PRACTICA 6
INTEGRALES

Ejercicio 1.-

a) Hallar una función $F(x)$ tal que

i) $F'(x)=5$

ii) $F'(x)=6x$

iii) $F'(x)=2x^2$

iv) $F'(x)=5-4x+2x^2$

v) $F'(x)=x^n$

vi) $F'(x)=x^3+x^{\frac{1}{3}}$

vii) $F'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

viii) $F'(x)=x^n$

ix) $F'(x)=e^x$

(*) x) $F'(x)=-\operatorname{sen} x$

(*) xi) $F'(x)=\cos x$

b) ¿Es única la respuesta en cada caso?

c) Observar que si $F(x)$ y $G(x)$ son funciones derivables en (a,b) tales que $F'(x)=G'(x)$ para todo $x\in(a,b)$ entonces existe $C\in\mathbb{R}$ tal que $F(x)=G(x)+\mathrm{C}$.

Ejercicio 2.- Hallar $F(x)$ sabiendo que

a) $F'(x)=5$ y $F(0)=1$

b) $F'(x)=4x$ y $F(-2)=0$

c) $F'(x)=5-4x+2x^2$ y $F(1)=-2$

d) $F'(x)=e^x$ y $F(0)=5$

(*) e) $F'(x)=-\cos x$ y $F(\pi/2)=3$

Ejercicio 3.- Calcular las siguientes integrales indefinidas

a) $\int 8\,dx$

b) $\int 3x\,dx$

c) $\int 4x+3\,dx$

d) $\int 3x^2+2x+1\,dx$

e) $\int x^4dx$

f) $\int 3x^5dx$

g) $\int 5x^3-7x^2+3x-2\,dx$

h) $\int 3x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}\,dx$

i) $\int \sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

j) $\int \dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\,dx$

k) $\int (x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}})^2\,dx$

l) $\int \dfrac{2}{x}-8x+3e^x\,dx$

Ejercicio 4.- Aplicar el método de sustitución al cálculo de las siguientes integrales indefinidas

a) $\int (3x+1)^7\,dx$ b) $\int \frac{1}{(-2x+4)^3}\,dx$ c) $\int \frac{1}{5x+3}\,dx$

d) $\int \sqrt{4x+2}\,dx$ e) $\int \sqrt[3]{1-x}\,dx$ f) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+4}}\,dx$

g) $\int \frac{x}{1+2x^2}\,dx$ h) $\int x\left(3+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$ i) $\int (x+1)(x^2+2x+5)^{-\frac{2}{3}}\,dx$

j) $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx$ k) $\int \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ l) $\int \frac{e^{\sqrt{3x+1}}}{\sqrt{3x+1}}\,dx$

m) $\int x^2 e^{-x^3+1}\,dx$ n) $\int x^{-1}\ln x\,dx$ o) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

(*) p) $\int x\,\mathrm{sen}(3x^2)\,dx$ (*) q) $\int \frac{\mathrm{sen}(\ln x)}{x}\,dx$ (*) r) $\int \mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx$

(*) s) $\int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^2 x}\,dx$

Ejercicio 5.- Aplicar el método de integración por partes al cálculo de las siguientes integrales indefinidas

a) $\int x(2x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$ b) $\int 3x(2x+1)^{-5}\,dx$ c) $\int 2xe^{3x}\,dx$

d) $\int 2x\ln(3x)\,dx$ e) $\int (x+4)^2 x^{\frac{3}{5}}\,dx$ f) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{5x-1}}\,dx$

g) $\int (x+2)\ln x\,dx$ h) $\int (x^2+1)e^{-x}\,dx$ i) $\int (2x-1)^2\sqrt{x+1}\,dx$

j) $\int \left(3x^2-2x\right)\ln x\,dx$ k) $\int (2x-1)\ln^2 x\,dx$ l) $\int x\ln\left(x^{-1}\right)\,dx$

(*) m) $\int x\cos dx$ (*) n) $\int x^2\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ (*) o) $\int x\,\mathrm{sen}(2x)\,dx$

Ejercicio 6.- Calcular

a) $\int x(x-1)^4\,dx$ b) $\int \sqrt[5]{2x+1}\,dx$ c) $\int \ln(2x+1)\,dx$

d) $\int \ln\sqrt{x+2}\,dx$ e) $\int \frac{dx}{(3x+2)\ln(3x+2)}$ f) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{(3x-2)^4}}\,dx$

g) $\int \frac{e^{2x}}{\left(3+e^{2x}\right)^5}\,dx$ h) $\int \frac{6x}{x^2+1}\,dx$ i) $\int \frac{1+\sqrt{2x}}{\sqrt{8x}}\,dx$

j) $\int \frac{9x^2+15}{\sqrt{x^3+5x+1}}\,dx$ (*) m) $\int (2x+1)\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ (*) n) $\int \frac{x\,\mathrm{sen}(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Ejercicio 7.- Si la función de ingreso marginal es $R'(q) = 2\,000 - 20q - 3q^2$

a) Hallar la función de ingreso total $R(q)$.

b) Hallar la función de demanda.

Ejercicio 8.- En la fabricación de un producto los costos fijos por semana son $\$4\,000$. La función de costos marginales es $C'(q) = 10^{-5}\left(0{,}02q^2 - 25q\right) + 0{,}2$, donde $C(q)$ es el costo total de fabricar q kilos de un producto por semana. Calcular el costo de fabricar 10 toneladas en una semana.

Ejercicio 9.- El único fabricante de un producto ha determinado que la función de ingreso marginal es $R'(x) = 100 - 3x^2$. Calcular la función de demanda.

Ejercicio 10.- El costo marginal de producir x unidades de una cierta mercancía es $C'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$, y el costo de producir dos unidades es de $\$2$. ¿Cuánto cuesta producir 12 unidades?

Ejercicio 11.- La función de demanda marginal es $D'(x) = \dfrac{-600x^2}{\left(2x^3+500\right)^{\frac{3}{2}}}$. Hallar la función de demanda, sabiendo que cuando el precio es de $\$50$ se demandan 10 toneladas.

Ejercicio 12.- La función de demanda marginal de cierto producto es $D'(x) = \dfrac{-1}{4\sqrt{1200-2x}}$. Calcular la función de ingreso total sabiendo que si se demandan 400 unidades, el ingreso total es $\$2\,800$.

Ejercicio 13.- Calcular las siguientes integrales definidas

a) $\int_{-3}^{2} -2\,dx$ b) $\int_{0}^{1} 2x+1\,dx$ c) $\int_{-2}^{2} -x^2+4\,dx$

d) $\int_{-1}^{3} x^3-2x^2-x+4\,dx$ e) $\int_{0}^{4} \sqrt{2x+1}\,dx$ f) $\int_{1}^{2} \dfrac{1}{3x-2}\,dx$

g) $\int_{-3}^{0} x\sqrt{1-x}\,dx$ h) $\int_{0}^{2} x\sqrt{6x^2+1}\,dx$ i) $\int_{-1}^{1} 4e^{2x}+6e^{-3x}\,dx$

j) $\int_{0}^{12} \sqrt{4x}\ln x\,dx$ k) $\int_{-3}^{2} (-2x+1)e^{-x}\,dx$ l) $\int_{1}^{4} \dfrac{2x+1}{x^2+x}\,dx$

(*) m) $\int_{0}^{\pi} 1+\operatorname{sen} x\,dx$ (*) n) $\int_{0}^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx$ (*) o) $\int_{0}^{\pi/6} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{\left(1+\cos(3x)\right)^2}\,dx$

Ejercicio 14.- La función de costo marginal de un fabricante es $C'(q) = 0{,}6q + 2$. Si la producción es de $q = 80$ unidades por semana, ¿cuánto costará incrementar la producción a 100 unidades por semana?

Ejercicio 15.- La función de ingreso marginal de un fabricante es $C'(x)=\dfrac{1000}{\sqrt{10x}}$. Si R está dado en pesos, obtener el cambio que se produce en los ingresos totales del fabricante si se aumenta la producción de 40 a 90 unidades.

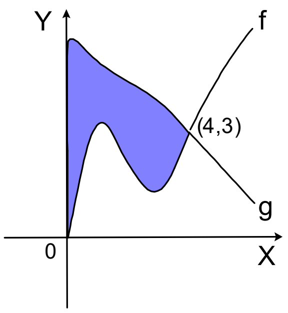
Ejercicio 16.-

a) Sabiendo que $\int_{-2}^{4}\left[f(x)+2\right]dx=5$ calcular $\int_{-2}^{4}f(x)\,dx$.

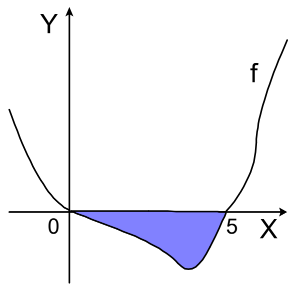
b) Sabiendo que $\int_{1}^{3}f(x)\,dx=4$, calcular $\int_{1}^{3}\left[5f(x)-6\right]dx$.

Ejercicio 17.- Establecer mediante integrales el área de las regiones sombreadas

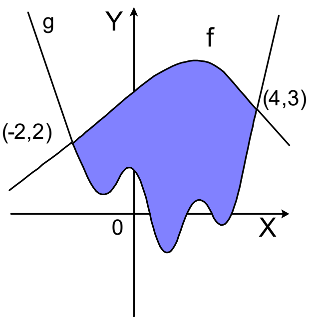
i)



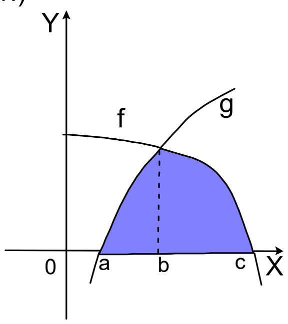
ii)



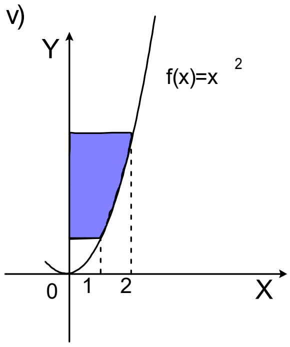
iii)



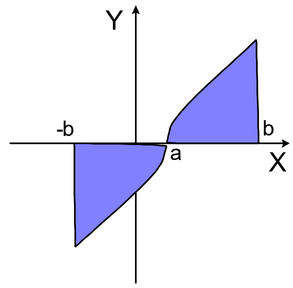
iv)



v)



vi)



Ejercicio 18.- Calcular el área de la región encerrada por las curvas (sug.: hacer el gráfico)

a) $y=x^2-1$; $y=x+1$

b) $y=1-x^2$; $y=x+1$

c) $y=x^3$; $y=x$

d) $y=\sqrt[3]{x}$; $x=0$; $y=1$

e) $y=e^x$; $y=e^{-x}$; $x=1$; $x=-1$

f) $y=\sqrt{x}$; $y=x-2$; $x=0$

g) $y=\sqrt{x}$; $y=x-2$; $y=0$

h) $y=x^3-4x$, y el eje x

(*) i) $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x para $0 \le x \le \pi$ (*) j) $y = \cos x$, y el eje x para $0 \le x \le 2\pi$

Ejercicio 19.- Hallar el área de la región comprendida entre la curva $y = x^3 - 4x$ y la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa $x = -1$

Ejercicio 20.- Decidir sobre la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones

a) El área de la región del plano limitada por el gráfico de $f(x) = x - 2$, la recta $x = 4$ y el eje y es $\int_0^4 (x-2)\, dx$.

b) El área de la región del plano limitada por el gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ y el eje x para $-1 \le x \le 3$ es $-\int_{-1}^{1} x^2 - 1\, dx + \int_1^3 x^2 - 1\, dx$.

c) El área encerrada por las curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = -x + 2$ es $\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\, dx$.

Aplicaciones: Excedente del consumidor y del productor o fabricante

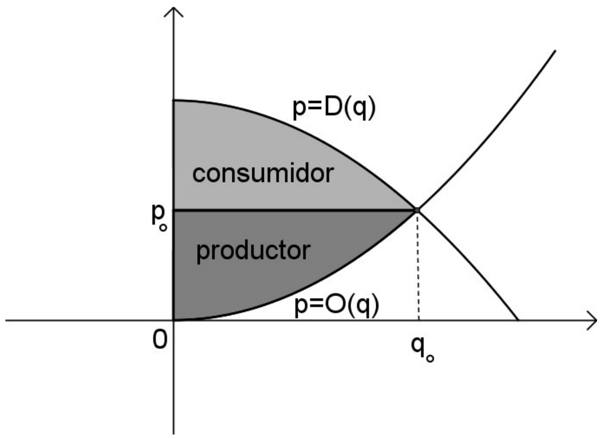
Definición:

El *excedente del consumidor* es el área comprendida entre la curva de demanda $p = D(q)$ y la recta $p = p_0$ ($p_0 = D(q_0) =$ precio del mercado):

$EC = \int_0^{q_0} (D(q) - p_0)\, dq$

Definición:

El *excedente del productor o fabricante* es el área comprendida entre la curva de oferta $p = O(q)$ y la recta $p = p_0$ ($p_0 = O(q_0)$ precio del mercado): $EF = \int_0^{q_0} (p_0 - O(q))\, dq$



Ejercicio 21.- La función de demanda para un producto es $p = D(q) = 100 - 0,05q$, p es el precio por unidad para una demanda de q unidades. La función de oferta es $p = O(q) = 10 + 0,1q$. Determinar

a) El punto de equilibrio.

b) El excedente de los consumidores cuando el mercado está en equilibrio.

c) El excedente de los fabricantes cuando el mercado está en equilibrio.

Ejercicio 22.- La función de demanda para un producto es $p = D(x) = \dfrac{12}{x+1}$. La función de oferta es $p = O(x) = x + 2$. Calcular el excedente del consumidor y del productor cuando el mercado está en equilibrio.

*(*) **Ejercicio 23.-** Calcular las siguientes integrales impropias:*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{6x}{(x^2+1)^2}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,e^{-x}dx$ g) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ h) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

*(*) **Ejercicio 25-** Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+5}{2x^3 - x^2 + 3x + 1}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3x}{2x^2 + x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+3}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{x + e^{2x}}\,dx$ e) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2 - 2\ln x}{x^4 + \ln x}\,dx$ f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2x-1}}{x+1}\,dx$

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Calcular $\displaystyle\int (2x+3)\ln(x^2+3x+1)\,dx$

Ejercicio 2.- Calcular el excedente del consumidor sabiendo que la función de demanda es $p = D(q) = 4500(q+1)^{-\frac{2}{3}} + 1200$ (q indica cantidad de unidades, y p su precio unitario) y que el precio de mercado es $\$1700$.

Ejercicio 3.- Calcular el área de la región encerrada por la gráfica de $y=\dfrac{4}{x-1}$ y la recta $y=\dfrac{-x+7}{2}$.

Ejercicio 4.- La demanda marginal de cierto producto es $D'(q)=\dfrac{-q}{\sqrt{10\,000-q^2}}$. Hallar la función de demanda sabiendo que cuando se demandan 60 unidades, el precio unitario es $\$150$.

Ejercicio 5.- Hallar la función de costo sabiendo que el costo marginal es $C'(q)=\dfrac{8q}{\sqrt{q^2+9}}$ y que cuando se producen 4 unidades, el costo unitario es $\$45$.

*(*) **Ejercicio 6.-** Calcular*

a) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{2x^2+49}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos(3x)}{\operatorname{sen}(3x)+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{\cos(2x)+1}}\,dx$

Ejercicio 7.- Hallar el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $y=x^3$ e $y=16x$.

*(*) **Ejercicio 8.-** Hallar el área comprendida entre el gráfico de:*

a) $y=\operatorname{sen} x$ y el eje y para $0\le x\le \pi/2$ b) $y=\operatorname{sen} x$ y el eje x para $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$

Ejercicio 9.- Sea R la región encerrada por los gráficos de $y=\sqrt{2x+1}$; $y=0$; $x=24$. Hallar $a\in \mathrm{R}$ para que la recta $x=a$ divida a R en dos regiones de igual área.

*(*) **Ejercicio 10.-** Calcular*

a) $\displaystyle\int (\cos(2x))(\operatorname{sen}(2x)-1)^2\,dx$ b) $\displaystyle\int e^{2x}(e^{2x}+1)\operatorname{sen}(e^{2x}+1)\,dx$

Ejercicio 11.- El costo marginal de producir x unidades de cierta mercancía es $C'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x+4}}$, y el costo de producir una unidad es de $\$0,40$. Encontrar la función de costo, y lo que cuesta producir 9 unidades.

Ejercicio 12.- Hallar el excedente del consumidor de un artículo cuya función de demanda es $p(q)=\dfrac{15q+45}{q^2+6q+5}$, donde q indica miles de unidades, sabiendo que en el mercado mil unidades cuestan $\$5$.

Ejercicio 13.- La función de demanda de un producto es $D(q)=\dfrac{160}{\sqrt{8q+36}}$. Hallar el excedente de los consumidores sabiendo que el precio de equilibrio es $\$16$.

Ejercicio 14.- Marcar la única opción correcta

a) Si en la integral $\int e^{\sqrt{x}}dx$ se hace la sustitución $u=\sqrt{x}$, se obtiene

☐ $\int e^{u}\,du$ ☐ $\int \dfrac{e^{u}}{u}\,du$ ☐ $\dfrac{1}{2}\int \dfrac{e^{u}}{u}\,du$ ☐ $2\int ue^{u}du$

---

b) La función de ingreso marginal de un fabricante es $R'(q)=\dfrac{30\,000}{q^{2}}$, entonces el cambio que se produce en los ingresos totales cuando aumenta la producción de 100 a 500 unidades es

☐ 240 ☐ 80 ☐ aprox. $96{,}566$ ☐ 400

---

c) El área encerrada por las curvas $y=x^{2}-9$ e $y=-x^{2}+9$ es

☐ $\int_{-3}^{0} x^{2}-9\,dx+\int_{0}^{3} -x^{2}+9\,dx$ ☐ $\int_{-3}^{3} -x^{2}+9\,dx-\int_{-3}^{3} x^{2}-9\,dx$

☐ $\int_{-3}^{0} x^{2}-9\,dx-\int_{0}^{3} -x^{2}+9\,dx$ ☐ $\int_{-3}^{3} x^{2}-9\,dx+\int_{-3}^{3} x^{2}-9\,dx$

---

d) Si $\int_{0}^{3} 2f(x)+5\,dx=10$, entonces $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$ es igual a

☐ 0 ☐ -10 ☐ $\dfrac{5}{2}$ ☐ $-\dfrac{5}{2}$

---

e) Si la región encerrada por las rectas $y=2x+7$; $y=0$; $x=0$; $x=5$ queda dividida por la recta $x=a$ en dos regiones de igual área, entonces a vale

☐ 3 ☐ $2{,}5$ ☐ $3{,}5$ ☐ -10

---

f) El ingreso marginal por las ventas de determinado producto está dado por $R'(q)=\dfrac{2q+3}{q^{2}+3q+e^{2}}$. Si se sabe que el ingreso total es nulo cuando no hay ventas, entonces el ingreso total $R(q)$ es igual a

☐ $\ln(2q+3)$ ☐ $\ln(2q+3)-\ln 3$ ☐ $\ln\left(q^{2}+3q+e^{2}\right)$ ☐ $\ln\left(q^{2}+3q+e^{2}\right)-2$

---

g) La función de demanda de un producto es $p=D(q)=125-5\sqrt{q}$ (q indica la cantidad de unidades) y el punto de equilibrio es $(49 \text{ unidades}, \$90)$. Entonces el excedente del consumidor es igual a

☐ $\int_{0}^{49} 125-5\sqrt{q}dq$ ☐ $\int_{0}^{90} 76-5\sqrt{q}\,dq$ ☐ $\int_{0}^{49} 5\sqrt{q}-35\,dq$ ☐ $\int_{0}^{49} 35-5\sqrt{q}\,dq$

---

h) El área de la región encerrada por las curvas $y=2\sqrt{x}$; $y=6$; $x=0$ es

☐ $\int_{0}^{9} 6-2\sqrt{x}\,dx$ ☐ $\int_{0}^{6} 2\sqrt{x}\,dx$ ☐ $\int_{0}^{3} 6-2\sqrt{x}\,dx$ ☐ $\int_{0}^{9} 2\sqrt{x}\,dx$
