Práctica 6: Teorema del Valor Medio

Ejercicio 1

a) Considere la función $f(x) = x^{2/3}$ definida en el intervalo $[-1, 1]$. Esta función es continua sobre este intervalo y $f(-1) = f(1)$. Sin embargo, su derivada no se anula nunca. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Rolle?

b) Sea $f(x) = x^3 + 3x^5$, $-1 \leq x \leq 1$. Pruebe que en $x_0 = 0$ f no tiene extremo y que $f'(0) = 0$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Fermat?

Ejercicio 2 Considere la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x$ y cualquier intervalo cerrado, por ejemplo el $[-1, 3]$. Compruebe que el valor $c \in (-1, 3)$ al que hace referencia el Teorema del Valor Medio es calculable en este caso.

Ejercicio 3 Pruebe las siguientes identidades

a) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ *b*) $\ln(x^a) = a\ln(x)$

(**Ayuda**: use que si dos funciones f y g tienen la misma función derivada,

entonces $f(x) = g(x) + c$, donde c es una constante.)

Ejercicio 4 Pruebe que la única solución de la ecuación

$$f'(x) = 2f(x), \qquad f(0) = 1,$$

es $f(x) = e^{2x}$. (**Ayuda**: si $u(x)$ es solución de la ecuación estudie la derivada de $h(x) = \dfrac{u(x)}{e^x}$.)

Ejercicio 5 Para las siguientes funciones, pruebe que el gráfico corta al eje x sólo una vez.

a) $f(x) = -3x + \operatorname{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = e^{-x} - \ln(x), \quad x > 1$

c) $f(x) = x + \ln(x), \quad x > 0$

d) $f(x) = x^{2n+1} + x^3 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$

e) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x} + 1} - 2,\ x > 0$

Ejercicio 6 Sea $R(x)$ una función con 3 derivadas continuas en $x = 0$ y tal que $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$. Pruebe que $\dfrac{R(x)}{x^3} = \dfrac{R'''(c)}{3!}$ para algún c entre 0 y x. (**Ayuda**: use el Teorema de Cauchy 3 veces.)

Ejercicio 7 Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(3\pi x)}-1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{6\,(x-3)^2\ \ln(x-3)}{x-4}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)+x^2-4}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x-1+\cos x}{3x+\operatorname{sen} x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x-1}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)\,e^{x^2}}{x^2-1}$

Ejercicio 8 Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+3x^2}{x^2+7x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\,e^{-x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-2^x)^{\operatorname{sen}(x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$

Ejercicio 9 Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(7x)+2x^2\ln x$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\,(e^x-1)$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$

Ejercicio 10 Mediante los cocientes incrementales correspondientes, decida si las siguientes funciones son derivables en el punto indicado.

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(3\pi x)}-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ -3\pi & \text{si } x=1 \end{cases}$ en $x=1$

b) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}(7x)+2x^2\ln x & \text{si } x>0 \\ 7x & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$ en $x=0$.

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x-1+\cos x}{3x+\operatorname{sen} x} & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ en $x=0$.

Ejercicio 11 Para las siguientes funciones, encuentre a para que f resulte continua. Para el valor de a hallado, decida si la función resulta derivable en el punto indicado.

a) $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x - 10 + 6\sqrt{x}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $x = 1$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5\cos(6x) - a}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + 3 - 3\cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 6 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

Ejercicio 12 Explique por qué no es correcta la siguiente aplicación de la Regla de L$'$Hospital.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{6x + 2}{2} = 4$$

Ejercicio 13 Muestre por qué no es posible utilizar la Regla de L$'$Hospital para calcular el límite indicado en cada caso y encuentre el límite por otros medios

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x}$ *b*) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}$ *c*) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

Ejercicio 14 Justifique las siguientes afirmaciones

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x} = 0$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x + \cos x} = 1$

Ejercicio 15 Marque la única respuesta correcta: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \begin{cases} x^{3/2}\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Entonces, en $x = 0$

- ☐ f es continua pero no derivable.
- ☐ f es continua y derivable.
- ☐ f no es continua pero si es derivable.
- ☐ f no es ni continua ni derivable.

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3^{5x+\cos(2x)} + 8x + \ln\left((4x+1)^{-2}\right).$$

Pruebe que $f(x) \neq 1\ \forall x \geqslant 0$.

Ejercicio 2 Considere $f(x) = 4\sqrt{x} + 3\ln(x) - 2,\ \forall\, x > 0$. Pruebe que existe la función inversa f^{-1} y calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$ (Observe que $f(1) = 2$.)

Ejercicio 3 Sea f una función continua y derivable tal que $f(-2) = f(5) = 0$. Puebe que existe un $c \in (-2, 5)$ tal que $f'(c) = 200f(c)$
Ayuda: considere $g(x) = e^{-200x}f(x)$.

Ejercicio 4 Sea $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente. Pruebe que $2^{h(x)-5} + 3x \neq \operatorname{sen}(x)\ \forall x \geqslant 0$.

Ejercicio 5 Puebe la siguiente desigualdad

$$x^6 + x^4 + x^2 + 3 \geqslant 12x - 6,\ \ x \geqslant 1$$

Ejercicio 6 Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{8x^2 + a\,(1-\cos(x))}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Encuentre el valor de a para que f resulte derivable en $x = 0$ y además sea $f'(0) = 3$.

Ejercicio 7 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con dos derivadas continuas tal que $f(0) = 2,\ f'(0) = \dfrac{5}{6},\ f''(0) = 5$. Se define $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en la forma

$$\ell(x) = \begin{cases} \dfrac{f(6x)-2}{5x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Calcule $\lim_{x\to 0} \ell(x)$ y $\ell'(0)$.

Ejercicio 8 Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = e^{4x} + x^5 + 2$. Pruebe que es biyectiva y que $f^{-1}(3) = 0$. Calcule

$$\lim_{y\to 3} \frac{f^{-1}(y)}{2y-6}$$