Práctica 3: Sucesiones

Ejercicio 1 Dadas las sucesiones

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \qquad b_n = \frac{2^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

$$c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \qquad d_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}$$

Calcule a_9 ; b_5 ; c_3 ; d_{11}.

Ejercicio 2 Para cada una de las siguientes sucesiones, proponga el término general a_n y clasifique las mismas en convergentes o divergentes.

a) $1,\ 2,\ 3,\ 4, ...$

b) $-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4}, ...$

c) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4}, ...$

d) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{16}, ...$

e) $-1,\ 2,\ -3,\ 4, ...$

f) $0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{4}, ...$

g) $1,\ -1,\ 1,\ -1, ...$

h) $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4}, ...$

i) $1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3...$

Ejercicio 3 Sea $a_n = \dfrac{n}{n+10,5}$. Decida por la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

b) $a_n > 0,9$ para casi todo n.

c) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} = 1$

d) La sucesión está acotada superior e inferiormente.

Ejercicio 4 Sea $b_n = \dfrac{(-1)^n + 2}{n}$. Calcule:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *b)* $\sup\{b_n /\ n \in \mathbb{N}\}$ *c)* $\inf\{b_n /\ n \in \mathbb{N}\}$

Ejercicio 5 Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{2n}{n+1}\right)^3$

b) $b_n = \dfrac{3n^2+2}{2n^2+5n}$

c) $c_n = \dfrac{3n^2+2}{2n^3+5n}$

d) $d_n = \dfrac{-4n^3+2n^2-3n-1}{5n^2+4}$

e) $e_n = \dfrac{\sqrt{n^3}+2}{n^2-1}$

f) $f_n = \sqrt{\dfrac{4n^2-1}{9n^2+2}}$

g) $g_n = \dfrac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n}$

Ejercicio 6

Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \dfrac{n^2-5n+7}{n+3} + \dfrac{n^2+5}{n+1}$

b) $b_n = \dfrac{n^2-5n+7}{n+3} - \dfrac{n^2+5}{n+1}$

c) $c_n = \sqrt{n^2+n-2} + n$

d) $d_n = \sqrt{n^2+n-2} - n$

e) $e_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-n-3}$

f) $f_n = \sqrt{\dfrac{2n^2-1}{3n^2+2}} + \dfrac{3n-1}{2n+3}$

g) $g_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

h) $h_n = n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

i) $i_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1} - n}$

j) $j_n = \sqrt{n}(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n})$

Ejercicio 7 Muestre que cada una de las siguientes situaciones constituye una indeterminación. Para ello exhiba por lo menos dos ejemplos donde los límites sean distintos (finitos o infinitos). Suponga, cuando haga falta, condiciones suficientes para que las sucesiones estén bien definidas.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$ ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.b_n$.

Ejercicio 8

a) Marque la única respuesta correcta: si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y b_n es acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$

☐ oscila ☐ tiende a más infinito ☐ es una indeterminación ☐ está acotada.

b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4}{n+1} + \cos n$

c) Marque la única respuesta correcta: si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

☐ es igual a 0 ☐ tiende a más infinito ☐ es una indeterminación ☐ no existe

d) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n} - 1}{n^2+1}$

Ejercicio 9 Calcule, si existen, los siguientes límites

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n + 5}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2+(-1)^n)\,\mathrm{sen}\, n}{n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (1,5)^n$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+5}{3^n}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} (3+\operatorname{sen} n)(0,8)^n$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} (0,9)^n(1,1)^{n+1}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+4^{n+1}+2}{2^{2n}+2^n}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3n^3+2n^2+1}{n^2+2}}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{3n+1}}$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+2}{5n^2+3}\right)^{1/n}$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+2^n}$

Ejercicio 10 Muestre que las siguientes situaciones constituyen una indeterminación. Para ello exhiba por lo menos dos ejemplos donde los límites sean distintos (finitos o infinitos). Suponga, cuando haga falta, condiciones suficientes para que las sucesiones estén bien definidas.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^{a_n}$

Ejercicio 11 Calcule, si es posible, los siguientes límites

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)^{n-1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{17}{n}\right)^{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+1}{3n-5}\right)^{n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+1}{3n-5}\right)^{n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+2n+1}{3n^2-5}\right)^{\frac{n^2+2}{2n+1}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{\operatorname{sen} n}{n^2}\right)^{n}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{\cos n}{5n^3+1}\right)^{2n^2+3}$

Ejercicio 12 Calcule, si es posible, los siguientes límites

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{n}\right)^{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1}+\cos n}{2.\,9^n+\operatorname{sen} n}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3.\,2^n+n}{2^{n+1}+n^3}$

Ejercicio 13 Calcule, si existen, los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{n!}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{n!}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n!}{3^n+5n!}$

Ejercicio 14 En cada caso, la sucesión a_n se encuentra sujeta a las condiciones indicadas. Calcule, cuando sea posible, su límite.

a) $2-\dfrac{3}{2^n} < 5-2a_n < 1+\sqrt[n]{n}$

b) $\dfrac{1}{a_n} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

c) $0 < 3a_n+2 < \dfrac{2^n n!}{n^{2n+1}}$

d) $2a_n+6 > \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}-1}$

Ejercicio 15 Usando subsucesiones, pruebe que cada una de las siguientes sucesiones carece de límite:

a) 0, 1, 2, 0, 1, 2, ...

b) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

c)

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 2+\dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejercicio 16 Se sabe que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$. Calcule

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_{2n}-a_{3n})$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Ejercicio 17 Considere la sucesión definida recurrentemente como

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2\, a_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

a) Calcule el cociente de D$'$ Alembert. A partir del mismo, concluya que la sucesión es creciente.

b) Muestre que $a_n = 2^{n-1},\ n \geq 1.$

Ejercicio 18 Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones dadas en forma recurrente:

a) $a_1 = 5,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{3n}.$

b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{n^n + 3^n}{n!} a_n.$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{n+1} + (-1)^n \frac{n^5 + \cos n}{2 - 6^n} \right)$$

Ejercicio 2 Sean $a_n = n(0,95)^n$ y $b_n = \dfrac{(1,02)^n}{\sqrt{n}}$. Calcule

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)(b_n).$

Ejercicio 3 Muestre que el valor del $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{b}{n^2}\right)^{n^2}$ no depende de la constante b.

Ejercicio 4 Sea a_n una sucesión definida en forma recurrente como :

$$a_1 = 5, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{5n}.$$

Se define $b_n = n^2\, a_n$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Ejercicio 5 Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ sabiendo que $0 < 5 - 3a_n \leq 7^n \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{n^2}$

Ejercicio 6 Halle los valores de a y b para que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^6 + 3bn^4 + 2\sqrt{n}}{5n^4 - 3n + 4} = 4.$$

Ejercicio 7 Se definen $a_n = (-1)^n \dfrac{3n-1}{7n+2}$ y $b_n = (a_n)^2$.

$a)$ Pruebe por medio de subsucesiones que a_n no tiene límite.

$b)$ Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Ejercicio 8 Halle todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la sucesión $a_n = \dfrac{x^{2n+1}}{n^3\ 4^{n+1}}$ es convergente. Para los x hallados calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ejercicio 9 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n n^2 + n}.$$

Ejercicio 10 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+7n^2}{5+n^2} + \sqrt{n^2+6n+17} - \sqrt{n^2+17} \right).$$

Ejercicio 11 Calcule, si existe, el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n^4+2n^2}{n^4+n^2+1} \right)^{3n^2} + \frac{\operatorname{sen}(n^4+2n^2)}{3n^2} \right]$$

Ejercicio 12 Sea $a_n = \dfrac{\cos(3n) + n!}{n + 2^n}$. Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3a_n+5}{2a_n+7}$.

Ejercicio 13 Sea a_n tal que $5n - 6n^2 - 7 < 4n^2 a_n < \dfrac{n^3 + n^2 3^n}{n!} - 6n^2$. Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ejercicio 14 Halle $a \in \mathbb{R}$ para que el $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n^3+a}{5n^3+3} \right)^{4n^3} = e^3$.

Ejercicio 15 Si la sucesión a_n satisface $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$ y $a_n > 4$, calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{12+a_n} - \sqrt{4a_n}}{(a_n)^2 - 2a_n - 8}$.

Ejercicio 16 Sea $a_n = \left(\frac{5n+8}{5n+3}\right)^n \frac{n^5+1}{n^4+1}$. Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(5a_n)}{\sqrt{a_n}}$.

Ejercicio 17 Sea a_n tal que $\left(\frac{2n+11}{2n+3}\right)^n \leq 2a_n - 6 \leq e^7 + \frac{\cos(9n)}{4^n}$. Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.