

Práctica 2

Números Complejos

Definiciones y propiedades

El conjunto \mathbb{C} de los números complejos se define como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi / a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

La representación $z = a + bi$ de un número complejo se llama la *forma binómica* de z , a se llama la *parte real* de z y escribimos $\text{Re}(z) = a$, y b se llama la *parte imaginaria* de z y escribimos $\text{Im}(z) = b$.

Dados $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z = w \iff \text{Re}(z) = \text{Re}(w) \text{ e } \text{Im}(z) = \text{Im}(w).$$

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, definimos la suma y el producto de z y w en la forma

$$z + w = (a + c) + (b + d)i \quad (\text{suma})$$

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (\text{producto})$$

La suma y el producto son asociativos y conmutativos y, además, vale la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Notación: $a + (-b)i = a - bi$, $a + 0i = a$, $0 + bi = bi$.

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, llamaremos *conjugado* de z al número complejo $\bar{z} = a - bi$ y *módulo* de z al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se verifican:

$$a) \quad z\bar{z} = |z|^2 \qquad b) \quad \text{si } z \neq 0, \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Propiedades de la conjugación:

$$C1) \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$C2) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$C3) \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$$

$$C4) \quad \text{si } z \neq 0, \quad \overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$$

$$C5) \quad z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$$

$$C6) \quad z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)i$$

Propiedades del módulo:

$$M1) \quad z = 0 \iff |z| = 0$$

$$M2) \quad |z| = |\bar{z}|$$

$$M3) \quad |zw| = |z||w|$$

$$M4) \quad |z| = |-z|$$

$$M5) \quad \text{si } z \neq 0, \quad |z^{-1}| = |z|^{-1}$$

$$M6) \quad \text{si } w \neq 0, \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, llamaremos *argumento* de z al único número real $\arg(z)$ que verifica

$$0 \leq \arg(z) < 2\pi, \quad \cos(\arg(z)) = \frac{a}{|z|} \quad \text{y} \quad \text{sen}(\arg(z)) = \frac{b}{|z|}.$$

La *forma polar o trigonométrica* de z es

$$z = |z| (\cos(\arg(z)) + i \text{sen}(\arg(z)))$$

Se verifican:

- si $z = \rho (\cos(\alpha) + i \text{sen}(\alpha))$ con $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, entonces $|z| = \rho$ y $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.
- si $z = \rho (\cos(\alpha) + i \text{sen}(\alpha))$ y $w = \tau (\cos(\beta) + i \text{sen}(\beta))$, con $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ y $\tau, \beta \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, entonces

$$z = w \iff \rho = \tau \quad \text{y} \quad \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = |z| (\cos(\alpha) + i \text{sen}(\alpha))$, la *notación exponencial* de z es $z = |z| e^{i\alpha}$.

Teorema de De Moivre. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $w \neq 0$.

Si $z = |z| (\cos(\alpha) + i \text{sen}(\alpha))$ y $w = |w| (\cos(\beta) + i \text{sen}(\beta))$, entonces

$$zw = |z| |w| (\cos(\alpha + \beta) + i \text{sen}(\alpha + \beta))$$

es decir,

$$|z| e^{i\alpha} |w| e^{i\beta} = |z| |w| e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Como consecuencia, se deduce que:

$$\begin{array}{ll} z^{-1} = |z|^{-1} (\cos(-\alpha) + i \text{sen}(-\alpha)) & \text{es decir, } z^{-1} = |z|^{-1} e^{-i\alpha} \\ \bar{z} = |z| (\cos(-\alpha) + i \text{sen}(-\alpha)) & \text{es decir, } \bar{z} = |z| e^{-i\alpha} \\ \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\alpha - \beta) + i \text{sen}(\alpha - \beta)) & \text{es decir, } \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\alpha-\beta)} \\ z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i \text{sen}(n\alpha)) & \text{es decir, } z^n = |z|^n e^{i(n\alpha)} \end{array}$$

Si $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, una *raíz n -ésima* de w es un número $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = w$. Si z es una raíz n -ésima de w , entonces

$$z = |w|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

para algún número entero k tal que $0 \leq k \leq n - 1$.

EJERCICIOS

Ejercicio 1. Dar la forma binómica de z en los casos

a) $z = 1 - i(2 + i)$

b) $z = (1 + 2i)(3 - i)^2$

c) $z = (3 + 4i)^{-1}$

Ejercicio 2. Hallar todos los números complejos z que satisfacen

a) $(1 + i)z + 5 = 2 - 3i$

b) $i(z - 5) = (1 + 3i)z$

c) $\frac{z - i}{z} = 2 + i$

d) $\frac{2 + i}{z} = \frac{2 + 2i}{z + 1}$

Ejercicio 3. Dar la forma binómica de todos los números complejos z que satisfacen

a) $\bar{z}(z + 1) = 11 + 3i$

b) $\operatorname{Re}(z) \cdot \bar{z} = 4 + 6i$

c) $\operatorname{Im}(z) \cdot z + i \operatorname{Re}(z) \cdot \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)$

Ejercicio 4. Dados $z = 1 + 3i$ y $w = 4 + 2i$, representar en el plano, sin calcularlos, los números complejos \bar{z} , $-z$, $2z$, $-3w$, $-\bar{w}$, $z + w$, $w - z$ y $\bar{z} - 3w$.

Ejercicio 5. Sabiendo que $2 + 2i$; $-2 + 2i$; $-2 - 2i$ y $2 - 2i$ son los vértices de un cuadrado de lados paralelos a los ejes cuyas diagonales se cortan en $z = 0$, hallar $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{C}$ que sean los vértices de un cuadrado de lados paralelos a los ejes del mismo tamaño que el dado pero cuyas diagonales se corten en $z = 3 + 5i$.

Ejercicio 6. Calcular $|z|$ en los casos

a) $z = i(4 - 3i)$

b) $z = (1 + i)^8$

c) $z = \sqrt{5}(1 + 2i)^{-1} \overline{(1 + i)}$

d) $z = 1 - i(2 + i)$

e) $z = (-7i) |(1 - i)^{-1}|$

f) $z = \sqrt{2}(-1 + i)^{-1}(3 + i)^8$

Ejercicio 7. Dado $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, hallar $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos tales que $w = a + bi$ sea múltiplo real de z y la diagonal del rectángulo de vértices 0 , a , w y bi en el plano complejo mida

a) 7

b) 15

c) k , donde k es un número real positivo dado.

Ejercicio 8. Representar en el plano complejo

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| = 2\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \leq 2\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \geq 2\}$

f) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1\}$

g) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) > 1\}$

h) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 2\operatorname{Re}(z) + 1 \text{ y } |z| < 1\}$

Ejercicio 9. Representar en el plano complejo

a) $\{z \in \mathbb{C} / |z - 1| = |z + i|\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} / |z - 1 - 2i| \leq 2 \text{ y } \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) - 1\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} / |3z - 3| \geq 6 \text{ y } |z| \leq |z - 1 - i|\}$

Ejercicio 10. Escribir en forma binómica todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

a) $z^2 = 3 + 4i$

b) $z^2 = -8i$

c) $z^2 - 2z + 5 = 0$

d) $z(z + 1) = 5 + 5i$

Ejercicio 11. Sin calcular $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$, representar en el plano complejo

a) $z = 2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

b) $z = 3 \left(\cos \frac{3}{2} \pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{2} \pi \right)$

c) $z = \cos \frac{7}{4} \pi + i \operatorname{sen} \frac{7}{4} \pi$

d) $z = 5 \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{4} \pi \right)$

Ejercicio 12. Hallar el módulo y el argumento de z y expresar a z con la notación exponencial en los casos

a) $z = \sqrt{7}$

b) $z = -2$

c) $z = -6i$

d) $z = 2 + 2i$

e) $z = \sqrt{3} + i$

f) $z = -1 - \sqrt{3}i$

g) $z = -3 \left(\cos \frac{17}{5} \pi + i \operatorname{sen} \frac{17}{5} \pi \right)$

h) $z = \cos \frac{7}{4} \pi - i \operatorname{sen} \frac{7}{4} \pi$

$$i) z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)^{-1}$$

$$j) \cos \frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$$

Ejercicio 13. Representar en el plano complejo

$$a) \{z \in \mathbb{C} / 1 \leq |z| \leq 4 \text{ y } \arg(z) = \frac{\pi}{4}\}$$

$$b) \{z \in \mathbb{C} / |z - 1| = 3 \text{ y } 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\}$$

$$c) \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z) \text{ y } \pi \leq \arg(z) \leq \frac{7}{4}\pi\}$$

Ejercicio 14. Hallar la forma polar de z en los casos

$$a) z = (1 + i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$b) z = (-3i)(-1 + i) \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} \right)$$

$$c) z = (-1 + \sqrt{3}i)^8 (2 + 2i)^{-1}$$

$$d) z = \left(\operatorname{sen} \frac{2\pi}{7} - i \cos \frac{2\pi}{7} \right)^5$$

Ejercicio 15. Hallar la forma binómica de z en los casos

$$a) z = (-\sqrt{3} + i)^{16} (1 - i)$$

$$b) z = \frac{-2i}{(1 + \sqrt{3}i)^{11}}$$

$$c) z = \frac{(\sqrt{3} + i)^{23}}{(-1 - i)^{31}}$$

$$d) z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} \right)^{15}$$

Ejercicio 16. Hallar las raíces n -ésimas de w y expresarlas con la notación exponencial en los casos

$$a) n = 3, n = 4 \text{ y } n = 6, \quad w = 1$$

$$b) n = 6, \quad w = -1$$

$$c) n = 4, \quad w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$d) n = 5, \quad w = i$$

$$e) n = 3, \quad w = 5 - 5i$$

$$f) n = 4, \quad w = -8 + 8\sqrt{3}i$$

Ejercicio 17. Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$a) z^6 = -1$$

$$b) z^3 = \overline{iz^2}$$

$$c) z^8 = \left(\frac{-1 + i}{\sqrt{3} + i} \right)^3$$

$$d) z^4 = -\overline{z^4}$$

$$e) z^3 + 4i|z| = 0$$

$$f) z^6 = (1 + 2i)^6$$

Ejercicio 18.

- a) Hallar los vértices de un hexágono regular inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 0$ y radio 2 y que tiene a 2 como uno de sus vértices.
- b) Hallar los vértices de un hexágono regular que esté inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 1 + i$ y radio 2.
- c) Hallar los vértices de un hexágono regular que esté inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 1 + i$ y radio 4.
- d) Hallar los vértices del hexágono regular inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 0$ y radio 2 que se obtiene rotando en sentido antihorario el hexágono hallado en a) en un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
- e) Hallar los vértices del hexágono regular inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 0$ y radio 2 que tiene dos de sus vértices sobre el eje imaginario puro.
- f) Hallar los vértices del hexágono regular que tiene a $w = 3 + 4i$ como uno de sus vértices y que está inscripto en una circunferencia de centro $z_0 = 0$.