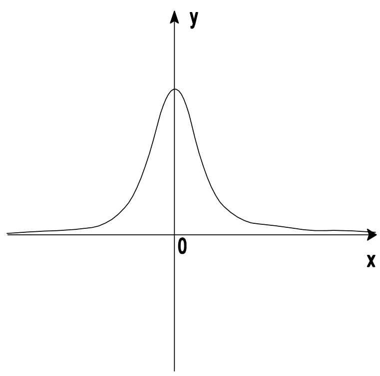
PRACTICA 3

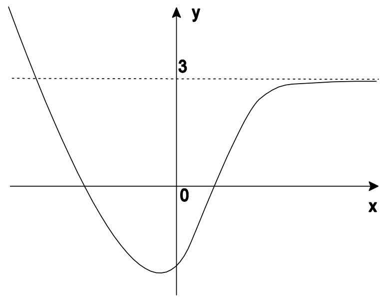
LIMITES Y CONTINUIDAD

Ejercicio 1.- A partir de los siguientes gráficos determinar, si existen, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

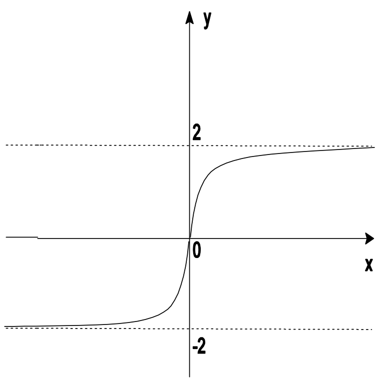
i)



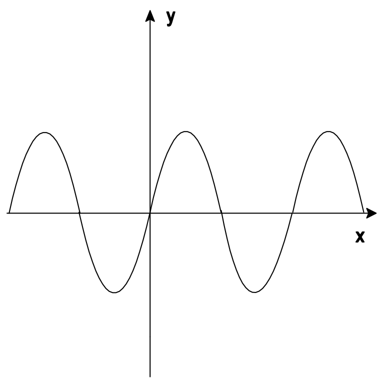
ii)



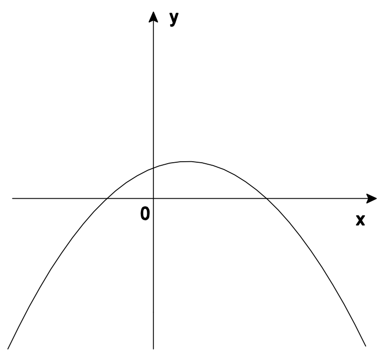
iii)



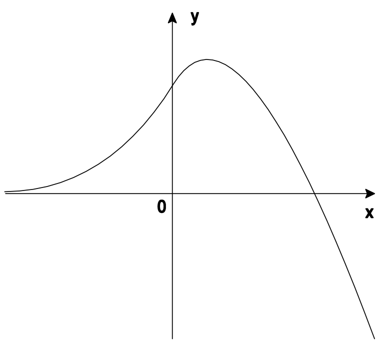
iv)



v)



vi)



Ejercicio 2.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{10000}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{5}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+5}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{2x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x+3}{2x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x-1}+5$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{x^2-5}$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x+2}{2x^2+11}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x+2}{1000x}$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{3x^2+x+2}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1000x^2}{x^2+1}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)(2x-1)}{x^2+1}$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x+1}{2x^4+2x^3+1}$ o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{x^2+5x}-\frac{3x-1}{2x+3}$

Ejercicio 3.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7-10x^5+3$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7-10x^5+3$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x-4x^3-1}{5x^2+4}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^3-2x^2+3x-1}{5x^2+3}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4x^2+2x-1}{x^3+3x-6}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(2x+3)(x^2-5)}{x^3-1}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x}{x+2}+\frac{x^2+x}{x+1}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x}{x+2}-\frac{x^2+x}{x+1}$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x-1}+1$

Ejercicio 4.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+2}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5-\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{3x^2-2}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+5}}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{4x^2-1}}{5x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{4x^3-1}}{5x+3}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{9x^2+6}}{5x-1}$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2-2}-4}{\sqrt[3]{8x^3+2}+5}$

Ejercicio 5.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^5-x^6+\sqrt{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x-2}+x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x-2}-x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-x}{x+5}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+3}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+4)(x+10)}-x\right)$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{x+1}-3}{2^x+5}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^{x+1}-3}{2^x+5}$

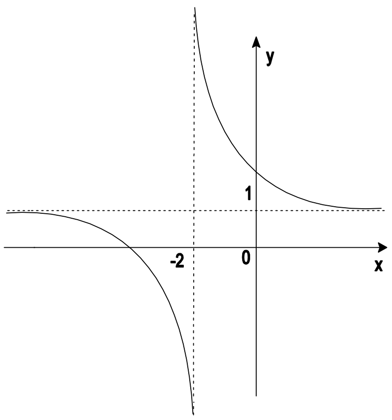
j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-3}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+5}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{5x+1}\right)^{2x}$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|}{x}$

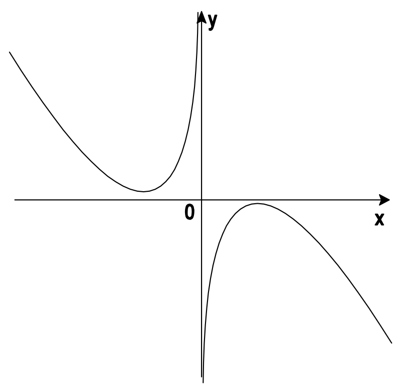
(*) Ejercicio 6- *Calcular*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(x^2+1)$ *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\operatorname{sen}(x)}{3x^2+1}$ *c)* $\lim\limits_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}(x)$

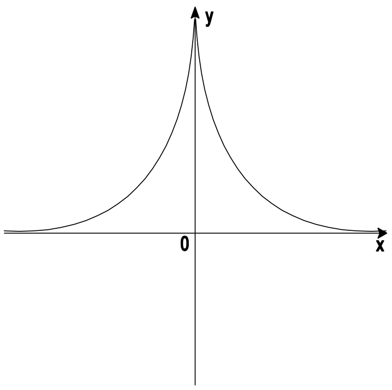
Ejercicio 7.- Dados los siguientes gráficos, determinar los límites que se indican en cada caso.

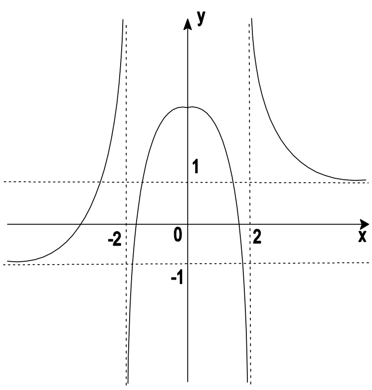
a) $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$





c) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$





Ejercicio 8.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5-2}{x^4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^2}{2x^3+3x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{4x}}{x^2+x+\sqrt{9x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2+2x+1}{2x-8}$ e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{4x-12}$ f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+2x-4}{5x+10}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-2}-\dfrac{x^3+x-2}{x^2-2x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-1}$ k) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-\sqrt{3x+10}}$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x+2}{4x+3}\right)^{x-1}$

Ejercicio 9.- Hallar el valor de a para que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+ax+1}-1}{x}=2$.

Ejercicio 10.- Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ calcular

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$, $a\in\mathbb{R}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{2x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+6}\right)^{3x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{3-5x^3}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+6}\right)^{2x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{x^2}$

Ejercicio 11.- Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ calcular

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{2/x}$, $a\in\mathbb{R}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+2}{3x+2}\right)^{1/x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)^{1/x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{5/x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+5x}{3+4x}\right)^{2/x}$

g) $\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{3/x+1}$

Ejercicio 12.- Localizar las asíntotas de las siguientes funciones y situar la gráfica respecto de ellas.

a) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-5}$ b) $f(x)=\dfrac{8x-4}{2x+6}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{2x^2+4x-6}{x^2-x-6}$ e) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x+1)(x-2)}+5$ f) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{4x^2-36}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{|x+1|}$ h) $f(x)=e^{x-3}$ I) $f(x)=e^{1/x}$

j) $f(x)=\ln\left(x^2-4\right)$ k) $f(x)=\ln(1-x)$ l) $f(x)=\ln(4x-7)$

Ejercicio 13.- Hallar el dominio, las ecuaciones de las asíntotas y hacer un gráfico aproximado de las siguientes funciones

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{-3}{x+2}$ c) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$ d) $f(x)=\dfrac{4x+5}{x+3}$

Ejercicio 14.- Comprobar las siguientes identidades, en todos los casos x_0 es un número real fijo:

a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x_0+h)^2-x_0}{h}=2x_0$

b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, $x_0>0$

Ejercicio 15.- La función de demanda de un producto viene dada por la fórmula $p=f(q)=\dfrac{1000}{q+5}$. Calcular a cuánto tiende el ingreso ($=pq$) cuando la producción crece a más infinito.

Ejercicio 16.- Hallar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de las funciones

a) $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-2}$ b) $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-\sqrt{2x+8}}$

Definición:

Se dice que una función f es continua en el punto de abscisa $x=a$ sí $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. En caso contrario se dice que $x=a$ es un punto de discontinuidad de la función f.

Ejercicio 17.- Determinar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones. Decidir en cada caso si es posible redefinir la función en dichos puntos para que resulte continua.

a) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\geq 1 \\ 2 & \text{si } x<1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ 2x+3 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<2 \\ 6 & \text{si } x=2 \\ x+2 & \text{si } x>2 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x}-2}{-2x+4} & \text{si } x>2 \\ \dfrac{3}{8}x-1 & \text{si } x\leq 2 \end{cases}$

Ejercicio 18.- Hallar el dominio y determinar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones, decidiendo en cada caso si es posible redefinir la función en dichos puntos para que resulte continua.

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ b) $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x+1}}{x-8}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{(x-3)^2}$ d) $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x+4}}{5-x}$

Ejercicio 19.- Dadas las siguientes funciones hallar, en cada caso, el valor de a para que f resulte continua en el punto indicado

a) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-4x+3 & \text{si } x<1 \\ a-5x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ en $x=1$ b) $f(x)=\begin{cases} 2^{1/x}+a & \text{si } x<0 \\ -x+3 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ en $x=0$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x-2}{x+2} & \text{si } x>-2 \\ x^2+ax+5 & \text{si } x\leq -2 \end{cases}$ en $x=-2$

Ejercicio 20.- Hallar $k\in\mathbb{R}$ para que la función resulte continua

a) $f(x)=\begin{cases} \ln(x-3)+k & \text{si } x>4 \\ 2+k(x+1) & \text{si } x\leq 4 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} kx-4 & \text{si } x>1 \\ 2-k^2x & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Consecuencias

1. Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y no tiene ningún cero en el intervalo (a,b), entonces f no cambia de signo en dicho intervalo.

2. Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y α y β (con $a<\alpha<\beta<b$) son dos ceros consecutivos de f, entonces (α,β) es o bien un intervalo de positividad, o bien un intervalo de negatividad de f.

Ejercicio 21.- Sea $f(x)=x^3-3x+1$. Probar que

a) f tiene un cero en el intervalo $(1,2)$.

b) f tiene un cero en el intervalo $(1,5;\,1,6)$.

c) f tiene un cero en el intervalo $(1,53;\,1,54)$.

Ejercicio 22.- Hallar los ceros de la función f y determinar los intervalos de positividad y de negatividad

a) $f(x)=(3x-2)(4x+1)(x-5)$

b) $f(x)=x(2x+\sqrt{2})(3x-\frac{1}{4})$

c) $f(x)=3(x-2)(x^2-10x+22)$

d) $f(x)=\left(x^2-5\right)\left(x^2+2x+1\right)$

e) $f(x)=\left(x^3-\frac{9}{4}x\right)\left(-x^2-x+2\right)$

f) $f(x)=x^3-8$

g) $f(x)=x^4-16$

h) $f(x)=x^6-3x^3+2$

i) $f(x)=e^{x-3}$

j) $f(x)=e^{5x}-e^{3x}$

k) $f(x)=\ln(2x+5)$

l) $f(x)=1-e^{x-2}$

Ejercicio 23.-

a) Hallar los intervalos de positividad y de negatividad de un polinomio $P(x)$ cuyos únicos ceros son 1 y -1, si se sabe que $P(-2)=2$, $P(0)=-1$, $P(2)=3$.

b) Sea f una función polinómica tal que $f(6)=8$, $f(2)=-2$, $f(4)=3$, $f(0)=1$ y sus únicas raíces son 1, 3, y 5. Hallar los intervalos de positividad y de negatividad de f .

Ejercicio 24.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua que corta al eje x en tres puntos (únicamente) y de la cual se conoce la siguiente tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	-3	$-\frac{3}{2}$	2

a) Para cada uno de los ceros de f, hallar un intervalo de amplitud 1 que lo contenga.

b) Determinar, si es posible, el signo de f en cada uno de los siguientes intervalos

$(-2,-1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(-\infty,-2)$, $(2,+\infty)$, $(-\infty,-1)$.

c) Hacer un gráfico aproximado de f usando los datos obtenidos en a) y b).

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Calcular $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x-2)(x+5)} - x$

Ejercicio 2.- Se sabe que $\lim_{x\to+\infty} e^{f(x)} = 0$. ¿Cuál es el $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$?

Ejercicio 3.- Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{x}$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{x^2}$ d) $\lim_{x\to 2}\left(3-x\right)^{3/x-2}$

Ejercicio 4.- Hallar el dominio y las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones

a) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+5}{x+1}$ b) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

c) $f(x)=\ln(3-\frac{1}{x})$ d) $f(x)=1+2e^{1/x}$

Ejercicio 5.- Hallar el valor de $k \in \mathrm{R}$ de modo que $x=-\frac{1}{4}$ sea asíntota de la función $f(x)=\frac{4x-5}{kx+3}$. Para el valor de k obtenido hallar las ecuaciones de todas las asíntotas de f justificando con los cálculos correspondientes.

Ejercicio 6.- De una función cuadrática $P(x)$ se sabe que $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ y que -2 y 5 son los ceros de $P(x)$. Hallar el conjunto de negatividad de $P(x)$.

Ejercicio 7.- Hallar el valor de a , sabiendo que $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{ax} = \sqrt{e}.$

Ejercicio 8.- En cada problema, marcar la única opción correcta

a) El $\lim_{x\to 0} 2\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ es igual a

☐ 2 ☐ 12 ☐ 1 ☐ $\frac{1}{3}$

---

b) El $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{6x}$ es igual a

☐ -1 ☐ e^{12} ☐ e^{3} ☐ e^{6}

---

c) Las ecuaciones de todas las asíntotas de $f(x)=\dfrac{2x^2+6x+4}{(x-3)(x+1)}$ son

☐ $y=2$, $x=3$ ☐ $y=0$ $x=3$

☐ $x=-1$, $y=2$, $x=-1$ ☐ $y=-1$

---

d) Sea $f:(0;+\infty)\to R$ tal que $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ si $x\neq 4$ y $f(4)=k$. f es continua para

☐ $k=2$ ☐ $k=\dfrac{1}{4}$ ☐ $k=\dfrac{1}{2}$ ☐ $k=\dfrac{1}{6}$

---

e) El conjunto de negatividad de $f(x)=\ln(x^2-3)$ es

☐ $(-2,2)$ ☐ $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ ☐ $(0,1)$ ☐ $\left(-2,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},2\right)$

---

f) f es una función polinómica de grado 3 , $f(5)=-1$, $f(3)=2$, $f(7)=5$, $f(-4)=-6$. Entonces puede afirmarse que no hay un cero en el intervalo

☐ $(-6,-4)$ ☐ $(-4,7)$ ☐ $(0,10)$ ☐ $(4,+\infty)$

---

g) La función $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{5x-1}$ es positiva en el intervalo

☐ $(-2,+\infty)$ ☐ $(5,7)$ ☐ $(-\infty,-3)$ ☐ $(-3,1)$
