

## Práctica 4: Límites y Continuidad

**Ejercicio 1** Calcule los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 10x + 1)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{(x-10)(x+4)} - x \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 5}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - x}{x + 5}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| + 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-4x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 6}}{5x - 1}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{1}{x} \right)$$

**Ejercicio 2** Calcule, si es posible, los límites cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = -3x^5 + x^2 - 1$$

$$f) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - x$$

$$b) f(x) = \sqrt{9 + x^2}$$

$$g) f(x) = \frac{e^{x+1} + 4}{3 - 2e^x}$$

$$c) f(x) = \sqrt{1 - x}$$

$$h) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x - 1}$$

$$i) f(x) = e^{1/x}$$

$$e) f(x) = \frac{x^3 - 5x^2}{x + 3}$$

$$j) f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$

**Ejercicio 3** Calcule, si se puede, los límites en el infinito, además de los límites en los puntos que se indican:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad x = 0^+, x = 0^-$$

$$b) f(x) = \frac{2x + 1}{x + 3}, \quad x = -3^+, x = -3^-$$

$$c) f(x) = \frac{5x^2}{x+3}, x = -3^+, x = -3^-$$

$$d) f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}, x = -1^+$$

$$e) f(x) = e^{1/x}, x = 0^+, x = 0^-$$

$$f) f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}, x = 0^+, x = 0^-$$

$$g) f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}, x = 1, x = -1^+, x = -1^-$$

$$h) f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}, x = 1^-, x = -1^+$$

**Ejercicio 4** En cada una de las siguientes funciones calcule, además del límite que se indica, los límites cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - 2}{x^3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x^2 - x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{4x - 12}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{20}}{e^x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{x^2 - 2x - 3}{4x - 12} \right) \frac{2}{x - 3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 1}{x - 2} - \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} \right)$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \left( 2 + \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) \right)$$

**Ejercicio 5** Calcule los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x+6)}{x+2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen} 3x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x)}{x^2}$$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x\pi)}{\operatorname{sen}(3x\pi)}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 4 \operatorname{sen}(2x)}{x^2 + 5 \operatorname{sen} x}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x\pi)}{x - 1}$

**Ejercicio 6** Calcule los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x^2 + 1}{x + 1}}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3x + 2}{5x - 2}\right)^{\frac{1}{x - 2}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x + 1}{3x + 4}\right)^{\frac{2x^2 + 1}{x - 3}}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(1 + \frac{3}{x + 1}\right)^{\frac{x^2}{2x + 1}}$

c)  $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + 3t)^{1/t}$

h)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h + 2) - \ln 2}{h}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}$

i)  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3x + 2}{5x - 2}\right)^{\frac{1}{x - 2}}$

j)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{e^x - 1}$

**Ejercicio 7** Marque la única respuesta correcta:

a) El  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

no existe     es igual a 1     es igual a 0     es infinito

b) El  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + ax + 1} - 1}{x} = 2$  para

ningún valor de  $a$       $a = 4$       $a = 0$      todo  $a$

**Ejercicio 8** Determine los puntos de discontinuidad de las funciones dadas a continuación. Vea si en esos puntos la discontinuidad es evitable.

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} & \text{si } x > 7 \\ 0 & \text{si } x \leq 7. \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

$$d) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x(x-\pi)}$$

$$e) f(x) = \frac{x^2}{1-\cos x}$$

**Ejercicio 9** En cada caso determine el o los valores de la constante  $a$  para los cuales las funciones resulten continuas.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \geq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x < 2. \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ 3x + a & \text{si } x \leq -1. \end{cases} \quad d) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 5x + a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

**Ejercicio 10** Muestre que las siguientes funciones tienen una discontinuidad evitable en los puntos señalados

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} & \text{si } x \neq 5, x \geq -4 \\ 0 & \text{si } x = 5. \end{cases}, \text{ en } x = 5$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4} & \text{si } x \neq 9, x \geq -7 \\ 0 & \text{si } x = 9. \end{cases}, \text{ en } x = 9$$

### Ejercicio 11

a) Demuestre que la ecuación  $x^3 - 3x + 1 = 0$  tiene al menos una solución en el intervalo  $(-1, 1)$ . Encuentre un intervalo de longitud  $0,2$  o menor que contenga dicha solución.

b) Demuestre que la ecuación  $x^2 = \sqrt{x+1}$  tiene al menos una solución. Encuentre un intervalo de longitud  $1$  o menor que la contenga.

**Ejercicio 12** Pruebe que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución real. En cada caso encuentre un intervalo de longitud 1 o menor que contenga a una de ellas.

a)  $2x - 1 = \cos x$

d)  $\frac{x}{x^4 + 1} = 0, 2$

b)  $x^{11} + x^2 + 1 = 0$

e)  $\frac{x^2 + 1}{x + 2} + \frac{x^4 + 1}{x - 3} = 0$

c)  $\ln x = -3x$

**Ejercicio 13** Para cada una de las siguientes funciones determine ceros, puntos de discontinuidad. A partir de ellos, halle el conjunto donde la función es positiva.

a)  $f(x) = x^2(x + 3)(x - 2)$

c)  $f(x) = x \ln x$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

d)  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x + 5}$

### PROBLEMAS VARIOS

**Ejercicio 1** Sea  $f(x) = \frac{2x^4}{x^3 + 1}$ . Halle los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ .

**Ejercicio 2** Determine en cada caso el valor de la constante  $a$ :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 4x + 1} - 1}{x} = 5$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + ax - 1} - \sqrt{x^3 + ax - 1}}{x - 1} = 2$

**Ejercicio 3** Sea  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(ax)}{4x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Halle  $a \in \mathbb{R}$  para que  $f$  sea continua en  $x = 0$ .

**Ejercicio 4** Sea  $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(ax) - 1}{2 \operatorname{sen} x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pruebe que  $f$  es continua en  $x = 0$  cualquiera sea  $a \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 5** Sea  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + 3 - 3 \cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Halle  $a \in \mathbb{R}$  para que  $f$  sea continua en  $x = 0$

**Ejercicio 6** Sea  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 6\sqrt{x}}{x - 4} & \text{si } x > 4 \\ a & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$

Halle  $a \in \mathbb{R}$  para que  $f$  sea continua en  $x = 4$ .

**Ejercicio 7** Halle los límites en  $+\infty$  y en  $-\infty$  de las siguientes funciones. Además calcule, si existe, el límite en los puntos indicados

a)  $f(x) = \frac{10e^{2x}}{5e^{2x} + 3x^2}$       c)  $g(x) = \frac{4e^{-x^2}}{x^2 - 16}$ ,  $x = 4$ ,  $x = -4$ .

b)  $h(x) = \sqrt{x - 2} e^{-4(x-2)^2} - \frac{\text{sen } 5x}{x}$ ,  $x = 0$ .