Práctica 11: Series

Ejercicio 1 Escriba el término general de las siguientes series

a) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-...$

b) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{31}+...$

c) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+...$

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+..$

En los casos que la serie sea geométrica o telescópica, escriba la expresión de las sumas parciales y calcule la suma de la serie.

Ejercicio 2 Calcule la suma de las siguientes series, en caso de que sean convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^{n+1}}{5^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}-1}{4^{n+1}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$

e) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

Ejercicio 3 Calcule el valor de $a>0$ para que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2^n}{a^n}=\frac{35}{12}$.

Ejercicio 4 A partir de la identidad $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$, deduzca las siguientes fórmulas:

a) $1+x^2+x^4+...+x^{2n}+...=\dfrac{1}{1-x^2}$, $|x|<1$

b) $x+x^3+x^5+...+x^{2n+1}+...=\dfrac{x}{1-x^2}$, $|x|<1$

c) $1-x+x^2-x^3+x^4+...+(-1)^nx^n+...=\dfrac{1}{1+x}$, $|x|<1$

d) $1+2x+4x^2+...+2^nx^n+...=\dfrac{1}{1-2x}$, $|x|<\dfrac{1}{2}$

Ejercicio 5 Decida si cada una de las siguientes series es convergente o divergente:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{4n^4+5n-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen}^3(n)}{2^n+n^2}$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

Ejercicio 6 Use el criterio integral de Cauchy para estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$

Ejercicio 7 Use el criterio de la raíz o del cociente, según convenga, para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-\frac{1}{2}\right)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n 2}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Ejercicio 8 Determine la convergencia o divergencia de las series que siguen. En caso de convergencia, decida si ésta es absoluta o condicional.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+1)}{n^3+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n+5n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Ejercicio 9 Sea $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^3} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$. Pruebe que la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ es absolutamente convergente.

Ejercicio 10 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales cada una de las siguientes series es convergente. Indique para qué valores la convergencia es absoluta y para qué valores la convergencia es condicional.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{x^{2n}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2} x^{2n+1}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{3n+1}}{n^5}$

Ejercicio 11 Halle el radio de convergencia de las series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+3}$

Ejercicio 12 En cada una de las siguientes series, encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales es convergente. Indique para qué valores la convergencia es absoluta y para qué valores la convergencia es condicional.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{2n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{2n}}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{3^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2}\right) x^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^2+1} x^{2n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) x^{2n+1}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-2)^n$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{n^2 \ln n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)^n}{n}(x-2)^n$ tiene radio de convergencia igual a 2?

Ejercicio 2 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (3x-1)^n$ es convergente. Para los valores hallados, encuentre la suma de la serie.

Ejercicio 3 Halle los valores de $p > 0$ tales que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\sqrt{n^7+1}}$ es convergente.

Ejercicio 4 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes series son convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^2}{8^n} (x-3)^{3n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n)^n} x^{3n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(3n+4)(5^n+1)}(3x-6)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(x-5)^n}{(n+1)(n+4)}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^n}(x-3)^{n+1}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{\sqrt{9^n+1}}(x-7)^n$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^n\sqrt{n^2+3}}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(x-5)^n}{3^n\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+2)^{n+1}}{3^n}$

Ejercicio 5 Halle el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{4}{n}\right)^{n^2} (x-7)^n$.

Ejercicio 6 Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-4)^n}{a^n\sqrt{2n+1}}$ hallar $a>0$ para que el radio de convergencia sea igual a 2. Para el valor de a hallado, encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie es convergente.