Práctica 10: Aplicaciones de la Integral

Ejercicio 1 Calcule el área de la región comprendida entre los gráficos de las siguientes curvas:

a) $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ g(x) = x - 2\ ,\ x = 0$

b) $f(x) = x\ ,\ g(x) = x^2 + 1\ ,\ x = 0\ ,\ x = 3$

c) $f(x) = x^3 - 12x\ ,\ g(x) = x^2$

d) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$, eje x

e) $f(x) = -x\ ,\ g(x) = x - x^2$

f) $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$, eje x , eje y

g) $f(x) = \operatorname{sen} x$, eje x , $x = 0,\ x = 2\pi$

h) $f(x) = x^2 - 4$, eje x

i) $f(x) = x^3$, eje y , $y = 27$

j) $f(x) = e^x$, $y = \ln 5$, eje y

k) $f(x) = \ln x$,eje x, $x = \dfrac{1}{e},\ x = e$

Ejercicio 2 Determine $c > 1$ de modo que el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = e^{2(x-5)}$ y $g(x) = e^{-2(x-5)}$ y la recta de ecuación $y = c$ sea igual a 1.

Ejercicio 3 El área de la región limitada por los rectas $y = ax$, $y = a^2$ y el gráfico de $f(x) = x^2$ es igual a $\dfrac{7}{48}$. Calcule el valor de a.

Ejercicio 4 Determine el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ y las dos rectas que unen el origen de coordenadas con los puntos del gráfico $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$, respectivamente.

Ejercicio 5 Marque la única respuesta correcta: el área de la región del plano limitada por $y = x - 2$, $x = 4$, el eje x y el eje y se obtiene calculando:

☐ $\displaystyle\int_0^4 (x-2)\,dx$ ☐ $\displaystyle\int_0^4 (2-x)\,dx$

☐ $\displaystyle\int_0^2 (x-2)\,dx + \int_2^4 (2-x)\,dx$ ☐ $\displaystyle\int_0^2 (2-x)\,dx + \int_2^4 (x-2)\,dx$

Ejercicio 6 Halle f que satisfaga $f'(x) + 2xf(x) = 0$ y $f(0) = 3$.

Ejercicio 7 Encuentre las funciones que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $(3+\sqrt{x})(f(x)+2)^2 f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f(4) = 1$

b) $f'(x) + 2xf(x) = 0$, $f(0) = 3$

c) $f'(x) = (x^2e^x - \operatorname{sen} x)f^2(x)$, $f(0) = 4$

d) $(1+x^2)f'(x) = 8xf(x)$, $f(0) = 3$

e) $f'(x) = 7x^5(3 + f(x))$, $f(1) = -2$

f) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = xe^x$, $f(0) = 4$

Ejercicio 8 La temperatura de un cuerpo que se enfría, cambia a una tasa que es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente. Así, si $C(t)$ es la temperatura del cuerpo en el tiempo t y a es la temperatura ambiente (a la que supondremos constante) se tiene

$$C'(t) = -k(C(t) - a)$$

en donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad.

a) Halle todas las soluciones de la ecuación en términos de k, a y la temperatura inicial $C(0) = C_0$.

b) Pruebe que $C(t) \to a$ cuando $t \to +\infty$.

c) Si un cuerpo inicialmente está a $26°$ y una hora después está a $24°$, ¿cuál es la constante de proporcionalidad si la temperatura ambiente es de $22°$?.

Formulas útiles:

$$\text{Volumen del sólido de revolución} = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

$$\text{Longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Ejercicio 9 Halle el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje x la parábola $y = 3x^2$, con $0 \leq x \leq 3$.

Ejercicio 10 Halle el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje x el gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, con $1 \leq x \leq 4$.

Ejercicio 11 Calcule la longitud del arco de las siguientes curvas:

a)$y = 2x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq 11$ *b)* $y = \dfrac{x^2 - \ln x}{2}$, $1 \leq x \leq 2$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Calcule el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x - 5\right)$ para $11 \leq x \leq 16$.

Ejercicio 2 Calcule el área de la región limitada por el eje de las x y por los gráficos de $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = 1 - 4x^2$.

Ejercicio 3 Halle el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ y $g(x) = \dfrac{x}{x + 7}$.

Ejercicio 4 Calcule el área de la región encerrada entre el gráfico de $f(x) = x(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 4)$ y el eje x.

Ejercicio 5 Calcule el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = 4x + 5 - e^{3x}$ y de $g(x) = 4x - 3$ para $0 \leq x \leq \ln 6$.

Ejercicio 6 Calcule el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = xe^{2x}$ y $g(x) = xe^{x+3}$.

Ejercicio 7 Calcule el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de $f(x) = (x^2 - 5)\ln x$ para $e^{-1} \leq x \leq e$.

Ejercicio 8 Halle el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = \dfrac{9}{x} + \dfrac{9}{10 - x}$ y la recta $y = 10$.

Ejercicio 9 Calcule el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 3x \ln x$ y $g(x) = (x+8)\ln x$.

Ejercicio 10 Halle f derivable que satisface

$$(3 + f'(x))e^{2-x} = (x-6)(3x + f(x))^2 \text{ con } f(2) = 0.$$

Ejercicio 11 Sea f una función positiva con derivada continua que satisface

$$(x^3 + x^2)f(x) = 2\int_0^x tf(t)\, dt \quad , \quad f(0) = 5$$

Halle $f(x)$ para $x > 0$.

Ejercicio 12 Halle la función f derivable tal que para $x > 0$ vale

$$f'(x)\sqrt{x} = \left(3x + e^{(2\sqrt{x}-6)}\right) f(x) \text{ y } f(9) = 1.$$

Ejercicio 13 Halle f verificando:

$$f''(x) = 9\sqrt{x} + \cos(\pi x) \text{ y } f(1) = f'(1) = 0.$$

Ejercicio 14 Halle $f \neq 0$ que satisfaga $f^2(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\frac{\operatorname{sen}(t)}{4+\cos(t)}\, dt.$

Ejercicio 15 Encuentre una función continua f tal que

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\, dt.$$

Ejercicio 16 Para cada n natural se define $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(nx)\, dx.$ Calcule a_n.