Práctica 8

Introducción a las transformaciones lineales

Definiciones y propiedades

Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Una *transformación lineal* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función que satisface las dos propiedades siguientes:

TL1. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$.

TL2. Si $k \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $T(k\mathbf{v}) = k\,T(\mathbf{v})$.

Son transformaciones lineales:

- La función nula $0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dada por $0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
- La función identidad $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dada por $\mathrm{id}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedades. Cualquier transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisface:

a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

b) $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

c) $T(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})$ para $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

d) $T(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r) = a_1T(\mathbf{v}_1) + a_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_rT(\mathbf{v}_r)$ para $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^n$.

Dada una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, existe una única matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que T puede escribirse en la forma

$$T(x_1,\ldots,x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

La representación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ se llama la *expresión matricial canónica de* T y a la matriz A se la denomina la *matriz de la transformación lineal* T. Escribiremos A_T para representar esta matriz.

Teorema. Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son vectores (no necesariamente distintos) en $\mathbb{R}^m$, entonces hay una única transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \ldots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.

Geometría y transformaciones lineales en el plano

Algunas transformaciones lineales $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pueden interpretarse geométricamente.

- *Rotación* de ángulo θ en el sentido contrario al de las agujas del reloj: $A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- *Homotecia* de factor $k \in \mathbb{R}_{>0}$: $T(\mathbf{x}) = k\,\mathbf{x}$. Puede ser una *dilatación* (si $k > 1$) o una *contracción* (si $k < 1$). En este caso, $A_T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.
- *Deslizamiento cortante en la dirección x* con factor k: $A_T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- *Deslizamiento cortante en la dirección y* con factor k: $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

Imagen y preimagen de un conjunto por una transformación lineal

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ y $M \subset \mathbb{R}^m$, notamos:

$$\begin{aligned} T(\mathbb{S}) &= \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m / \ \mathbf{w} = T(\mathbf{s}) \text{ con } \mathbf{s} \in \mathbb{S}\} \ \text{(imagen de } \mathbb{S} \text{ por } T) \\ T^{-1}(\mathbf{w}) &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \ \text{(preimagen o imagen inversa de } \mathbf{w} \text{ por } T) \\ T^{-1}(M) &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \ T(\mathbf{v}) \in M\} \ \text{(preimagen o imagen inversa de } M \text{ por } T) \end{aligned}$$

Propiedades. Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $T(\mathbb{S})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.
Si $\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$, entonces $T^{-1}(\mathbb{T})$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, llamamos:

- *núcleo* de T al conjunto $\operatorname{Nu}(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$,
- *imagen* de T al conjunto $\operatorname{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m / \ \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ con } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\}$.

Observamos que $\operatorname{Nu}(T) = T^{-1}(\mathbf{0})$, $\operatorname{Im}(T) = T(\mathbb{R}^n)$.

Propiedades. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces:

a) $\operatorname{Nu}(T)$, $\operatorname{Im}(T)$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente.

b) Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^n$, $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_r)\}$ es un conjunto de generadores de $\operatorname{Im}(T)$.

c) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \mathrm{rg}(A_T)$.

Teorema de la dimensión. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces

$$\dim(\mathrm{Nu}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = n.$$

Clasificación, composición e inversa

Decimos que una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es:

- *monomorfismo* si es inyectiva, esto es, si verifica "$T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{w}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$".
- *epimorfismo* si es suryectiva, esto es, si $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^m$.
- *isomorfismo* si es biyectiva, es decir, si es monomorfismo y epimorfismo.

Propiedades. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces:

a) T es monomorfismo si y sólo si $\mathrm{Nu}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

b) Si T es monomorfismo y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente, entonces $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_r)\}$ es linealmente independiente.

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, entonces T es isomorfismo si y sólo si "Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$".

Dadas dos transformaciones lineales, $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, la composición

$$S \circ T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \text{ definida por } (S \circ T)(\mathbf{v}) = S(T(\mathbf{v})),$$

es una transformación lineal. La matriz de la composición $S \circ T$ es $A_{S \circ T} = A_S A_T$.

Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es isomorfismo, la función inversa

$$T^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ que cumple } T \circ T^{-1} = \mathrm{id} \text{ y } T^{-1} \circ T = \mathrm{id},$$

es isomorfismo. La matriz de la inversa de T es $A_{T^{-1}} = (A_T)^{-1}$.

Propiedad. Si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son isomorfismos, entonces $S \circ T$ es isomorfismo y se verifica $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Una transformación lineal $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un *proyector* si $p \circ p = p$.
Si $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un proyector, entonces para todo $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(p)$, vale $p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Son ejemplos de proyectores la proyección ortogonal sobre una recta en $\mathbb{R}^2$, o sobre un plano o una recta en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Determinar si la función T es una transformación lineal.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1,x_2) = (x_1+3,-x_2)$.

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1,x_2,x_3) = (x_1-x_2,2x_1)$.

c) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ T(x_1,x_2) = (x_1,x_2,0,0)$.

d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1,x_2,x_3) = (3x_1-x_2,x_3,2x_2)$.

e) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1^2-3x_2+x_3-2x_4,3x_1-4x_2-x_3^2+x_4)$

f) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_1+x_2,x_1+x_2+x_3,-2x_4,x_1+x_2+x_3+x_4)$

Ejercicio 2. En cada caso, hallar la expresión funcional de $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$

c) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

f) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3. En cada caso, hallar la expresión matricial canónica de T.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1,x_2) = (x_1+3x_2,x_1-x_2)$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3,x_1-x_2,2x_2+x_3)$.

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_1+x_2,x_1+x_2+x_3)$.

d) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1,x_2) = (-x_1+x_2,x_1+3x_2,x_1-x_2)$

e) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_4,x_2,x_1-x_3)$

Ejercicio 4. Decidir si existe una transformación lineal T que satisface:

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(1,-1) = (3,0),\ T(2,-2) = (0,-2)$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(1,-2,0) = (3,4),\ T(2,0,1) = (-1,1),\ T(0,4,1) = (-7,-7)$

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(1,1,1) = (2,3,4),\ T(0,1,1) = (1,2,1),\ T(1,2,2) = (1,1,5)$

d) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(1,1) = (2,1,1),\ T(1,0) = (0,2,0),\ T(5,2) = (4,8,2)$

Ejercicio 5. Hallar las expresiones funcional y matricial de la transformación lineal T.

a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,0) = (2,1,-1)$, $T(0,1,0) = (3,-1,1)$ y $T(0,0,1) = (0,0,4)$.

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(2,0,0) = (4,2,2)$, $T(0,4,0) = (1,1,1)$ y $T(0,0,3) = (0,0,-1)$.

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,-1) = (0,3,1)$, $T(1,0,1) = (2,-1,1)$ y $T(1,1,0) = (3,2,4)$.

d) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,-1) = (2,1)$ y $T(1,1) = (0,1)$.

Ejercicio 6. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$, verifica $T(1,1) = (-3,2)$.

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}\mathbf{x}$, verifica $T(1,2,1) = (-1,5,-6)$.

Ejercicio 7. Hallar la expresión matricial de la simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto a

a) el eje x *b)* el eje y *c)* la recta $y = x$ *d)* la recta $y = -x$

Ejercicio 8. Hallar la expresión matricial de la simetría en $\mathbb{R}^3$ respecto al

a) plano xy *b)* plano xz *c)* plano yz

Ejercicio 9. Hallar la expresión matricial de la proyección ortogonal en $\mathbb{R}^2$ sobre

a) el eje x *b)* el eje y

Ejercicio 10. Hallar la expresión matricial de la proyección ortogonal en $\mathbb{R}^3$ sobre *a*) el plano xy *b*) el plano xz *c*) el plano yz

Ejercicio 11. Hallar la imagen del vector $(3,-4)$ cuando se lo hace girar, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, con un ángulo de:

a) $\dfrac{\pi}{6}$ *b*) $\dfrac{\pi}{4}$ *c*) $\dfrac{\pi}{2}$ *d*) π

En cada caso, dar la expresión matricial de la rotación correspondiente al ángulo dado.

Ejercicio 12. Hallar la expresión matricial de la rotación de ángulo

a) $\dfrac{\pi}{6}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje x.

b) $\dfrac{\pi}{4}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje y.

c) $\dfrac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj con respecto al eje z.

Ejercicio 13. Hallar la expresión matricial de la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ que produce un deslizamiento cortante con un factor de

a) $k=4$ en la dirección y. *b*) $k=-2$ en la dirección x.

Ejercicio 14. Hallar la expresión matricial de la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ que produce

a) una dilatación de factor $k=2$.

b) una contracción de factor $k=\dfrac{1}{2}$.

c) una dilatación de factor $k=2$ en la dirección x.

d) una contracción de factor $k=\dfrac{1}{2}$ en la dirección y.

Ejercicio 15. Hallar la imagen del cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$, es decir el cuadrado con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$, por las transformaciones lineales de los ejercicios 7, 9, 11, 13 y 14.

Ejercicio 16. Hallar la imagen del rectángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ y $(0,2)$ bajo

a) una simetría con respecto a la recta $y=x$.

b) una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

c) una contracción con factor $\dfrac{1}{2}$ en la dirección y.

d) una dilatación con factor 3 en la dirección x.

e) un deslizamiento cortante con factor 2 en la dirección x.

f) un deslizamiento cortante con factor 1 en la dirección y.

Ejercicio 17. Hallar una base de la imagen $T(\mathbb{S})$ del subespacio $\mathbb{S}$ por la transformación lineal T. Interpretar geométricamente.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, y $\mathbb{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \ x_1 - x_2 = 0 \right\}$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, para

(I) $\mathbb{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$ (II) $\mathbb{S} = \langle (1,2,0) \rangle$

Ejercicio 18. Hallar la preimagen $T^{-1}(M)$ del conjunto M por la transformación lineal T. Interpretar geométricamente.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = (8x_1, 3x_1 - x_2)$, para

(I) $M = \{(1,2)\}$ (II) $M = \langle (1,1) \rangle$

b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, para

(I) $M = \{(3,k)\}$, $k \in \mathbb{R}$. (II) $M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \ x_1 + x_2 = 0 \right\}$

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = (x_1 - x_3, x_2, x_2)$, para

(I) $M = \{(-2,1,2)\}$ (II) $M = \langle (-2,1,2) \rangle$ (III) $M = \langle (2,1,1) \rangle$

d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, para

(I) $M = \{(2,-1,3)\}$ (III) $M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(II) $M = \langle (2,-1,3) \rangle$

Ejercicio 19. Sean $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3)$, $\mathbf{w} = (2, 3)$, $\mathbb{S} = \langle (1, 2, 1) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \ 3x_1 - 2x_2 = 0\}$. Hallar $T(\mathbb{S})$, $T^{-1}(\mathbf{w})$ y $T^{-1}(\mathbb{T})$.

Ejercicio 20. Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de T.

a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_2 + x_3)$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 0, x_2 + 2x_3)$

c) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, x_2 + 2x_4, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4)$

d) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, -x_2 + x_4, x_4)$

Ejercicio 21. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal con matriz $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcular $T(1, 0, -2)$ y $T(0, 0, 1)$.

b) Dar bases de $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

c) Calcular $T^{-1}(-1, 1, -2)$.

Ejercicio 22. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal con matriz $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 13 & 5 \end{pmatrix}$.
Calcular la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$.

Ejercicio 23. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2k^2, 2, 3k) \in \mathrm{Im}(T)$.

Ejercicio 24. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T(0, 0, 2) = (1, -2, -1)$, $T(0, 1, -1) = (3, -2, 0)$ y $T(2, 1, 0) = (1, 2, 2)$.

a) Calcular $T(0, 2, -1)$.

b) Hallar una base de $\mathrm{Im}(T)$ y una base de $\mathrm{Nu}(T)$.

Ejercicio 25. Para cada una de las transformaciones lineales T del ejercicio 3, calcular $\mathrm{rg}(A_T)$, $\dim(\mathrm{Im}(T))$ y $\dim(\mathrm{Nu}(T))$. Decidir cuáles son monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 26. En cada caso, definir, si es posible, una transformación lineal que verifique las condiciones enunciadas.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(T) = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 + 2x_2 = 0\}$, $\mathrm{Im}(T) = \langle (1,0) \rangle$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = 0\}$

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $(1,1,2) \in \mathrm{Nu}(T)$, $\mathrm{Im}(T) = \langle (1,0,1), (2,1,0) \rangle$

d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(1,0,1) \in \mathrm{Nu}(T)$ y T es epimorfismo

e) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{Im}(T)$

f) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(T) \subset \mathrm{Im}(T)$ y $T(3,2,1) = T(-1,2,0) \neq 0$

Ejercicio 27. Sean $\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 / \, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; x_1 - 3x_3 = 0\}$, $\mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / \, 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0\}$, $\mathbb{T}_1 = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$ y $\mathbb{T}_2 = \langle (2,1,3), (0,0,1) \rangle$. Hallar una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique simultáneamente: $T(\mathbb{S}_1) \subseteq \mathbb{T}_1$, $T(\mathbb{S}_2) \subseteq \mathbb{T}_2$ y $\mathrm{Nu}(T) \neq \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 28. Sean las transformaciones lineales $T_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_1(x_1,x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$ $T_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, y $T_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A_{T_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar las expresiones matriciales de $T_1 \circ T_1$, $T_2 \circ T_3$ y $T_3 \circ T_2$.

Ejercicio 29. Hallar $S = T_2 \circ T_1$, $T = T_1 \circ T_2$ y determinar el núcleo y la imagen de T_1, T_2, S y T.

a) $T_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T_1(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_1 + x_2 - x_3)$;
$T_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(x_1,x_2) = (x_1 - x_2, x_1, x_2)$.

b) $T_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T_1(0,0,1) = (0,-1,1)$, $T_1(0,1,1) = (1,0,1)$ y $T_1(1,1,1) = (1,1,0)$;
$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_2(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + x_3, x_2 - x_3, 2x_1 + x_2)$.

Ejercicio 30. Encontrar la matriz para la composición de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ que se indica.

a) Una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una simetría con respecto a la recta $y = x$.

b) Una proyección ortogonal sobre el eje y seguida de una contracción con factor $k = \dfrac{1}{2}$.

c) Una simetría con respecto al eje x seguida de una dilatación con factor $k = 3$.

d) Una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{3}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una proyección ortogonal sobre el eje x, seguida de una simetría con respecto a la recta $y = x$.

e) Una dilatación de factor $k = 2$ seguida de una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ en sentido contrario a las agujas del reloj seguida de una simetría con respecto al eje y.

f) Una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{12}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj seguida de una rotación de ángulo $\dfrac{7\pi}{12}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj, seguida de una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{3}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Ejercicio 31. Encontrar la matriz para la composición de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ que se indica.

a) Una simetría con respecto al plano yz seguida de una proyección ortogonal sobre el plano xz.

b) Una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto del eje y seguida de una dilatación de factor $k = \sqrt{2}$.

c) Una proyección ortogonal sobre el plano xy seguida de una simetría con respecto al plano yz.

d) Una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{6}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje x seguida de una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{6}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje z seguida de una contracción con factor $k = \dfrac{1}{4}$.

e) Una simetría con respecto al plano xy seguida de una simetría con respecto al plano xz seguida de una proyección ortogonal sobre el plano yz.

f) Una rotación de ángulo $\dfrac{3\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje x seguida de una rotación de ángulo $\dfrac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje y, seguida de una rotación de ángulo π en sentido contrario al de las agujas del reloj respecto al eje z.

Ejercicio 32. Hallar la función inversa del isomorfismo T.

a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,-1) = (1,-1,1)$, $T(2,0,1) = (1,1,0)$ y $T(0,1,0) = (0,0,1)$.

b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1, x_1 - x_2)$.

c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

Ejercicio 33. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal con matriz $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & k & -3 \end{pmatrix}$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que T es monomorfismo.

Ejercicio 34. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $T(1,1,1) = (1,1,2)$, $T(1,2,0) = (-1,1,1)$ y $T(1,0,0) = (0,1,1+k)$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathrm{Nu}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Ejercicio 35. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

a) Calcular $T \circ T(3,0,0)$, $T \circ T(1,-2,0)$ y $T \circ T(0,0,1)$.

b) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(T \circ T)$ y de $\mathrm{Im}(T \circ T)$.

Ejercicio 36. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \ x_1 - x_2 - x_3 = x_1 + x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \ 2x_1 - x_2 = 0\}$. Definir una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique simultáneamente $\mathrm{Nu}(T) = \mathbb{S}$ y $\mathrm{Nu}(T \circ T) = \mathbb{T}$.

Ejercicio 37. Determinar si la transformación lineal p es un proyector.

a) $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$

b) $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $p(x_1, x_2) = (x_2, 0)$

c) $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $p(x_1, x_2) = (2x_1 - 2x_2, x_1 - x_2)$

d) $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $p(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2, x_1 - x_2, 0)$

Ejercicio 38. Definir un proyector p tal que *a)* $p:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Nu}(p) = \langle(-1,2)\rangle$, $\mathrm{Im}(p) = \langle(-1,1)\rangle$.

b) $p:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Nu}(p) = \langle(1,1,-2)\rangle$. ¿Es único?

c) $p:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Nu}(p) = \langle(2,-1,3)\rangle$, $\mathrm{Im}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \, 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$. Interpretar geométricamente.

Ejercicio 39. Hallar la imagen del cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$ por la transformación lineal T y calcular su área. Graficar.

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2) = (2x_1, 3x_2)$

b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$

Ejercicio 40. Hallar la imagen del cubo unitario de $\mathbb{R}^3$ por la transformación lineal T y calcular su volumen.

a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1, 3x_2, 5x_3)$

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1,x_2) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$

Ejercicios surtidos

1. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que satisface: $T \circ T = 0$, $T(1,0,0) = (1,2,2)$ y $(0,0,1) \in \mathrm{Nu}(T)$. Hallar la expresión matricial de T.

2. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $A_T = \begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, y sea $\mathbf{v} = (0,5,1)$. Determinar $k \in \mathbb{R}$ de modo que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$ y, para el valor k hallado, decidir si $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(T)$.

3. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & k \\ -8 & k & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathrm{Nu}(T) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(T) \subseteq \mathrm{Im}(T)$.

4. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, 3x_2 - x_3)$. Definir un proyector $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T \circ p = 0$.

5. Sean $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ las transformaciones lineales dadas por $S(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_1 + x_2, x_2 - x_3)$ y $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar $(T \circ S)^{-1}(\langle(1,1,1)\rangle)$.

6. Sean $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$, y $\mathbb{S} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\right\}$.
Decidir si $T \circ T(9,7,2) \in \mathbb{S}$.