# Práctica 5

## Álgebra vectorial - Segunda parte

## Definiciones y propiedades

### Norma, ángulo y producto mixto

La *norma* de un vector $\mathbf{v}$, que notaremos $\|\mathbf{v}\|$, es la longitud del vector.
Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es un vector en $\mathbb{R}^2$, su norma es la distancia entre el punto $(v_1, v_2)$ y el origen de coordenadas $O = (0,0)$. Por el teorema de Pitágoras, resulta ser $\|(v_1, v_2)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.
De manera análoga, la norma de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$ es $\|(v_1, v_2, v_3)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
La norma puede expresarse en función del producto escalar: $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.
A partir de esta definición, se puede calcular la *distancia entre dos puntos* $P$ y $Q$ (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$): es la norma de la diferencia $P - Q$; en símbolos, $d(P, Q) = \|P - Q\|$.

*Propiedades.* Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son dos vectores, entonces

- $\|k\,\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (*desigualdad triangular o de Minkowski*).
- $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\|$ (*desigualdad de Cauchy-Schwarz*).

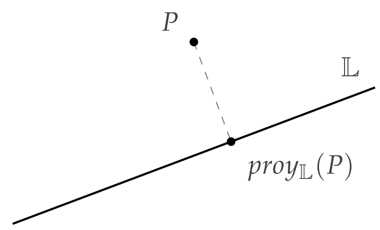
El *ángulo* entre dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el menor de los dos ángulos determinados por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Es el único ángulo $\theta$ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ que verifica $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\|}$.

Si los puntos $O$, $P$ y $Q$ en $\mathbb{R}^3$ no están alineados, los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ determinan un paralelogramo. El área de este paralelogramo es la norma del producto vectorial $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$.

Dados tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^3$, su *producto mixto* es el número real que se obtiene al hacer el producto vectorial de los dos primeros y al resultado multiplicarlo escalarmente por el último vector; en símbolos, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.
Si los puntos $O$, $P$, $Q$ y $R$ en $\mathbb{R}^3$ no son coplanares, los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ determinan un paralelepípedo. El volumen de este paralelepípedo es el módulo del producto mixto entre los vectores. Este producto mixto es cero si y solo si $O$, $P$, $Q$ y $R$ son coplanares.

### Proyección ortogonal y distancia

Dados un punto $P$ y una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^2$, la *proyección ortogonal de $P$ sobre $\mathbb{L}$* es el punto $proy_{\mathbb{L}}(P)$ que resulta de intersecar a la recta $\mathbb{L}$ con la recta perpendicular que pasa por $P$.



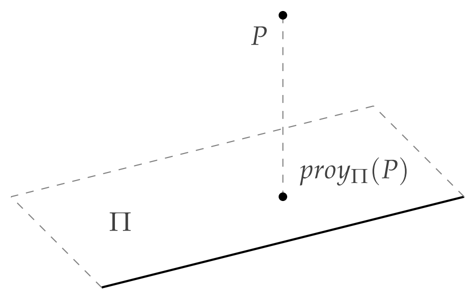

Si $\mathbb{L} : ax + by = c$, la proyección ortogonal de $P$ se puede calcular como

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{c - P \cdot (a,b)}{\|(a,b)\|^2}\,(a,b) + P$$

y, si $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} + Q \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$, entonces

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{(P - Q) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v} + Q.$$

Similarmente, dados un punto $P$ y un plano $\Pi$ en $\mathbb{R}^3$, la *proyección ortogonal de $P$ sobre $\Pi$* es el punto $proy_{\Pi}(P)$ que resulta de intersecar a $\Pi$ con la recta perpendicular que pasa por $P$.




Si $\Pi : ax + by + cz = d$, llamando $\mathbf{N} = (a,b,c)$ (vector normal a $\Pi$), se tiene que

$$proy_{\Pi}(P) = \frac{d - P \cdot \mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|^2}\,\mathbf{N} + P.$$

Si $P$ es un punto y $\mathbb{L}$ una recta en $\mathbb{R}^3$, la proyección de $P$ sobre $\mathbb{L}$ es la intersección de la recta con el plano perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $P$. Si $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} + Q \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$, entonces

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{(P - Q) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v} + Q.$$

Dado un vector $\mathbf{v}$ (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$), notaremos $proy_{\mathbf{v}}(P)$ a la proyección ortogonal de $P$ sobre la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$. Se tiene que $proy_{\mathbf{v}}(P) = \dfrac{P \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v}$.

La *distancia entre un punto $P$ y una recta $\mathbb{L}$ o un plano $\Pi$* es la mínima de todas las distancias entre $P$ y los puntos de la recta o del plano. Geométricamente, se observa que el punto de la recta o del plano que está a distancia mínima de un punto $P$ es la proyección ortogonal de $P$; en símbolos, $d(P,\mathbb{L}) = \|P - proy_{\mathbb{L}}(P)\|$ y $d(P,\Pi) = \|P - proy_{\Pi}(P)\|$.

A partir de las fórmulas para proyección ortogonal se deducen fórmulas para calcular la distancia entre un punto y una recta o entre un punto y un plano. Si $P \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{L} : ax + by = c$, entonces

$$d(P, \mathbb{L}) = \frac{|c - P \cdot (a,b)|}{\|(a,b)\|}$$

y si $P \in \mathbb{R}^3$ y $\Pi : ax + by + cz = d$, llamando $\mathbf{N} = (a,b,c)$, se tiene que

$$d(P, \Pi) = \frac{|d - P \cdot \mathbf{N}|}{\|\mathbf{N}\|}.$$

**Simetrías**

- *Con respecto a un punto* $Q$: El simétrico de un punto $P$ con respecto a $Q$ es el único punto en la recta que pasa por $P$ y $Q$ que es distinto de $P$ y cuya distancia a $Q$ es igual a la distancia entre $P$ y $Q$.
- *Con respecto a una recta* $\mathbb{L}$: El simétrico de un punto $P$ con respecto a una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^2$ es el único punto (distinto de $P$) en la recta perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $P$ cuya distancia a $\mathbb{L}$ es igual a la distancia entre $P$ y $\mathbb{L}$; es decir, es el simétrico de $P$ con respecto a $proy_{\mathbb{L}}(P)$. Similarmente, el simétrico de un punto $P$ con respecto a una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^3$ es el simétrico de $P$ con respecto a $proy_{\mathbb{L}}(P)$.
- *Con respecto a un plano* $\Pi$: El simétrico de un punto $P$ con respecto a un plano $\Pi$ en $\mathbb{R}^3$ es el único punto (distinto de $P$) en la recta perpendicular a $\Pi$ que pasa por $P$ cuya distancia a $\Pi$ es igual a la distancia entre $P$ y $\Pi$; es decir, es el simétrico de $P$ con respecto a $proy_{\Pi}(P)$.

---

## Ejercicios

**Ejercicio 1.** Dados $\mathbf{v} = (3, -4)$ y $\mathbf{w} = (1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$, calcular

$$\|\mathbf{v}\|, \quad \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|, \quad \|2\mathbf{v}\|, \quad \left\|\tfrac{1}{2}\mathbf{v}\right\|, \quad \left\|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\|.$$

**Ejercicio 2.** Graficar en el plano el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = 2\}$.

**Ejercicio 3.** Calcular la distancia entre los puntos dados y el ángulo entre los vectores determinados por ellos.

*a*) $(2,3)$ y $(5,1)$

*b*) $(1,0)$ y $(-\sqrt{3},1)$

*c*) $(1,0,0)$ y $(-\sqrt{2},1,1)$ *d*) $(0,-1,1)$ y $(-\sqrt{2},1,1)$

**Ejercicio 4.** Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que

*a)* la norma del vector $(2,-2,k)$ es igual a $3$.

*b)* el ángulo entre los vectores $(2,1,1)$ y $(1,-1,k)$ es $\dfrac{\pi}{3}$.

**Ejercicio 5.** Hallar los ángulos que forman los vectores dados con los semiejes coordenados positivos.

*a)* $(1,-1)$, $(-1,\sqrt{3})$ y $(1,2)$ en $\mathbb{R}^2$.

*b)* $(1,0,-1)$, $(0,2,0)$ y $(1,-1,2)$ en $\mathbb{R}^3$.

**Ejercicio 6.** Para cada uno de los siguientes vectores, calcular su norma $\rho$ y el ángulo $\theta$ que forma con el semieje positivo de las $x$:

$$(-1,1), \quad (0,5), \quad (1,-2), \quad (-1,2,2) \quad \text{y} \quad (0,-2,-1)$$

**Ejercicio 7.** Dados la norma $\rho$ y el ángulo $\theta$ que forman los vectores con el semieje positivo de las $x$ (medido en sentido antihorario), hallar sus coordenadas en $\mathbb{R}^2$.

*a*) $\rho = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ *b*) $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ *c*) $\rho = 3$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Comparar con la forma polar y la forma binómica de los números complejos.

**Ejercicio 8.** Para cada vector $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^2$, notamos $\theta_{\mathbf{u}}$ al ángulo que forma con el semieje positivo de las $x$. En cada uno de los siguientes casos, dar las coordenadas del vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$:

*a)* $\|\mathbf{u}\| = 4$, $\theta_{\mathbf{u}} = 0$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\theta_{\mathbf{v}} = \dfrac{2\pi}{3}$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

*b)* $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\theta_{\mathbf{u}} = \dfrac{\pi}{4}$, $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$, $\theta_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \dfrac{\pi}{2}$, $\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

**Ejercicio 9.** Dar todos los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ que verifican:

*a)* la norma de $\mathbf{v}$ es 3 y los tres ángulos que forma con los semiejes positivos son iguales.

*b)* $\mathbf{v}$ pertenece al plano $yz$, su norma es 2 y determina un ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ con el semieje positivo de las $y$.

*c)* $\mathbf{v}$ pertenece al plano $xz$, su norma es 5 y determina un ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ con el semieje positivo de las $z$.

**Ejercicio 10.** Sabiendo que el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\frac{\pi}{3}$, $\|\mathbf{w}\| = 4$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, calcular $\|\mathbf{v}\|$.

**Ejercicio 11.** Dados los puntos $P = (1, -1, 1)$, $Q = (2, 0, 3)$ y $R = (0, 1, 2)$, calcular el perímetro, los ángulos interiores y el área de:

*a)* el paralelogramo de lados $PQ$ y $PR$.

*b)* el triángulo $PQR$. Decidir si es un triángulo isósceles, equilátero o escaleno.

**Ejercicio 12.** Dados los puntos $P = (2, 3, -1)$, $Q = (1, 0, 2)$ y $R = (3, 1, 1)$, hallar un punto $S$ en la recta que pasa por $P$ y $Q$ de modo que $PS$ y $PR$ determinen un paralelogramo de área $10\sqrt{2}$.

**Ejercicio 13.**

*a)* En cada caso, calcular el producto mixto indicado de vectores en $\mathbb{R}^3$. ¿En qué casos da cero?

$$((2,0,0) \times (0,3,0)) \cdot (0,0,4) \qquad ((-1,2,1) \times (6,1,4)) \cdot (1,3,5)$$

$$((-1,2,1) \times (6,1,4)) \cdot (-a+6b, 2a+b, a+4b) \qquad ((-1,2,1) \times (-a,2a,a)) \cdot (1,3,5)$$

*b)* Los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,-3)$ y $(1,2,-1)$ son cuatro de los vértices de un paralelepípedo de forma tal que el $(0,0,0)$ forma aristas con los otros tres. Encontrar los otros cuatro vértices y determinar el volumen del paralelepípedo.

*c)* Los puntos $(1,1,0)$, $(2,1,4)$, $(5,1,2)$ y $(3,-1,0)$ son cuatro de los vértices de un paralelepípedo de forma tal que el $(1,1,0)$ forma aristas con los otros tres. Determinar el volumen del paralelepípedo.

**Ejercicio 14.** Dados los puntos $O = (0,0,0)$, $P = (3,2,1)$, $Q = (1,1,2)$ y $R = (1,3,3)$, calcular:

*a)* el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.

*b)* el volumen del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$.

**Ejercicio 15.** Dados los puntos $O = (0,0,0)$, $P = (5,0,1)$, $Q = (3,-2,0)$ y $R = (-4,1,k)$, hallar $k \in \mathbb{R}$ de modo que:

*a)* los tres vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ determinen un paralelepípedo de volumen $5$.

*b)* los puntos $O$, $P$, $Q$ y $R$ resulten coplanares.

**Ejercicio 16.** Dado $P = (1,3,-5)$, encontrar el punto más cercano a $P$ que pertenece a cada uno de los siguientes conjuntos:

*a*) la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(2,-1,3)$.

*b*) el plano $\Pi : -2x + y + z = 5$.

**Ejercicio 17.** Hallar la proyección ortogonal de

*a)* $P = (5,-3)$ sobre el eje de las $x$ y sobre el eje de las $y$.

*b)* $P = (5,-3)$ sobre la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,1)$.

*c)* $P = (1,0,2)$ sobre la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(2,-1,0)$.

*d)* $P = (-1,1,0)$ sobre el plano $\Pi : 2x - 3z = 0$.

**Ejercicio 18.** Calcular la distancia entre

*a)* el punto $P = (-1,0,3)$ y la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2,-1)$.

*b)* el punto $P = (-1,0,2)$ y la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,-2,0) + (0,1,1)$.

*c)* el punto $P = (1,-1,2)$ y el plano $\Pi : 5x + 2y - z = 0$.

*d)* el punto $P = (0,-1,2)$ y el plano $\Pi : -2x + y - z = 3$.

*e)* el punto $P = (2,2,1)$ y el plano que contiene a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2,-1,3) + (3,2,5)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(1,2,-1) + (1,3,2)$.

**Ejercicio 19.** Calcular la distancia entre

*a)* las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2,1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(2,1) + (3,-1)$.

*b)* la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,-2,1) + (0,1,1)$ y el plano $\Pi : x + y + z = 3$.

*c)* los planos $\Pi_1 : 3x + 2y - z = -2$ y $\Pi_2 : 6x + 4y - 2z = 7$.

*d)* las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1,2,-1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(1,-2,0) + (0,1,1)$.

**Ejercicio 20.** Sean $\mathbb{L} : X = \lambda.(2,3,-1)$ y $\Pi : x + 2y = 0$. Determinar:

*a)* todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a distancia $\sqrt{5}$ de $\Pi$.

*b)* todos los puntos de $\mathbb{L}$ que están a distancia $\sqrt{5}$ de $\Pi$.

**Ejercicio 21.**

*a)* Determinar todos los $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tales que $proy_{(1,1)}(\mathbf{v}) = (2,2)$.

*b)* Calcular, si es posible, un vector $\mathbf{w}$ de norma 1 tal que $proy_{\mathbf{w}}(2,3,1) = 3\mathbf{w}$.

**Ejercicio 22.** Dados los vectores $\mathbf{v} = (3,-5,2)$ y $\mathbf{w} = (2,-1,2)$, hallar un vector $\mathbf{u}$ paralelo al eje $z$ tal que $\|proy_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}+\mathbf{u})\| = 5$.

**Ejercicio 23.** Dados los vectores $\mathbf{v} = (3,1,0)$, $\mathbf{w} = (4,2,-1)$ y $\mathbf{u} = (2,1,-2)$, hallar todos los vectores $\mathbf{z}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{z}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$ simultáneamente y $\|proy_{\mathbf{u}}(\mathbf{z})\| = 2$.

**Ejercicio 24.** Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(0,1,-1) + (0,-1,0)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(1,1,1) + (2,3,0)$. Hallar, si es posible, un plano $\Pi$ tal que $d(P,\Pi) = 2\sqrt{6}$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$ y todo $P \in \mathbb{L}_2$.

**Ejercicio 25.** Sean $\Pi_1 : 3x - 2y + z = 4$ y $\Pi_2$ el plano que contiene a los puntos $P = (0,1,1)$, $Q = (3,-1,-1)$ y $R = (3,0,1)$. Hallar todos los puntos del plano $\Pi_1$ que están a distancia 2 del plano $\Pi_2$.

**Ejercicio 26.** Sean $\Pi_1 : 7x - 5y - 2z = 0$, $\Pi_2 : 5x - 4y - z = 0$ y $\mathbb{L}$ la recta que pasa por los puntos $P = (-2,3,-3)$ y $Q = (-1,2,-1)$. Hallar todos los planos $\Pi$ que verifican simultáneamente: $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$ y $d(R,\Pi) = \sqrt{14}$ para todo $R \in \mathbb{L}$.

**Ejercicio 27.** Sean en $\mathbb{R}^3$ el plano $\Pi : 2x - y + 2z = 4$ y los puntos $P = (2,2,2)$ y $Q = (1,0,1)$. Determinar un plano $\Pi'$ que contenga a $P$, a $Q$ y al punto $R$ de $\Pi$ tal que $d(P,R) = d(P,\Pi)$.

**Ejercicio 28.** Encontrar el simétrico de

*a*) $(2,1)$ con respecto a $(0,0)$.

*b*) $(2,-4)$ con respecto a $(-1,1)$.

*c*) $(3,-1,0)$ con respecto a $(0,-1,2)$.

*d*) $(0,-1,0)$ con respecto a $(1,1,1)$.

**Ejercicio 29.** Encontrar, si es posible, un punto $Q$ tal que

*a)* el simétrico de $(4,1)$ con respecto a $Q$ es $(-2,3)$.

*b)* el simétrico de $(3,-1,1)$ con respecto a $Q$ es $(0,0,0)$.

**Ejercicio 30.** Hallar el simétrico de *a*) $(2,-1)$ con respecto al eje $x$.

*b*) $(2,0)$ con respecto al eje $y$.

*c*) $(3,-1)$ con respecto a la recta $y = 2x - 4$.

**Ejercicio 31.** En cada caso, hallar, si es posible, la recta de modo que los puntos dados sean simétricos respecto de ella.

*a*) $(1,3),(3,1)$

*b*) $(-3,4),(5,0)$

*c*) $(3,-4),(0,5)$

**Ejercicio 32.** Hallar el simétrico de

*a)* $(1,0,-4)$ con respecto al punto $(2,-1,0)$.

*b)* $(0,0,0)$ con respecto a la recta $\mathbb{L} : \lambda.(0,-1,2) + (1,1,0)$.

*c)* $(-1,1,2)$ con respecto al plano $\Pi : 2x + y - 3z = 2$.

**Ejercicio 33.** Dados $P = (-1,0,3)$ y $Q = (2,-1,0)$, hallar:

*a)* un punto $R$ de modo que $P$ y $Q$ sean simétricos respecto de $R$.

*b)* una recta $\mathbb{L}$ de modo que $P$ y $Q$ sean simétricos respecto de $\mathbb{L}$.

*c)* un plano $\Pi$ de modo que $P$ y $Q$ sean simétricos respecto de $\Pi$.

¿En qué casos el resultado es único?

## Ejercicios surtidos

**1.** Demostrar las siguientes propiedades e interpretarlas geométricamente.

*a)* $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ si y solo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

*b)* $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$ si y solo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. (Teorema de Pitágoras.)

**2.** Sea $P = (2,1,-1)$.

*a)* Si $\Pi : x + y - z = 3$, ¿cuál es el punto de $\Pi$ a menor distancia de $P$?

*b)* Si $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,3,1) + (2,2,0)$, ¿cuál es el punto de $\mathbb{L}$ a menor distancia de $P$?

**3.** Si $\Pi_1 : 3x + 2y - 6z = 1$ y $\Pi_2 : -3y + 4z = 3$, hallar todos los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que verifican:

*a)* $d(P,\Pi_1) = d(P,\Pi_2)$

*b)* $d(P,\Pi_1) = d(P,\Pi_2) = 2$

**4.** Sean el plano $\Pi : 2x - 2y + z = 1$ y los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (3,2-1)$. Hallar todos los puntos $R$ y $S$ pertenecientes a $\Pi$ tales que $PQRS$ es un cuadrado.

**5.** Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(k^2+k,k,k-1)$, $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(4,1,-1) + (2k,0,2k)$ y $\Pi : x - 2y + 2z = 3$. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $d(P,\Pi) = d(Q,\Pi)$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$ y todo $Q \in \mathbb{L}_2$.

**6.** Dadas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1,2,1) + (0,1,1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(2,-1,-2) + (1,1,0)$, hallar todos los planos $\Pi$ tales que $\Pi \cap \mathbb{L}_2 = \emptyset$ y $d(P,\Pi) = \sqrt{2}$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$.

**7.** Encontrar la recta $\mathbb{L}_1$ en $\mathbb{R}^2$ que es paralela a la recta $\mathbb{L}_2$ de ecuación $y = 2x - 3$ y pasa por el simétrico de $(-2,5)$ con respecto al punto $(1,1)$.

**8.** Hallar el plano $\Pi$ que es perpendicular a $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1,2,1) + (0,1,1)$ y pasa por el simétrico de $(1,0,1)$ con respecto a la recta $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(2,-1,-2) + (1,1,0)$.

**9.** Sean $P = (1,0,2)$ y $Q = (-5,4,0)$. Hallar, si es posible, una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que los simétricos de $P$ y $Q$ con respecto a $\mathbb{L}$ sean, respectivamente, $(-1,-2,0)$ y $(1,4,-4)$.

**10.** Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda(1,2,-1) + (5,1,0)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda(1,1,-1) + (0,2,1)$. Hallar $P_1 \in \mathbb{L}_1$ y $P_2 \in \mathbb{L}_2$ tales que la distancia entre $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ sea igual a $d(P_1,P_2)$.