *l*) $A \cup D$

Ejercicio 7. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, siendo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ el conjunto universal.

a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ y } x < 2\}^c = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ o } x > 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ y } x < 3\}^c = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ o } x \geq 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \text{ o } x \geq 3\}^c = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \text{ o } x < 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : x < 2 \text{ o } x > 3\}^c = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \text{ y } x \leq 3\}$