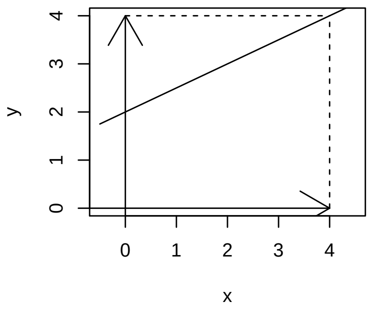
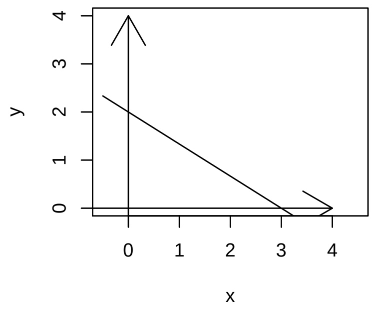
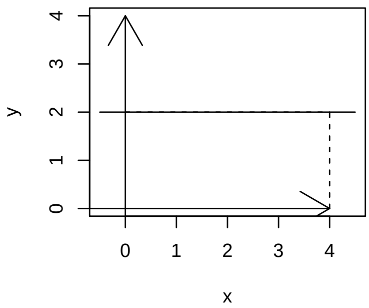
Práctica 9: Integrales

Ejercicio 1 Halle, en cada caso, la función área bajo la curva entre 0 y x. Compruebe que $A^{'}(x) = f(x)$.







Ejercicio 2 Se sabe que las funciones f y g son integrables y que

$$a)\ \int_{-3}^{4} (3f(x) - 4g(x))\, dx = 23, \quad \int_{-3}^{4} g(x)\, dx = 7. \quad \text{Calcule} \quad \int_{-3}^{4} f(x)\, dx$$

$$b)\ \int_{1}^{2} 2\, f(x)\ dx = 5, \quad \int_{1}^{2} g(x)\ dx = 7. \quad \text{Calcule} \quad \int_{1}^{2} (f(x) + 2g(x))\, dx$$

Ejercicio 3 Calcule las derivadas de las siguientes funciones

$a)\ A(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} e^{-t^2} dt$

$b)\ B(x) = \displaystyle\int_{0}^{2x} \frac{\operatorname{sen} u}{1+u}\ du$

$c)\ C(x) = \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2}\ dt$

$d)\ D(x) = \displaystyle\int_{0}^{\operatorname{sen}(x)} \frac{y}{2+y^3}\ dy$

$e)\ E(x) = \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\ dt$

Ejercicio 4 Considere las funciones

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

a) La función f no es continua ¿lo es $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$?

b) La función g no es derivable ¿lo es $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$?

Ejercicio 5 Sabiendo que

a) la función continua f satisface $\int_0^x f(t)\, dt = x^2(1+x)$, calcule $f(2)$.

b) la función continua g satisface $\int_0^{x^2} g(t)\, dt = x^2(1+x),\ x > 0$, calcule $g(2)$.

Ejercicio 6 Calcule las siguientes integrales usando la Regla de Barrow y las propiedades de linealidad de la integral.

a) $\int_0^3 3(x-2)\, dx$

b) $\int_{-2}^2 \left(x^3 + 2x\right) dx$

c) $\int_\pi^{5\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx$

d) $\int_0^{64} \left(2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\, dx$

Ejercicio 7 Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, compruebe las siguientes igualdades y calcule, en cada una de ellas, el valor de K.

a) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{3t+5}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5} + K$

b) $\int_0^x \frac{\cos t}{2\operatorname{sen} t + 3}\, dt = \frac{1}{2}\ln|3 + 2\operatorname{sen} x| + K$

Ejercicio 8 Halle en cada caso, una función $f(x)$ que satisfaga

a) $f'(x) = 2$

b) $f'(x) = x$

c) $f'(x) = \operatorname{sen}(x)$

d) $f'(x) = \cos(x)$

e) $f'(x) = e^x$

f) $f'(x) = x^5$

g) $f'(x) = x + x^3$

h) $f'(x) = 3x + \frac{4}{x}$

Ejercicio 9 Encuentre en cada caso, una función $G(x)$ que satisface

a) $G'(x) = 6x + 1,\ G(1) = 3$

b) $G''(x) = 6x,\ G'(1) = 3,\ G(0) = 1$

c) $G'''(x) = x + \operatorname{sen}(x),\ G''(0) = G'(0) = G(0) = 5$

Ejercicio 10 Calcule las siguientes integrales

a) $\int 4x^6 dx$

b) $\int \operatorname{sen}(x-1)\ dx$

c) $\int_0^1 \sqrt{x}\left(3x + \sqrt{x}\right) dx$

d) $\int \frac{7dx}{\cos^2 x}$

Ejercicio 11 Usando el método de sustitución, calcule las siguientes integrales

a) $\int (3x+1)^2\ dx$

b) $\int \frac{dx}{2x+5}$

c) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3+2}}\ dx$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}\ dx$

e) $\int e^{-3x}\ dx$

f) $\int_0^1 x\, e^{2x^2}\ dx$

g) $\int \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\, dx$

h) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\ dx$

i) $\int_1^e \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^4(x)}\ dx$

j) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\ dx$

k) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\ dx$

l) $\int a^{5x} dx$

m) $\int \operatorname{sen}(\cos(x))\operatorname{sen}(x)\ dx$

n) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\ dx$

o) $\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt[4]{5-2x^2}}\ dx$

p) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\ dt$

q) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$

r) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}\ dx$

s) $\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\ dx$

t) $\int \sqrt{(3x+5)^7}\ dx$

$u)$ $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x^2-2x}\ dx$

$v)$ $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ dx$

$w)$ $\displaystyle\int_2^3 \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}\ dx$

$x)$ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}}\ dx$

$y)$ $\displaystyle\int x^3 e^{x^4+1}\ dx$

$z)$ $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos x)^3}\operatorname{sen} x\ dx$

Ejercicio 12 Marque con una cruz la única respuesta correcta. Dada la función continua f, ponemos $A = \displaystyle\int_2^3 f(x)dx$ y $B = \displaystyle\int_8^{11} f(\frac{t-2}{3})dt$, entonces es cierto que

☐ $A = 3B$

☐ $3A = B$

☐ $A = B$

☐ Ninguna de las anteriores

Ejercicio 13 Aplique el método de integración por partes para calcular las siguientes integrales

$a)$ $\displaystyle\int x \ln x\ dx$

$b)$ $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$

$c)$ $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x dx$

$d)$ $\displaystyle\int x e^x dx$

$e)$ $\displaystyle\int \frac{x}{e^x} dx$

$f)$ $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \cos x dx$

$g)$ $\displaystyle\int x^3 e^{2x} dx$

$h)$ $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x dx$

Ejercicio 14 Si llamamos $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\ dx$ pruebe la fórmula de reducción

$$I_n = e - nI_{n-1}$$

Ejercicio 15 La función f tiene derivada continua y cumple

$$\int_{-\pi}^{\pi/2} f(x)\operatorname{sen}(x)\,dx = 4 \ \text{ y } \ f(-\pi) = 3.$$

Calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2} f'(x)\cos(x)\,dx$

Ejercicio 16 Calcule las siguientes integrales usando el método de fracciones simples

a) $\displaystyle\int \frac{4}{(x-1)(x-2)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-4}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2-1}\,dx$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 La función f satisface $f(x)=5xf'(x)$. Si $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=12$, calcule $f(2)$.

Ejercicio 2 Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 en $x=0$ de

$$f(x)=\int_0^x (1+t)^3\ln(1+t)\,dt.$$

Ejercicio 3 Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ derivable tal que para cada $x\in(0,+\infty)$ se verifica que

$$(2x^2+3x)f(x)=e^{-x+1}+\int_1^{2x^2-x} f(t)\,dt$$

Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0=1$.

Ejercicio 4 Encuentre una primitiva F de la función $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{4+e^{3x}}$ que satisfaga $F(0)=-3\ln(4)$

Ejercicio 5 Halle una función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ derivable que satisfaga la ecuación integral

$$(x+3)\,f(x)=x^3+1+\int_1^x f(t)\,dt,\quad f(1)=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 6 Halle una función $f:\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$ con derivada continua que satisfaga la ecuación integral

$$f(x)=3\mathrm{sen}^2(x)+\int_{\frac{\pi}{4}}^x f'(t)\cos^2(t)\,dt$$

Ejercicio 7 Halle una función continua g tal que

$$1+\int_0^{\ln x} g(e^t)\ dt = x^2+\ln(x),\ x>0.$$

Ejercicio 8 Considere la función $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{2\ln x}{3x} & \text{si } 0<x\leq 1 \\ 4 & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) Calcule $\displaystyle\int_{e^{-3}}^{1} f(x)dx$

b) Determine el valor de $k>0$ para el cual $\displaystyle\int_{e^{-3}}^{k} f(x)dx=35.$