Práctica 8: Teorema de Taylor

Ejercicio 1 Sea $f(x) = \ln(x+1)$. Encuentre un polinomio $p(x)$ de grado 3 tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$ y $p'''(0) = f'''(0)$.

Ejercicio 2 Calcule el polinomio de Taylor de las siguientes funciones hasta el orden indicado en el punto dado.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$	orden	5	$x_0 = 0$
b) $f(x) = \operatorname{sen} x$	orden	4	$x_0 = 0$
c) $f(x) = \operatorname{sen} x$	orden	5	$x_0 = 0$
d) $f(x) = \cos x$	orden	5	$x_0 = 0$
e) $f(x) = \ln x$	orden	4	$x_0 = 1$
f) $f(x) = \sqrt{x}$	orden	3	$x_0 = 4$
g) $f(x) = e^x$	orden	5	$x_0 = 0$
h) $f(x) = (1+x)^6$	orden	6	$x_0 = 0$

Ejercicio 3 Compruebe que el polinomiio de Taylor de orden n de la función $f(x) = e^x$ es $p(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!}$.

Ejercicio 4 Obtenga el polinomio de Taylor de orden n de las siguientes funciones en $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$

d) $f(x) = e^{2x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

f) $f(x) = \ln(1+x)$

Ejercicio 5 Sea $q(x) = x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - 2$.

a) Halle los polinomios de Taylor de q en $x_0 = 0$ de orden 1 a 6.

b) Haga lo mismo, sin hacer las cálculos, para

$$p(x) = x^{20} + x^{19} + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Ejercicio 6 Si el polinomio de Taylor de f de orden 5 en $x=2$ es

$$p(x)=(x-2)^5+3(x-2)^4+3(x-2)^2-8$$

calcule $f^{(4)}(2)$ y $f'''(2)$. ¿Se puede conocer el valor de $f^{(6)}(2)$? ¿Cuánto vale $f^{(6)}(2)$ si el polinomio p es de orden 7?

Ejercicio 7 Los polinomios de Taylor de orden 4 en $x=2$ de las funciones f y g son, respectivamente

$p(x)=-2+3(x-2)-3(x-2)^2+(x-2)^3$ y $q(x)=5+12(x-2)^2-7(x-2)^4$

Halle el polinomio de Taylor de orden 2 de $t(x)=f(x)g(x)$ y $s(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en $x=2$.

Ejercicio 8 Sea $f(x)=\ln(1+x)$ y sea $p(x)$ su polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0=0$.

Demuestre (usando el Teorema generalizado del Valor Medio (teorema de Cauchy)) que $\dfrac{f(x)-p(x)}{x^4}=\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}$ para algún valor de c entre 0 y x.

Ejercicio 9 Escriba la expresión del resto en cada caso:

a) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+R_4(x)$

b) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+R_5(x)$

c) $\operatorname{sen} x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+R_5(x)$

d) $\operatorname{sen} x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+R_6(x)$

e) $\ln x=(x-1)-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{3}(x-1)^3+R_3(x)$

Ejercicio 10 Para la función $f(x)=\cos x$

a) Obtenga el polinomio de Taylor de orden 4 $p_4(x)$.

b) Escriba la expresión de $R_4\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Pruebe que $\left|R_4\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2^5 5!} < 0,0003$

Ejercicio 11 Se quiere aproximar $\sqrt[3]{e}$:

a) Pruebe que el polinomio de Taylor de orden 5 en $x = 0$ de $f(x) = e^x$ lo consigue con un error menor que $\frac{1}{174960}$.

b) ¿De qué orden hay que tomar al polinomio de Taylor de la misma función para que el error sea menor que 10^{-8}? (use que $e < 3$).

Ejercicio 12 Utilice el polinomio de Taylor de orden 4 en $x_0 = 0$ de $f(x) = \operatorname{sen} x$ para aproximar el valor de $\operatorname{sen}(0,25)$ y dé una cota para el error que se comete al tomar esta aproximación.

Ejercicio 13 Sea $f(x) = x \ln x$.

a) Halle el polinomio de Taylor p de orden 3 de f en $x = 1$. Escriba la expresión del resto.

b) Estime, acotando el resto, el error que se comete al calcular $f(1,5)$ por medio de $p(1,5)$.

Ejercicio 14 ¿Cuántos términos es suficiente tomar en el desarrollo de Taylor en $x = 0$ de $f(x) = e^x$ para obtener un polinomio que aproxime a dicha función en todo el intervalo $[-1, 1]$ con un error menor que 10^{-4} ? Use el polinomio hallado para encontrar las primeras tres cifras decimales del número e.

Ejercicio 15 Sea $f(x) = \ln(1 + x)$. ¿De qué orden hay que tomar el polinomio de Taylor en $x = 0$ para poder calcular $\ln(1,15)$ con un error que no supere a $0,001$?

Ejercicio 16 Halle un intervalo que contenga a $x = 0$ tal que la diferencia entre

a) $\cos x$ y $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ sea menor que $5{,}10^{-5}$.

b) $\operatorname{sen} x$ y x sea menor que 10^{-3}.

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Halle los valores de a y de b de modo que el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = a\ln(1+bx)$ en $x=0$ sea $p(x) = 2x + \frac{3}{2}x^2$.

Ejercicio 2 Sea $f(x) = 1+3x+\operatorname{sen} x$. Escriba $p(x)$, el polinomio de Taylor de f de orden 4 en $x=0$ y calcule, estimando el resto, el error que se comete al calcular $f\left(\frac{1}{3}\right)$ con $p\left(\frac{1}{3}\right)$.

Ejercicio 4 Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 en $x=0$ de $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$. Estime el error que se comete al calcular los valores de la función por medio del polinomio hallado cuando $-\frac{1}{2} \leq x < 1$.

Ejercicio 5 Determine los valores de a y b para que el polinomio de Taylor de

$$f(x) = \ln(1+x) + ax^2 + bx$$

en $x=0$ empiece con la potencia de x de exponente lo más grande posible.

Ejercicio 6 La función $f(x) = \sqrt[n]{ax+1}$ tiene como polinomio de Taylor de orden 2 en $x=0$ a

$$p(x) = 1 + 5x - \frac{75}{2}x^2.$$

Halle los valores de a y de n.

Ejercicio 7 La función f satisface la ecuación $(5x+1)f'(x) + f(x) = 1$, $f(0) = 2$. Encuentre el polinomio de Taylor de orden 5 en $x=0$.

Ejercicio 8 Sea $f(x) = \sqrt{ax+1}$ y $p(x) = 1 + 2x + bx^2$. Determine los valores de a y de b para que $p(x)$ sea el polinomio de Taylor de f de orden 2 en $x_0 = 0$.

Ejercicio 9 Se sabe que la función $f(x)$ cumple $f''(x) = \sqrt{3x^2+5x+a}+7$ y que su polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 1$ es

$$p(x) = 2 - 7(x-1) + 4(x-1)^2.$$

Halle el valor de a y calcule el polinomio de Taylor de f de orden 3 en $x_0 = 1$.

Ejercicio 10 Sea $f(x) = 3 + (x + 2)e^{ax}$. Halle $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que la recta tangente en $(0; f(0))$ tiene ecuación $y = 5 + 10x$. Calcule $p_2(x)$ el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ de f.

Ejercicio 11 Sea $g(x) = 1 - 3x + \sqrt{f(x)}$. Si el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ de g es $p(x) = 2 - x + 3x^2$, halle el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 0$.

Ejercicio 12 Sea $g(x) = 3 + 2x + \cos(f(x))$. Sabiendo que

$$p(x) = 2x + 5x^2 - 3x^3$$

es el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de g, halle el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 0$.