Práctica 7

Determinantes

Definiciones y propiedades

El *determinante* de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es un número real que se calcula a partir de los elementos de A. Se nota $\det(A)$ ó $|A|$.
Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el determinante de A es el número

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Los determinantes de matrices de 4×4 se calculan utilizando determinantes de matrices de 3×3, y, en general, los determinantes de matrices de $n\times n$ se calculan utilizando determinantes de matrices de $(n-1)\times(n-1)$.
Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$, el *menor del elemento* a_{ij}, que se nota M_{ij}, se define como el determinante de la submatriz que queda al eliminar de A la i-ésima fila y la j-ésima columna. El número $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ se conoce como *cofactor del elemento* a_{ij}.
Se define el determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como

$$\det(A) = |A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}.$$

Propiedad. Se puede obtener $\det(A)$ multiplicando los elementos de cualquier fila (o columna) por sus respectivos cofactores y sumando los productos que resulten. Es decir, para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna) y

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la i-ésima fila).

Propiedades.

- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ contiene una fila de ceros, entonces $\det(A) = 0$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz triangular, entonces $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal, es decir $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y A^t es la matriz transpuesta de A, entonces $\det(A^t) = \det(A)$.

Propiedades. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Si A' es la matriz que se obtiene cuando una sola fila de A se multiplica por una constante k, entonces $\det(A') = k\det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de A, entonces $\det(A') = -\det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de una de las filas de A a otra fila, entonces $\det(A') = \det(A)$.

Propiedades.

- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \det(kA) &= k^n\det(A) \\ \det(AB) &= \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si, y solo si, $\det(A) \neq 0$. En el caso de que A sea inversible vale $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Interpretación geométrica del determinante

Si $O = (0,0)$, $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ son tres puntos en $\mathbb{R}^2$, el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ es

$$\left|\det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}\right|.$$

Dados en $\mathbb{R}^3$ los puntos $O = (0,0,0)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $R = (r_1, r_2, r_3)$, el volumen del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ es

$$\left|\det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}\right| = |(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OR}|$$

Ejercicios

Ejercicio 1. Calcular los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$

Ejercicio 2. Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por las filas y columnas indicadas:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ por tercera fila; por primera columna.

b) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ por primera fila; por segunda fila; por cuarta columna; por tercera columna.

Ejercicio 3. Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por la fila o columna más conveniente.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

Ejercicio 4. Calcular los determinantes de las siguientes matrices usando propiedades.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Calcular $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(A^t)$, $\det(AB)$, $\det(A+B)$, $\det(A^{10})$ y $\det(A^5B - A^5)$.

Ejercicio 6.

a) Determinar todos valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A no es inversible.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 2k \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ k^2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A es inversible.

- $A = \begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k-2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ admite solución no trivial.

Ejercicio 8. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A) = 15$, calcular

a) $\det(2A)$ *b*) $\det((3A)^{-1})$ *c*) $\det(3A^{-1})$

Ejercicio 9. En cada caso, calcular el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.

a) $O = (0,0)$, $P = (1,-2)$, $Q = (3,2)$.

b) $O = (0,0)$, $P = 2(1,-2)$, $Q = 2(3,2)$.

Ejercicio 10. Sean $\mathbf{u} = (1,1,2)$, $\mathbf{v} = (4,2,1)$ y $\mathbf{w} = (3,1,1)$.

a) Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular $\det(A)$ y el volumen del paralelepípedo determinado por $A\mathbf{u}$, $A\mathbf{v}$ y $A\mathbf{w}$. ¿Qué se puede concluir?

Ejercicios surtidos

1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(AB) = 2$. Calcular $\det(B^{-1})$.

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(B) = -3$.

Hallar todas las soluciones del sistema $(BA)\mathbf{x} = -B\mathbf{x}$.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Decidir para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el sistema $(A^2 + 2A)\mathbf{x} = 0$ tiene solución no trivial.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\det(BA^{-1}) = \det\left(\frac{1}{4}BA\right)$.