Capítulo 3

Determinantes

3.1. Cálculo de determinantes

El determinante de una matriz es un **número real** que se calcula a partir de sus coeficientes. Cuanto más grande sea la matriz, este cálculo va a requerir más cuentas. No vamos a ver una fórmula para calcular el determinante de una matriz de $n \times n$, sino que vamos a ver cómo calcularlo cuando la matriz es "chica" y a partir de esto cómo hacerlo para matrices más grandes. El primer paso, entonces, es calcularlo para matrices de 2×2.

Determinante de una matriz de 2×2

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ el determinante de A se calcula como

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

También se suele escribir $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ en lugar de $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1. Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución. Aplicando la fórmula, tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Respuesta: $\det(A) = -2$.

Determinante de matrices más grandes

El método que vamos a usar se llama **desarrollo por cofactores** y consiste en calcular el determinante de una matriz calculando determinantes de matrices de menor tamaño. Vamos a ilustrar el método aplicándolo para calcular el determinante de una matriz de 3×3.

> **Ejemplo 2.** Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución. Si tachamos la primera fila y la primera columna tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz que se formó se llama **menor** de A. Como proviene de tachar la fila 1 y la columna 1, lo notamos como M_{11}. Entonces,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48.$$

Los **cofactores** de la matriz se forman multiplicando a los menores por 1 o -1 dependiendo de la fila y columna que hayamos tachado. Si tachamos la fila i y la columna j, para obtener el cofactor se multiplica dicho menor por $(-1)^{i+j}$.
El cofactor correspondiente a M_{11} es

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \cdot (-48) = -48.$$

Si en cambio elegimos la fila 1 y la columna 2, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso,

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 6 \cdot 7 = -42$$

y el cofactor es

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \cdot (-42) = 42.$$

Si hacemos lo mismo con la fila 1 y la columna 3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el menor,

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3.$$

Ahora el cofactor es

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1 \cdot (-3) = -3.$$

El determinante de la matriz se puede calcular a partir de todos los cofactores de una misma fila o columna. Se obtiene multiplicando cada coeficiente de la fila (o columna) por el cofactor correspondiente y sumando estos valores. En este caso, el **desarrollo del determinante por la primera fila** es

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} &= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= 1(5 \cdot 0 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) \\
&= 1 \cdot 5 \cdot 0 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \\
&= 27.
\end{aligned}$$

Respuesta: $\det(A) = 27$.

También podríamos haber calculado el determinante usando otra fila o columna y obtendríamos el mismo resultado. **El valor del determinante no depende de la fila o columna por la que se desarrolle**. Si tomamos la segunda, por ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} &= 4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 6(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= -4(2 \cdot 0 - 3 \cdot 8) + 5(1 \cdot 0 - 3 \cdot 7) - 6(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) \\
&= -4 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 8 + 5 \cdot 1 \cdot 0 - 5 \cdot 3 \cdot 7 - 6 \cdot 1 \cdot 8 + 6 \cdot 2 \cdot 7 \\
&= 27.
\end{aligned}$$

Como podemos ver, en ambas formas de calcular el determinante aparecen los mismos sumandos, pero en distinto orden. Estos se forman eligiendo coeficientes de la matriz sin repetir filas ni columnas. El desarrollo por cofactores nos da una manera de calcular estos términos de forma ordenada y no olvidar ninguno.

Ejemplo 3. Calcular el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ desarrollando por la segunda columna.

Solución.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-2)(-4) + 0 + (-3)3 = -1.$$

Respuesta: $\det(A) = -1$.

Desarrollo por cofactores

El método es el siguiente. En primer lugar elegimos una fila (o columna) de la matriz. El determinante se obtiene multiplicando cada coeficiente de la fila (o columna) por el cofactor correspondiente y sumando estos valores.

Desarrollo por cofactores

El determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se calcula de las siguientes maneras.

Desarrollo por por la i-ésima fila:

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}.$$

Desarrollo por por la j-ésima columna:

$$\det(A) = a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}M_{nj}.$$

Ejemplo 4. Calcular $\det(A)$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución. Observemos que, al ser una matriz de 4×4, para calcular el determinante tendríamos que calcular varios determinantes de matrices de 3×3, que a su vez van a requerir calcular determinantes de 2×2. En este paso es clave elegir bien la fila o columna con respecto a la cual desarrollar. Cuando un coeficiente de la matriz es 0, nos ahorramos calcular el menor correspondiente a esa fila y columna. Por lo tanto **conviene siempre elegir una fila o columna con muchos ceros**. En el ejemplo, las mejores filas son la segunda y la tercera y las mejores columnas son la primera y la última. ¡Si en cambio usáramos la primera fila tendríamos que calcular 4 determinantes de 3×3! Desarrollemos por la primera columna. Tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ahora, calculamos cada uno de los determinantes que faltan.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Entonces tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-4) = -10.$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \det(A) = -10.}$

Observación. Para calcular el determinante de una matriz conviene elegir la fila o columna que tenga más ceros.

Como notamos en el ejemplo anterior cuanto más grande es la matriz más cuentas implica calcular el determinante. Por otro lado, cuanto más ceros tiene una matriz más fácil resulta el cálculo del determinante. Veamos una situación particular con muchos ceros. La siguiente es una matriz triangular, es decir, todos los coeficientes bajo la diagonal son 0. En este caso el cálculo del determinante es muy simple.

Ejemplo 5. Calcular $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Solución. Si desarrollamos por la primera columna, tenemos que calcular un único determinante de 4×4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Seguimos por la primera columna otra vez,

$$2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Una vez más,

$$2\cdot 1\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3\cdot 4\cdot 2 = 48.$$

Respuesta: El determinante es igual a 48.

Por la forma de la matriz el determinante resultó ser el producto de los coeficientes de la diagonal. Es fácil ver que eso mismo sucede con cualquier matriz triangular superior o inferior.

Propiedad

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz tal que todos los coeficientes abajo (o arriba) de la diagonal son iguales a 0 entonces, el determinante es el producto de los coeficientes de la diagonal.

Teniendo en cuenta lo anterior, es muy fácil calcular el siguiente determinante.

Ejemplo 6. Calcular $\det(A)$ para $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & \pi & e & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \pi^2 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & 5 & 21 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & \frac{2}{5} & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 71 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución. Como todos los coeficientes de abajo de la diagonal de la matriz A son iguales a 0, por la propiedad anterior, tenemos que

$$\det(A) = 4\cdot 2\cdot 1\cdot 9\cdot 3\cdot 1\cdot 2 = 432.$$

Respuesta: $\det(A) = 432$.

3.2. Propiedades del determinante

El determinante y el escalonamiento de una matriz

Como vimos en ejemplos anteriores, cuantos más ceros tenga una matriz más fácil resulta calcular el determinante. Mediante operaciones sobre filas podemos generar ceros en una matriz. Nos será muy útil ver como esas operaciones afectan a su determinante.

Propiedades

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Si A' es la matriz que resulta de multiplicar una fila de A por un número k, entonces $\det(A') = k\det(A)$.
2. Si A' es la matriz que resulta de intercambiar dos filas de A entonces $\det(A') = -\det(A)$.
3. Si A' es la matriz que resulta de sumarle a una fila de A un múltiplo de otra entonces $\det(A') = \det(A)$.

Las mismas propiedades valen para operaciones por columnas en lugar de filas, pero como en general vamos a estar trabajando con la matriz asociada a un sistema de ecuaciones hay que tener mucha precaución al realizar operaciones entre columnas (en lo posible las vamos a evitar).

Ejemplo 1. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Sabiendo que $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2g & 2h & 2i \\ d+a & e+b & f+c \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

Solución. La idea es analizar cómo, mediante operaciones sobre filas, llegar hasta la matriz de la que conocemos el determinante. Podemos empezar por usar la propiedad 3, ya que la segunda fila de la matriz tiene sumando una copia de la tercera fila

$$\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ d+a & e+b & f+c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Ahora, si usamos la propiedad 1,

$$\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Por último, si intercambiamos la primera fila y la última llegamos a la matriz original. Por la propiedad 2 esta operación cambia el signo del determinante. Entonces,

$$\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ d+a & e+b & f+c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6.$$

$\boxed{\text{Respuesta: El determinante es igual a } -6.}$

También podemos aprovechar estas propiedades para calcular más fácilmente determinantes de matrices con pocos ceros.

Ejemplo 2. Calcular $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$.

Solución. Podríamos calcular este determinante de manera directa desarrollando por una fila o columna, pero como esta matriz tiene pocos ceros requeriría calcular varios determinantes más. Sin embargo podemos generar algunos ceros más mediante operaciones entre las filas de la matriz. Si a la fila 2 le restamos la 1, obtenemos una matriz con más ceros y el mismo determinante. Así,

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Desarrolando por la segunda fila,

$$\begin{aligned} &= 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -3 \left(2(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right) \\ &= -3(-2+4) = -6. \end{aligned}$$

Respuesta: El determinante es igual a -6.

El determinante y las operaciones con matrices

Veamos cómo afectan al determinante otras operaciones que podemos realizar con matrices. Sabemos qué ocurre al multiplicar una única fila de una matriz por un número. Multiplicar a la matriz por un número equivale a multiplicar **todas** las filas. Podemos deducir lo siguiente:

Determinante y producto por un número

Si $k \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Observar que k aparece elevado a la n porque k multiplica a cada una de las filas de A y n es la cantidad de filas de la matriz.

Ejemplo 3. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A) = 5$, calcular $\det(2 \cdot A)$.

Solución. Usando la propiedad anterior, $\det(2 \cdot A) = 2^3 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$.

Determinante y producto de matrices

Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Ejemplo 4. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(A) = 5$ y $B = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. Calcular $\det(A \cdot B)$.

Solución. Para calcular el determinante de $A \cdot B$, calculamos primero el determinante de B desarrollando por la última fila:

$$\begin{aligned} \det(B) &= 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3(-2) = -6. \end{aligned}$$

Ahora, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 5 \cdot (-6) = -30$.

De la propiedad anterior podemos deducir una para potencias de matrices.

Potencia de matrices

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces $\det(A^m) = (\det(A))^m$.

Ejemplo 5. Si $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ tal que $\det(A) = 4$, calcular $\det(A^3)$.

Solución. Tenemos que

$$\det(A^3) = \det(A \cdot A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^3 = 4^3 = 64.$$

Determinante de la matriz inversa

Recordemos que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si existe otra matriz, que escribimos como A^{-1}, tal que $AA^{-1} = \mathbb{I}_n$, donde $\mathbb{I}_n$ es la matriz identidad. Como la matriz identidad es diagonal, se puede calcular el determinante de forma simple: es el producto de los coeficientes de la diagonal, es decir,

$$\det(\mathbb{I}_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Si combinamos esto con las propiedades anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned} \det(AA^{-1}) &= \det(\mathbb{I}_n) \\ \det(A)\det(A^{-1}) &= 1. \end{aligned}$$

Notemos que, como el producto de ambos determinantes da 1, ninguno puede ser igual a 0 (y podemos dividir por el determinante de A).

Por lo tanto, el determinante de A y de A^{-1} verifican la siguiente relación.

Determinante e inversa

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Observación.

No hay ninguna propiedad que relacione el determinante y la suma de matrices. En general suele pasar que $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$. De hecho, esto es así en casi cualquier ejemplo. Si tomamos, por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que $\det(A) = \det(B) = 0$ y $\det(A + B) = 1$.

Repasemos las propiedades vistas.

Ejemplo 6. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Sabiendo que $\det(A) = 3$ y $\det(B) = -2$ calcular el determinante de $2A^2B^{-1}$.

Solución. Podemos calcular el determinante usando las propiedades. Sabemos que

$$\det(2A^2B^{-1}) = \det(2A^2)\det(B^{-1}).$$

Como son matrices de 4×4,

$$\begin{aligned} \det(2A^2)\det(B^{-1}) &= 2^4\det(A^2)\det(B^{-1}) \\ &= 16(\det(A))^2\frac{1}{\det(B)}. \end{aligned}$$

Si reemplazamos por las valores que conocemos, obtenemos que

$$\det(2A^2B^{-1}) = 16 \cdot 3^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -72.$$

Respuesta: $\det(2A^2B^{-1}) = -72$.

3.3. Aplicación del determinante

Ahora veremos la principal aplicación que le vamos a dar al determinante. Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz asociada a un sistema de ecuaciones, $Ax = b$. Como la matriz es cuadrada, es un sistema con igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas. Para saber si el sistema tiene solución única tendríamos que escalonarlo y ver que ninguna fila de la matriz de coeficientes se anula. El determinante nos permite decidir si el sistema es compatible determinado sin necesidad de escalonar la matriz.
El determinante de una matriz escalonada se calcula simplemente como el producto de los coeficientes de la diagonal. Entonces, si la matriz tiene una fila de ceros, el determinante es 0. En cambio, el determinante de una matriz escalonada que no tiene ninguna fila de ceros es algún número distinto de 0.
El determinante de la matriz A puede ser distinto al de la matriz luego de escalonarla, porque las operaciones por filas afectan al determinante, pero solo lo modifican por un factor distinto de cero. Es decir, no puede pasar que el determinante de la matriz original sea igual a 0 y el de la escolanada no y viceversa.
Es decir, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y A' es la matriz luego de escalonarla, $\det(A) = 0$ si y sólo si $\det(A') = 0$. Esto nos da una manera de identificar sistemas compatibles determinados sin escalonarlos.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces el sistema $Ax = b$ tiene solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
Si $\det(A) = 0$ entonces el sistema es incompatible o compatible indeterminado.

En el caso de matrices cuadradas, que un sistema sea compatible determinado equivale a que la matriz del sistema sea inversible. Entonces tenemos que:

Teorema

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Observación.

El determinante nos permite saber si el sistema es compatible determinado o si la matriz es inversible, pero no nos permite distinguir entre sistemas incompatibles o compatibles indeterminados.

Para terminar, veamos cómo aplicar estos teoremas en algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Decidir si son inversibles.

Solución. Para decidir si las matrices son inversibles, calculamos sus determinantes. Para el caso de A tenemos, desarrollando por la segunda columna,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 + 8 = 10. \end{aligned}$$

Entonces, como $\det(A) \neq 0$, concluimos que A es inversible. Si calculamos el determinante de B, tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-2) = 0.$$

Como $\det(B) = 0$, B no es inversible.

Respuesta: A es inversible y B no es inversible.

Ejemplo 2. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ k+1 & k+3 & 2 \\ k+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ es inversible.

Solución. Podemos empezar por calcular el determinante de A y luego ver para qué valores de k es igual a 0. Estos son los valores para los cuales A **no** es inversible.
Desarrollando por la primera fila tenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ k+1 & k+3 & 2 \\ k+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= k \begin{vmatrix} k+3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} k+1 & 2 \\ k+1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} k+1 & k+3 \\ k+1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= k(2(k+3) - 4) - 2(0) + 1(2(k+1) - (k+3)(k+1)) \\ &= k^2 - 1. \end{aligned}$$

Busquemos ahora para qué valores de k resulta que $\det(A) = 0$. Resolvemos,

$$\det(A) = k^2 - 1 = 0$$

Las soluciones son $k = 1$ y $k = -1$, por lo tanto concluimos que:

Respuesta: A es inversible si y solo si $k \neq -1$ y $k \neq 1$.

Ejemplo 3. Sea $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ k+1 & k+3 & 2 \\ k+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determinar, para cada $k \in \mathbb{R}$, cuántas soluciones tiene el sistema $Ax = b$. Resolverlo en los casos que tenga infinitas soluciones.

Solución. Nuevamente, podemos resolver el problema usando determinantes. Recordemos que si $\det(A) \neq 0$ el sistema es compatible determinado. Como la matriz es la misma que en el ejemplo anterior, sabemos que $\det(A) = 0$ si y sólo si $k = -1$ o $k = 1$. Por lo tanto podemos afirmar que si $k \neq -1, 1$ el sistema es compatible determinado, es decir que tiene solución única. Nos quedan por ver los casos $k = -1$ y $k = 1$. En estos casos el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible. El determinante **no nos sirve para diferenciar esos casos**, pero podemos simplemente reemplazar por esos valores de k en el sistema y ver cuántas soluciones tiene.
Si $k = -1$, la matriz ampliada del sistema queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Reemplazando la fila 3 por ésta menos la fila 2,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Entoces, para $k = -1$ el sistema resulta incompatible.
Ahora, con $k = 1$, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right),$$

y, si la escalonamos,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Entonces, para $k = 1$ el sistema resulta compatible indeterminado. Como tiene infinitas soluciones vamos a resolverlo. En este caso, tenemos 2 ecuaciones y 3 incógnitas, por lo tanto podemos expresar las soluciones en términos de una sola de las incógnitas. Si volvemos a las ecuaciones tenemos

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1, \\ -2x_2 & = & 1. \end{cases}$$

De la última ecuación, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Reemplazamos en la primera,

$$x_1 + 2(-\frac{1}{2}) + x_3 = 1$$

y despejamos x_1 en función de x_3:

$$x_1 = 1 - x_3 + 1 = 2 - x_3.$$

Una solución del sistema es de la forma:

$$(2 - x_3, -\frac{1}{2}, x_3) \text{ con } x_3 \in \mathbb{R}.$$

Concluimos entonces que:

Respuesta:

- Si $k \neq -1, 1$ es un SCD.
- Si $k = -1$ es un SI.
- Si $k = 1$ es un SCI y el conjunto de soluciones es $\left\{ x_3(-1, 0, 1) + (2, -\frac{1}{2}, 0) \ : \ x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Ejemplo 4. Sea $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el sistema $A^2x = Ax$ tiene infinitas soluciones.

Solución. La idea es resolver el problema usando determinantes. Como hicimos antes, vamos a calcular el determinante de la matriz del sistema y calcular para qué valores de k es cero. Antes que nada, tenemos que determinar cuál es la matriz del sistema. Si lo miramos atentamente no está escrito como $Ax = b$, porque las incógnitas x aparecen de ambos lados de la igualdad. Lo primero entonces, es agrupar las incógnitas.

$$\begin{aligned} A^2x &= Ax \\ A^2x - Ax &= 0 \\ (A^2 - A)x &= 0. \end{aligned}$$

Ahora sí, vemos que la matriz del sistema es $A^2 - A$ y tenemos que calcular $\det(A^2 - A)$. Acá tenemos dos opciones: o calculamos la matriz $A^2 - A$ y después el determinante, o factorizamos y usamos la propiedad que relaciona el determinante y el producto. Sigamos la segunda opción. Factorizamos,

$$A^2 - A = A(A - \mathbb{I}).$$

Recordar que la matriz identidad cumple el rol de 1 en el producto de matrices. Entonces,

$$\det(A(A - \mathbb{I})) = \det(A)\det(A - \mathbb{I}).$$

Los calculamos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k(-1) - 1 = -k - 1.$$

y

$$\det(A - I) = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (k-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (k-1)(-2) = -2k + 2.$$

Entonces,

$$\det(A^2 - A) = \det(A)\det(A - \mathbb{I}) = (-k-1)(-2k+2).$$

Si igualamos a cero, tenemos que

$$(-k-1)(-2k+2) = 0$$
$$k = -1 \text{ o } k = 1.$$

Por lo tanto, si k toma esos valores el sistema es compatible indeterminado o incompatible. Observemos que el sistema es **homogéneo** (todas las ecuaciones están igualadas a cero) y por lo tanto **no puede ser incompatible**. Entonces la única opción que nos queda es que es un sistema compatible indeterminado.

Respuesta: El sistema tiene infinitas soluciones si $k = -1$ o $k = 1$.

Un comentario final

Como vimos, el determinante es una herramienta que nos permite clasificar sistemas de ecuaciones cuadrados sin escalonar (o sin terminar de escalonar). Pero, por otro lado, puede implicar muchos cálculos. Cuál es la solución más conveniente a un problema depende del problema y es algo que habrá que decidir en cada caso.