Práctica 5: Derivada

Ejercicio 1 Justifique, por medio de los cocientes incrementales, las siguientes igualdades

a) $f(x) = 7 \Longrightarrow f'(x) = 0$

b) $f(x) = 3x + 5 \Longrightarrow f'(x) = 3$

c) $f(x) = (x+1)^2 \Longrightarrow f'(4) = 10$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f'(2) = -\dfrac{1}{4}$

e) $f(x) = \sqrt{x+5} \Longrightarrow f'(4) = \dfrac{1}{6}$

Ejercicio 2 Halle, usando el cociente incremental, el valor de la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Escriba la ecuación de la recta tangente en esos mismos puntos,

a) $f(x) = 4x + 7,$ en $x = 3$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x-1},$ en $x = 5$

c) $f(x) = \sqrt{x+12},$ en $x = 13$

d) $f(x) = x + \ln(x),$ en $x = 1$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \end{cases}$ en $x = 1$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

Ejercicio 3 ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ la recta tangente es paralela al eje de las x?

Ejercicio 4 Sean $f(x) = 3x^2 + x$ y $g(x) = 5x + 2$. Encuentre el punto en el cual las rectas tangentes de f y g resultan paralelas. Halle las correspondientes ecuaciones.

Ejercicio 5 Usando las reglas de derivación, halle las derivadas de las siguientes funciones en su dominio de definición.

a) $f(x) = x^3 + x^2 + \operatorname{sen}(x)$

b) $f(x) = x^2 \cos(x)$

c) $f(x) = 3 \operatorname{sen}(x)$

d) $f(x) = x \ln(x)$

e) $f(x) = x^5 + \dfrac{1}{x}$

f) $f(x) = e^x + \ln(x)$

g) $f(x) = x\,\text{sen}(x) + e^x \cos(x)$

h) $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$

i) $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$

j) $f(x) = (x+2)(x^2+1)\ln(x)$

k) $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2+1}$

l) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

Ejercicio 6 Usando la regla de la cadena, halle las derivadas de las siguiente funciones en su dominio de definición

a) $f(x) = (1+x)^2$

b) $f(x) = (1+x)^3$

c) $f(x) = (1+x)^{2001}$

d) $f(x) = e^{x+3}$

e) $f(x) = (1-x)^3$

f) $f(x) = \cos(3x)$

g) $f(x) = 3\text{sen}^4(x)$

h) $f(x) = \ln(x+1)$

i) $f(x) = \ln(2+\text{sen}(x))$

j) $f(x) = e^{x^2+\cos(x)}$

k) $f(x) = \ln^2(x^2+1)$

l) $f(x) = \ln(5x)$

m) $f(x) = \dfrac{(2x^3+3)^2}{\ln(x^2+1)}$

n) $f(x) = \sqrt{4+5x^2}$

Ejercicio 7 Calcule la derivada de la función en su dominio de definición, siendo $f(x) =$

a) x^x

b) $x^{3x} + 2^x$

c) $(\text{sen}^3(x))^{\ln(x)}$

d) $x^{\sqrt{x}}$

Ejercicio 8 Sean f, ℓ y h funciones tales que

$$f(x) = 1+x^2, \quad \ell'(x) = \text{sen}^2(\text{sen}(1+3x)), \quad \ell(0) = 4, \quad h(x) = \ell(1+2x)$$

Calcule $(fo\ell)'(0)$ y $(hof)'(0)$.

Ejercicio 9 Pruebe que la función $f(x) = 7e^{kx}$ es solución de la ecuación $f'(x) = kf(x)$.

Ejercicio 10 Para cada una de las siguientes funciones estudie la continuidad y, mediante el estudio del cociente incremental, la derivabilidad en el punto indicado.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 3 + \sqrt{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 2x + 4 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad x = 0$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x > 1 \\ 3x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{en} \quad x = 1$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad x = 0$$

En las funciones que resulten derivables en los puntos indicados, escriba la ecuación del la recta tangente.

Ejercicio 11 Marque la única respuesta correcta: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$. Entonces, en $x = 1$

- ☐ f es continua pero no derivable.
- ☐ f es continua y derivable.
- ☐ f no es continua pero si es derivable.
- ☐ f no es ni continua ni derivable.

Ejercicio 12 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5e^{x^3+2x}$

a) Muestre que $f'(x) > 0$ para todo x. Además, note que $f(0) = 5$.

b) Use el teorema de la función inversa para justificar la existencia de $\left(f^{-1}\right)'(5)$ y calcule su valor.

Ejercicio 13 La temperatura C de un cuerpo que inicialmente estaba a 90 grados Celsius, se enfría de acuerdo a la ley $C(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$ (se está suponiendo que la temperatura ambiente es de 20^o Celsius) donde t es el tiempo en minutos.

a) Calcule con qué velocidad se está enfriando el cuerpo a los 5 minutos.

b) Muestre que la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura C y la temperatura ambiente. Más precisamente:

$$C'(t) = -0{,}1\,(C(t) - 20)$$

c) Muestre que la velocidad de enfriamiento va tendiendo a 0 conforme avanza el tiempo.

Ejercicio 14 Calcule las siguientes derivadas

a) $f(x) = \text{sen}(x)$, $f^{(5)}(x), f^{(70)}(x)$

b) $f(x) = e^x$, $f^{(19)}(x), f^{(200)}(x)$

c) $f(x) = e^{kx}$, $f^{(20)}(x)$

d) $f(x) = \ln(x+1)$, $f^{(4)}(x)$

e) $f(x) = 5x^3 + 8x$, $f^{(''')}(x), f^{(200)}(x)$

Ejercicio 15 Dados a y $b \in R$ muestre que $f(x) = a\,\text{sen}(x) + b\cos(x)$ es solución de la siguiente ecuación

$$f^{''}(x) + f(x) = 0$$

Ejercicio 16 Considere la función $f(x) = (1+x)^n$, con n natural. Calcule $f^{(k)}(0)$ para todo valor de k.

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Pruebe que la función $f(x) = x|x|$ es derivable para todo x, que $f^{'}(x)$ es continua pero que no existe $f^{''}(0)$.

Ejercicio 2 Pruebe que el gráfico de la función $f(x) = x + \ln(x)$ tiene una recta tangente que pase por el origen.

Ejercicio 3 Halle, si existen, la o las ecuaciones de las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ que pasen por el punto

a) $(1, 0)$ *b*) $(0, 0)$ *c*) $(0, 4)$.

Ejercicio 4 La recta tangente de la función f en el punto de abscisa $x = -1$ tiene ecuación $y = -5x + 3$. Calcule la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $g(x) = f(-x^2 + \text{sen}(\pi x))$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 5 Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2} & \text{si } x \neq 4 \\ \\ a & \text{si } x = 4 \end{cases}.$$

Encuentre $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua. Determine si resulta derivable.

Ejercicio 6 Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + a\ln(x) & \text{si } x \geq 1 \\ \\ bx + 5 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

Determine a y b para que f sea derivale en $x = 1$.

Ejercicio 7 Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Halle los valores de a y b para que f resulte derivable.

Ejercicio 8 Sean f y g funciones derivables tales que la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 1$ tiene ecuación $y = 4x - 1$ y la recta tangente al gráfico de g en $x_0 = 2$ tiene ecuación $y = 3x - 5$. Halle, si es posible, la ecuación de la recta tangente al gráfico de

a) $f \circ g(x)$ en $x_0 = 2$,

b) $f^{-1}(x)$ en $x_0 = 3$,

c) $g^{-1}(x)$ en $x_0 = 1$.