Práctica 3

Polinomios

Definiciones y propiedades

En lo que sigue, $\mathbb{K}$ significa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Un *polinomio* con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

con $n \in \mathbb{N}_0$ y $a_j \in \mathbb{K}$ para $j = 0, \ldots, n$.
Indicaremos con $\mathbb{K}[x]$ al conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ y consideramos en $\mathbb{K}[x]$ las operaciones de suma y producto usuales.

Dado $P \in \mathbb{K}[x]$ no nulo, $P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ con $a_n \neq 0$, decimos que a_n es el *coeficiente principal* de P y definimos el *grado* de P como $\text{gr}(P) = n$. Por convención, el polinomio nulo no tiene grado.

Propiedades. Dados $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$ y $Q \neq 0$,

- $\text{gr}(PQ) = \text{gr}(P) + \text{gr}(Q)$;
- si $P + Q \neq 0$, entonces $\text{gr}(P + Q) \leq \text{máx}\{\text{gr}(P), \text{gr}(Q)\}$;
- si $\text{gr}(P) \neq \text{gr}(Q)$, entonces $\text{gr}(P + Q) = \text{máx}\{\text{gr}(P), \text{gr}(Q)\}$.

Algoritmo de división. Dados $P, Q \in \mathbb{K}[x]$, $Q \neq 0$, existen únicos $S, R \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$P = QS + R \quad \text{y} \quad R = 0 \;\text{ o }\; \text{gr}(R) < \text{gr}(Q).$$

El polinomio R se llama el *resto* de la división de P por Q. Cuando este resto es el polinomio nulo (es decir, si $P = QS$), decimos que P es divisible por Q o que Q divide a P.

Dados $P \in \mathbb{K}[x]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$, y $z \in \mathbb{K}$, llamaremos *especialización* de P en z al número $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_jz^j$ y diremos que z es *raíz* de P si $P(z) = 0$.

Teorema del resto. Sean $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$. Entonces el resto de la división de P por $x - z$ es igual a $P(z)$. En particular, z es raíz de P si y sólo si $x - z$ divide a P.

Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z_1, z_2, \dots, z_r$ son r raíces distintas de P, entonces

$$P = (x - z_1)(x - z_2)\dots(x - z_r).Q$$

para algún $Q \in \mathbb{K}[x]$.
En consecuencia, si $P \in \mathbb{K}[x]$ tiene grado n, entonces P tiene a lo sumo n raíces en $\mathbb{K}$.

Teorema de Gauss. Sea $P \in \mathbb{Z}[x]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, con $a_n \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es raíz de P (con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ sin factores primos en común), entonces p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n.

Teorema fundamental del álgebra. Si $P \in \mathbb{C}[x]$ y $\text{gr}(P) \geq 1$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que z es raíz de P.

Propiedad. Si $P \in \mathbb{R}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces z es raíz de P si y sólo si $\overline{z}$ es raíz de P.

Sea $P \in \mathbb{K}[x]$ y sea $k \in \mathbb{N}$. Diremos que $z \in \mathbb{K}$ es una raíz de P de *multiplicidad* k si existe $Q \in \mathbb{K}[x]$ con $Q(z) \neq 0$ tal que $P(x) = (x - z)^k Q(x)$.

Dado $P \in \mathbb{K}[x]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, el *polinomio derivado* de P es $\partial P(x) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1} \in \mathbb{K}[x]$.

Propiedades. Dados $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ y $a \in \mathbb{K}$,

a) $\partial(P + Q) = \partial P + \partial Q$ *b)* $\partial(PQ) = (\partial P).Q + P.(\partial Q)$ *c)* $\partial(ax^0) = 0$

Escribimos $\partial^2 P = \partial(\partial P)$, $\partial^3 P = \partial(\partial^2 P) = \partial(\partial(\partial P))$, $\partial^m P = \partial(\partial^{m-1} P) = \partial(\partial(\dots(\partial P)))$.

Propiedad. Si $P \in \mathbb{K}[x]$ y $z \in \mathbb{K}$, vale que z es una raíz de P de multiplicidad k si y sólo si

$$P(z) = 0,\ \partial P(z) = 0,\ \partial^2 P(z) = 0,\ \dots, \partial^{k-1} P(z) = 0 \text{ y } \partial^k P(z) \neq 0.$$

Dados un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ una raíz de f, el *orden de contacto* entre la curva $y = f(x)$ y el eje x en el punto $(x_0, 0)$ es la multiplicidad de x_0 como raíz de f. Más generalmente, si $f, g \in \mathbb{R}[x]$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x_0) = g(x_0)$, el orden de contacto entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el punto de abscisa x_0 es la multiplicidad de x_0 como raíz de $f - g$.

Polinomio interpolador de Lagrange. Sean $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$ y sean $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$. Existe un único polinomio $L \in \mathbb{K}[x]$, con $L = 0$ o $\text{gr}(L) \leq n$, que satisface $L(a_i) = b_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Este polinomio es

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(x) \text{ donde } L_i(x) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x - a_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (a_i - a_k)}$$

EJERCICIOS

Ejercicio 1. Calcular PQ, $P+3Q$ y $(P+2x)xQ^2$, indicando en cada caso el coeficiente principal y el grado.

a) $P(x) = 2x^2 - 3$, $Q(x) = x^4$

b) $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $Q(x) = -x^2 + 1$

c) $P(x) = x^2 - x$, $Q(x) = -x^2 + 3$

d) $P(x) = -2x + 3$, $Q(x) = x + 2$

Ejercicio 2. Determinar el grado del polinomio P sabiendo que $(1 + x^2Q)xP$ tiene grado 11 y que Q es un polinomio de grado 5.

Ejercicio 3. Hallar, si existen, $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $x^2 + 8x = a + bx^2 + c(x+1)(x+3)$.

Ejercicio 4. Hallar el cociente y el resto de la división de P por Q.

a) $P = 2x^4 - 15x^2 - 5x + 1$, $Q = x - 3$

b) $P = x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 4$, $Q = x^2 + 1$

c) $P = 4x^5 + x^3 + x + 1$, $Q = 2x^2 - x + 1$

Ejercicio 5. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$ es divisible por $x^2 + a$.

Ejercicio 6. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que

a) $P(2) = -6$, para $P(x) = ax^2 - x$

b) $P(x) = 2x^4 - 3ax^2 + 1 - 5a$ tenga a cero como raíz

c) $P(-1) = a$, para $P(x) = ax^2 + ax + 5$

Ejercicio 7. Determinar todas las raíces de P en los casos

a) $P(x) = x^2 + (1-i)x + 2 - 2i$

b) $P(x) = ix^6 - 1$

Ejercicio 8. Determinar todas las raíces de P en $\mathbb{C}$ y escribirlo como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$.

a) $P(x) = 3x^3 + x^2 + 12x + 4$

b) $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{2}{3}x - 7$

c) $P(x) = x^4 + \frac{7}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1$

d) $P(x) = (5x^4 + 5)(x^2 - 2)$

e) $P(x) = 4x^4 - 9x^2 - 9$

f) $P(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 4$

g) $P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - x - 10$, sabiendo que i es raíz

h) $P(x) = 3x^5 - 4x^4 + 7x^3 + 19x^2 - 22x + 5$, sabiendo que $1 + 2i$ es raíz

Ejercicio 9. Determinar todas las raíces de P en $\mathbb{C}$.

a) $P(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x - 4$, sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

b) $P(x) = x^3 - (3 + 3i)x^2 + 8ix + 4 - 4i$, sabiendo que tiene una raíz real.

Ejercicio 10. Determinar la multiplicidad de z como raíz de P.

a) $P(x) = (x^2 + 4)(x - 2)^3(x^3 - 8)$, $z = 2$

b) $P(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1$, $z = i$

c) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$, $z = 1$

d) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$, $z = \frac{1}{2}$

Ejercicio 11. Sabiendo que P tiene una raíz múltiple, hallar todas sus raíces y escribirlo como producto de polinomios de grado 1.

a) $P(x) = 4x^3 + 8\sqrt{3}x^2 + 15x + 3\sqrt{3}$

b) $P(x) = x^3 + 3ix^2 + 4i$

Ejercicio 12. Sea $P(x) = 3x^5 + ax^4 + ax + 3$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que -1 sea raíz múltiple de P. Para el valor hallado, calcular la multiplicidad de -1 como raíz de P y escribir a P como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

Ejercicio 13.

a) Hallar $P \in \mathbb{C}[x]$ de grado mínimo que tenga a -1 como raíz, a $2+3i$ como raíz múltiple y que verifique $P(1) = 20$.

b) Hallar $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado mínimo que tenga a -1 y a $2+3i$ como raíces y que verifique $P(2) = 3$.

c) Hallar $P \in \mathbb{R}[x]$ mónico de grado mínimo que tenga a -1 como raíz y a $2+3i$ como raíz doble.

Ejercicio 14. Determinar el orden de contacto de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el punto de abscisa x_0.

a) $f(x) = -3x^5 + x^3 + 2x^2$, $g(x) = 0$, $x_0 = 0$

b) $f(x) = x^5 + 5x^3 - 3x^4 - 7x^2 + 6x - 2$, $g(x) = 0$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$, $g(x) = -2x^2 + x + 1$, $x_0 = 0$

d) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 5$, $g(x) = -2x^3 + 1$, $x_0 = -2$

Ejercicio 15.

a) Encontrar la ecuación de una parábola que pase por los puntos $(1, -1)$, $(0, 1)$ y $(2, 2)$.

b) Encontrar un polinomio P de grado a lo sumo 3 que verifique $P(1) = 2$, $P(0) = -1$, $P(2) = 2$ y $P(-1) = 1$.