Práctica 6

Matrices y sistemas lineales

Definiciones y propiedades

Matrices

Dados los números naturales m y n, una *matriz* de m filas y n columnas con coeficientes reales es un arreglo rectangular $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Llamamos *filas* de A a las n-uplas $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ con $i = 1, \dots, m$.

Llamamos *columnas* de A a las m-uplas $A^{(j)} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ con $j = 1, \dots, n$.

Con esta notación, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$ y también $A = (A^{(1)}\ A^{(2)}\ \dots\ A^{(n)})$.

Al número que está en la fila i y la columna j de la matriz A lo llamamos *elemento* ij de A y lo notamos a_{ij}. Escribimos abreviadamente $A = (a_{ij})$.

Notamos $\mathbb{R}^{m\times n}$ al conjunto de las matrices de m filas y n columnas con coeficientes reales.

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la *matriz transpuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ que tiene como filas a las columnas A.

Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *triangular superior (inferior)* si $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ($i < j$, respectivamente) y es *diagonal* si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

En el conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$, están definidas la *suma* y el *producto por escalares* de la siguiente manera: Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad\qquad kA = (ka_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Es decir, suma y producto por escalares se calculan elemento a elemento.

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times s}$, se define el *producto* de A por B como

$$AB = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times s}$$

donde c_{ij} es igual al producto escalar de la fila i de A por la columna j de B

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$$

Es posible calcular AB si y solo si la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B.

Propiedades del producto de matrices.

- Es asociativo: $(AB)C = A(BC)$
- Es distributivo con respecto a la suma: $$\begin{array}{rcl} A(B+C) & = & AB+AC \\ (A+B)C & = & AC+BC \end{array}$$
- La matriz *identidad* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verifica $AI = IA$ para toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La matriz I es el elemento neutro para el producto en $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Sistemas lineales

Un *sistema lineal* de m ecuaciones con n incógnitas es un conjunto de m ecuaciones en las variables $x_1, \dots, x_n$ del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde las a_{ij} y las b_i representan constantes.

Cuando $b_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, se dice que el sistema es *homogéneo*.

Una n-upla $(s_1, \dots, s_n)$ es una solución del sistema si y solo si al reemplazar x_j por s_j para cada $j = 1, \dots, n$, se satisfacen cada una de las m ecuaciones.

Un sistema se dice *incompatible* si no tiene ninguna solución y *compatible* si tiene alguna solución.

Un sistema lineal homogéneo siempre es compatible: $0 \in \mathbb{R}^n$ es una solución, que llamaremos la *solución trivial*.

Si un sistema compatible tiene una única solución es *determinado* y si tiene infinitas soluciones es *indeterminado*.

La *matriz de coeficientes* del sistema es $A = (a_{ij})$ y la *matriz ampliada* o *matriz aumentada* del sistema es $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Decimos que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

Propiedad. Las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema dan lugar a un sistema equivalente al dado:

1. Multiplicar una de las ecuaciones por una constante no nula.
2. Intercambiar dos de las ecuaciones.
3. Sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a otra ecuación.

Las operaciones anteriores sobre las ecuaciones se corresponden con las siguientes operaciones sobre las filas de la matriz aumentada del sistema. Se denominan *operaciones elementales sobre las filas*:

1. Multiplicar una de las filas por una constante no nula.
2. Intercambiar dos de las filas.
3. Sumar un múltiplo de una de las filas a otra fila.

Se dice que una matriz se encuentra en la forma *escalonada en las filas reducida* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si una fila no consta únicamente de ceros, entonces su primer coeficiente no nulo es un 1 (a este 1 se lo denomina 1 principal).
2. Si existen filas que constan sólo de ceros (filas nulas), se agrupan en la parte inferior de la matriz.
3. Si dos filas sucesivas son no nulas, el 1 principal de la fila inferior se presenta más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.
4. Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

Si una matriz tiene solo las propiedades 1., 2. y 3. se dice que está en la forma *escalonada en las filas*.

Diremos que dos matrices son equivalentes por filas si puede obtenerse una de la otra por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre las filas.
El *método de eliminación de Gauss* para resolver sistemas lineales consiste en llevar la matriz aumentada del sistema planteado, vía la aplicación sistemática de operaciones elementales sobre sus filas, a la forma escalonada en las filas reducida. La resolución del sistema resultante, que es equivalente al original, es inmediata.
Llamamos *rango fila* (o *rango*) de la matriz A al número de filas no nulas que tiene la matriz escalonada en las filas reducida equivalente a A.

Teorema de Rouché-Frobenius. El sistema de matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$ es compatible si y solo si el rango de $(A|\mathbf{b})$ es igual al rango de A.

Notación. El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

puede escribirse $AX = B$, con

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}.$$

En adelante, identificaremos $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ con $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Así, el sistema se escribirá

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Propiedades. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ $(\mathbf{b} \neq 0)$,

$$\mathbb{S}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = 0\} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{S}_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

a) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $k\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$.

   Esto dice que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es también solución del mismo y que los múltiplos de una solución son también soluciones.

b) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$, entonces $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$.

   Esto es, la diferencia entre dos soluciones de un sistema no homogéneo es solución del sistema homogéneo asociado.

c) Si $\mathbf{s}$ es una solución particular del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (es decir, $\mathbf{s} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$), entonces

$$\mathbb{S}_{\mathbf{b}} = \mathbb{S}_0 + \mathbf{s} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s},\ \text{con } \mathbf{x} \in \mathbb{S}_0\}.$$

Esto significa que cualquier solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede obtenerse sumando una solución particular del sistema con una solución del sistema homogéneo asociado.

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *inversible* si existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$. Cuando B existe, es única. Se llama la *matriz inversa de* A y la notamos $B = A^{-1}$.
Propiedad. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son inversibles, entonces AC es inversible y vale $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$.
Propiedad. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es inversible.

b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única, cualquiera sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

c) $A\mathbf{x} = 0$ tiene únicamente la solución trivial.

d) A es equivalente por filas a $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Combinación lineal e independencia lineal. Subespacios

Diremos que un conjunto $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un *subespacio* si verifica simultáneamente:

- El vector 0 pertenece a $\mathbb{S}$.
- Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos de $\mathbb{S}$, entonces la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertenece a $\mathbb{S}$.
- Si $\mathbf{u}$ es un elemento de $\mathbb{S}$ y c es un número real, entonces el producto $c\mathbf{u}$ pertenece a $\mathbb{S}$.

Por ejemplo, $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n$ son subespacios y, si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = 0\}$ es un subespacio.
Dados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ en $\mathbb{R}^n$, un vector $\mathbf{w}$ es una *combinación lineal* de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ si $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_s\mathbf{v}_s$ con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ números reales. El conjunto $\mathbb{S}$ de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ es un subespacio, que notaremos $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s \rangle$, y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ es un *sistema o conjunto de generadores de* $\mathbb{S}$.
Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^n$ son *linealmente dependientes* si existen números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, no todos iguales a 0, tales que $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_s\mathbf{v}_s = 0$. En caso contrario, se dice que

son *linealmente independientes*, es decir, si la **única** forma de escribir al 0 como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ es con todos los coeficientes iguales a 0.
Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S} \neq \{0\}$, cualquier conjunto de generadores de $\mathbb{S}$ que sea linealmente independiente se llama una *base* de $\mathbb{S}$. Todas las bases de $\mathbb{S}$ tienen la misma cantidad de elementos. Esta cantidad es la *dimensión* de $\mathbb{S}$ y la notaremos $\dim(\mathbb{S})$. Se define también $\dim(\{0\}) = 0$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Dadas las siguientes matrices, efectuar, cuando sea posible, los cálculos indicados.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $B + C$ *b)* $2A - E^t$ *c)* BA *d)* BC

e) CB *f)* AB *g)* ED *h)* A^tE^t *i)* $(EA)^t$

Ejercicio 2. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, hallar

a) la segunda fila de AB;

b) la tercera columna de BA;

c) el elemento c_{23} de $C = ABA$.

Ejercicio 3. Dado el sistema lineal

$$\mathcal{S}: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

¿Cuáles de las siguientes 4-uplas son soluciones de $\mathcal{S}$?¿Y del sistema homogéneo asociado?

a) $\mathbf{x} = (2, 2, 1, 0)$ *b*) $\mathbf{y} = (1, 1, 1, 4)$ *c*) $\mathbf{z} = (0, 0, 0, 0)$

d) $\mathbf{u} = (-2, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -7)$ *e*) $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ *f*) $\mathbf{w} = (-1, -2, 3, -7)$

Ejercicio 4. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los que $(a, -a, a-1)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 & & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Obtener un sistema equivalente al dado, cuya matriz ampliada sea escalonada en las filas reducida.

a) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Resolver por el método de eliminación de Gauss el sistema cuya matriz ampliada es $(A|\mathbf{b})$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 0)$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = (3, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 2)$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = (5, 3, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 0)$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{aligned} \mathbf{b} &= (1,2,1,2) \\ \mathbf{b} &= (2,0,-1,2) \\ \mathbf{b} &= (0,0,0,0) \end{aligned}$

Ejercicio 7. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$,

a) hallar una solución de $A\mathbf{x} = 0$.

b) hallar una recta de soluciones de $A\mathbf{x} = 0$.

c) hallar cuatro soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 8. Sean $(1,3,1)$, $(2,2,4)$ y $(2,0,4)$ soluciones de un sistema lineal no homogéneo.

a) Hallar dos rectas distintas tales que todos sus puntos sean soluciones del sistema homogéneo asociado.

b) Encontrar un plano tal que todos sus puntos sean soluciones del sistema no homogéneo.

Ejercicio 9. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Si $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

a) encontrar una solución del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) encontrar una recta de soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10. Determinar todas las matrices B que verifican *a)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 11. Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles y exhibir la inversa cuando exista.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad G + H; \quad G \cdot H.$$

Ejercicio 12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Decidir si A^{-1} es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. Sean

$$\mathcal{S}_1 = \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{-x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

y

$$\mathcal{S}_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Encontrar todos los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ que son soluciones de $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ simultáneamente.

Ejercicio 14. Determinar si el sistema tiene soluciones no triviales, sin resolverlo

a) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 15.

a) Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ tiene solución única.

$$\mathcal{S}: \left\{\begin{array}{rcrcrcl} (k^2-1)x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 0 \\ & & (k-1)x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & & (k+2)x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

b) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ admite solución no trivial.

$$\mathcal{S}: \left\{\begin{array}{rcrcrcl} (k+1)x_1 & + & kx_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & kx_2 & + & (k+2)x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & kx_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 16. Determinar todos los valores de a, b y c para los cuales el sistema $\mathcal{S}$ es compatible.

$$\mathcal{S}: \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & a \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & c \end{array}\right.$$

Ejercicio 17. Resolver el sistema para todos los valores de k.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & kx_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & k+2 \\ x_1 & + & kx_2 & - & 2x_3 & & & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3kx_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & k \end{array}\right.$$

Ejercicio 18. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales los sistemas cuyas matrices ampliadas se dan a continuación son compatibles. En cada caso, para los valores hallados, determinar si el sistema es compatible determinado o indeterminado.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right)$ *b)* $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & b \\ 0 & a+1 & a^2-1 & b+2 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & -a-1 & b \end{array}\right)$

Ejercicio 19. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales $(2,0,-1)$ es la única solución del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - bx_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 20. Hallar todos los valores de k para los cuales el conjunto de soluciones del siguiente sistema es $M = \{\lambda(1,1,0,0) + (2,0,-1,0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k^2-1)x_2 + 2x_4 = -k^2+1 \\ (k+1)x_3 + 4x_4 = -k-1 \end{cases}$$

Ejercicio 21. Encontrar todos los valores de a y b para los cuales el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right)$ tiene como conjunto de soluciones una recta.

Ejercicio 22.

a) Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos del plano son puntos, rectas o todo $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{S}_1 = \langle(0,0)\rangle \qquad \mathbb{S}_2 = \langle(1,1)\rangle \qquad \mathbb{S}_3 = \langle(1,1);(2,2)\rangle$$

$$\mathbb{S}_4 = \langle(1,0);(0,2)\rangle \qquad \mathbb{S}_5 = \langle(1,1);(-1,-1)\rangle$$

b) Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio son puntos, rectas, planos o todo $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{S}_1 = \langle(0,0,0)\rangle \qquad \mathbb{S}_2 = \langle(1,1,1)\rangle \qquad \mathbb{S}_3 = \langle(1,1,1);(2,2,2)\rangle \qquad \mathbb{S}_4 = \langle(1,0,1);(0,2,0)\rangle$$

$$\mathbb{S}_5 = \langle(1,0,1);(0,2,0);(3,5,3)\rangle \qquad \mathbb{S}_6 = \langle(1,0,1);(0,2,0);(a,b,a)\rangle$$

$$\mathbb{S}_7 = \langle(1,0,1);(0,2,0);(3,0,1)\rangle$$

Ejercicio 23. En cada caso, determinar si el vector $\mathbf{v}$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$ y, en caso afirmativo, escribir a $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los generadores dados.

a) $\mathbf{v} = (1, 2) \qquad \mathbb{S} = \langle (2, 3); (3, 4) \rangle$

b) $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{2}, 2) \qquad \mathbb{S} = \langle (2, -1, -4) \rangle$

c) $\mathbf{v} = (1, 2, 3) \qquad \mathbb{S} = \langle (-1, 1, 3); (2, 1, 0) \rangle$

d) $\mathbf{v} = (1, 2, 3) \qquad \mathbb{S} = \langle (1, 1, 1); (2, 1, 1); (1, -1, -1) \rangle$

e) $\mathbf{v} = (-1, 2, 2) \qquad \mathbb{S} = \langle (1, 2, 3); (-3, -2, -4); (0, 4, 5) \rangle$

f) $\mathbf{v} = (x, y, z) \qquad \mathbb{S} = \langle (1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0) \rangle$

Ejercicio 24. Hallar un conjunto de generadores de los siguientes subespacios.

a) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1 - 3x_2 = 0\}$

b) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_3 = 0; x_1 - x_3 = 0\}$

c) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$

d) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0; 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$

e) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 + x_2 = 0; x_1 - x_2 = 0\}$

Ejercicio 25. Hallar ecuaciones para los siguientes subespacios.

a) $\mathbb{S} = \langle (1, -3) \rangle$

b) $\mathbb{S} = \langle (1, 0, -1); (-3, 2, 1) \rangle$

c) $\mathbb{S} = \langle (2, 1, 0); (0, 1, 1); (6, 2, -1) \rangle$

d) $\mathbb{S} = \langle (1, 2, 1, 0); (1, 0, 0, 1) \rangle$

Ejercicio 26. Decidir si $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$.

a) $\mathbb{S} = \langle (2, -1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1 + 4x_2 = 0\}$

b) $\mathbb{S} = \langle (1, 2, 3); (0, 1, 0) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon 3x_1 - x_3 = 0\}$

c) $\mathbb{S} = \langle (-1, 2, 0); (1, 1, -1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

d) $\mathbb{S} = \langle (1, 1, 1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \langle (2, -3, 2)(0, 1, 0) \rangle$

e) $\mathbb{S} = \langle (1, 1, -1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \langle (1, 1, -2)(-3, 1, 1) \rangle$

f) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 = 0; x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon 3x_2 - x_3 = 0\}$

Ejercicio 27. Decidir si el conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente. En caso de que sea linealmente dependiente, escribir alguno de los vectores como combinación lineal de los otros.

a) $\{(1,-1);(-1,2)\}$

b) $\{(1,-1);(-1,2);(3,4)\}$

c) $\{(1,-1);(0,0);(-1,2)\}$

d) $\{(1,-1);(-2,2)\}$

e) $\{(3,2,-1)\}$

f) $\{(1,-2,-1);(-2,1,0);(-2,4,2)\}$

g) $\{(1,-2,-1);(-2,4,2)\}$

h) $\{(1,-2,-1);(-2,1,0);(0,3,1)\}$

i) $\{(1,1,-2);(4,0,-7);(-1,3,1)\}$

j) $\{(1,1,1);(0,1,1);(0,0,1)\}$

Ejercicio 28. Dar una base y la dimensión del subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S} = \langle(1,-1);(-1,2)\rangle$

b) $\mathbb{S} = \langle(1,-1,2);(0,0,1);(-2,2,0)\rangle$

c) $\mathbb{S} = \langle(1,-2,-1);(-2,1,0);(0,3,1)\rangle$

d) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon 3x_1 - 2x_2 = 0\}$

e) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_3 = 0; x_2 - x_3 = 0; 2x_1 + 2x_2 = 0\}$

f) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - 3x_3 = 0; x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$

Ejercicio 29. Dar una base y la dimensión de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

a) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - 2x_2 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 + x_3 = 0\}$.

b) $\mathbb{S} = \langle(1,-1,3);(2,1,-1)\rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

c) $\mathbb{S} = \langle(1,2,-1);(2,3,2)\rangle$ y $\mathbb{T} = \langle(0,1,1);(1,0,2)\rangle$.

d) $\mathbb{S} = \langle(1,0,-1);(0,1,1)\rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 + x_3 = 0; x_1 - 2x_2 = 0\}$.

e) $\mathbb{S} = \langle(2,1,1,-3);(1,0,1,-1)\rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_4 = 0\}$.

Ejercicios surtidos

1. Determinar a y b en $\mathbb{R}$ para que $(1,-1,2,-1)$ sea solución del sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & a & 2 \\ -2b & -2 & 0 & 2 & 2 \\ a & -4 & -b & 5 & 4 \end{array}\right)$. Para los valores hallados, resolver el sistema.

2. Se sabe que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Hallar alguna solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que también sea solución de $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 9$.

3. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2kx_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + 2x_2 + kx_3 = k \\ 2x_2 + kx_3 = k-2 \end{cases}$$

es una recta contenida en el plano $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4$.

4. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $\{(2,0,-3)\}$ es el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + ax_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar todos los $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tales que $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$.

6. Sean en $\mathbb{R}^4$ los sistemas

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + ax_3 = b \end{cases}$$

Hallar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tienen infinitas soluciones comunes. Para los valores hallados, encontrar todas las soluciones comunes.

7. Dadas $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a \\ a-3 \\ a+1 \end{pmatrix}$, determinar todos los valores de a para los cuales el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ es compatible.

Para alguno de los valores de a hallados, resolver el sistema y escribir a $\mathbf{c}$ como combinación lineal de las columnas de A.

8. Determinar los valores de k para los cuales $\{(0,1,-2);(1,-1,k);(2,-3,0)\}$ es linealmente dependiente.

9. En cada caso, decidir si el conjunto de vectores dado es una base del subespacio $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$.

a) $\{(1,1,0)\}$

b) $\{(2,0,-1);(-6,0,3)\}$

c) $\{(1,1,0);(1,-1,-1)\}$

d) $\{(2,0,-1);(1,-1,1)\}$

10. Dados los subespacios $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \langle (1,2,1);(2,-1,-2) \rangle$, encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$.