

PRÁCTICA 1

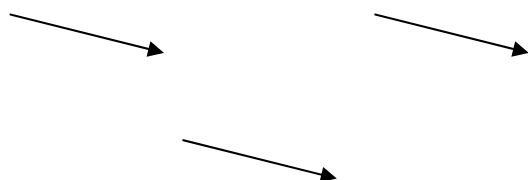
VECTORES EN $\mathbb{R}^2$ y EN $\mathbb{R}^3$

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Una flecha, que sirve para representar cantidades físicas (fuerzas, velocidades), es un *vector*.

Para dar un vector necesitamos un *origen* (A) y un *extremo* (B) que lo determinan totalmente, proporcionando su dirección, longitud y sentido.

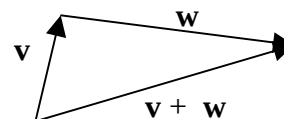
Vectores equivalentes son los que tienen igual dirección, longitud y sentido.



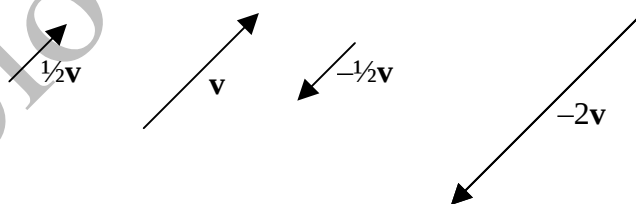
Los vectores de la izquierda son todos equivalentes a $\mathbf{v}$.

Los vectores se pueden sumar.

La suma ($\mathbf{v} + \mathbf{w}$), de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es equivalente a una de las diagonales del paralelogramo de lados $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.



También se puede multiplicar un vector por un número (escalar).

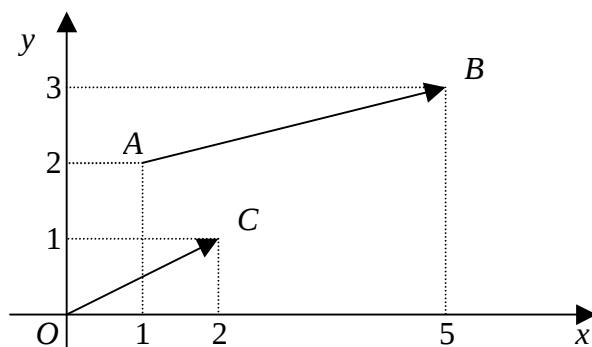


El resultado es un vector de igual dirección que el dado, el número afecta la longitud y el sentido del vector.

En el plano $\mathbb{R}^2$ los puntos están dados por pares de números reales (sus coordenadas); para dar un vector bastará dar dos pares de números reales que caractericen su origen y su extremo.

$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ está dado por $A = (1,2)$ y $B = (5,3)$

$\mathbf{w} = \overrightarrow{OC}$ está dado por $O = (0,0)$ y $C = (2,1)$



Algo análogo se puede decir en el espacio de tres dimensiones $\mathbb{R}^3$; ahora, cada punto, en particular el origen y el extremo de un vector, estará dado por una terna de números reales.

$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ está dado por

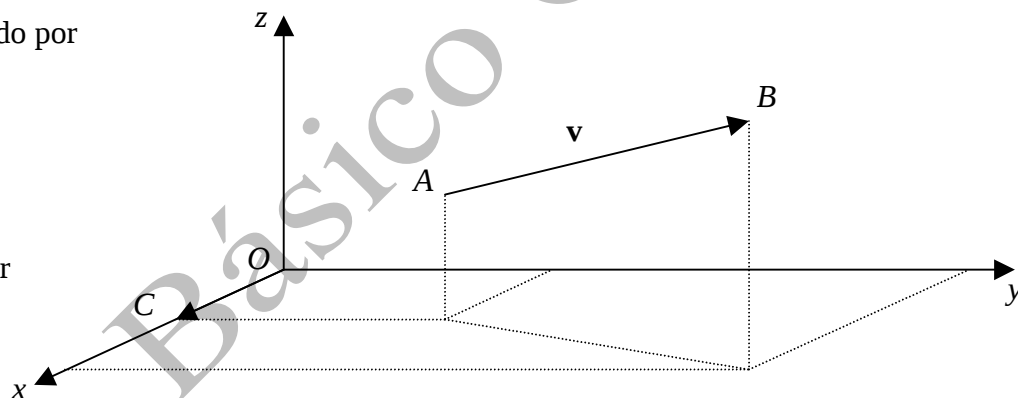
$A = (2,4,3)$ y

$B = (4,10,6)$

$\overrightarrow{OC}$ está dado por

$O = (0,0,0)$ y

$C = (2,0,0)$



En adelante trabajaremos con vectores cuyo origen O tiene todas sus coordenadas iguales a cero ($O = (0,0)$ en $\mathbb{R}^2$, $O = (0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$) identificando entonces el punto A con la flecha $\overrightarrow{OA}$.

Dados A y B en $\mathbb{R}^2$, $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, definimos

la suma

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \text{ y}$$

el producto por un escalar $c \in \mathbb{R}$ $cA = (ca_1, ca_2)$.

Análogamente, en $\mathbb{R}^3$, si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$

la suma

$$A + B = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \text{ y}$$

el producto por un escalar $c \in \mathbb{R}$ $c A = (ca_1, ca_2, ca_3)$.

Propiedades:

$$1) A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$2) A + B = B + A$$

$$3) \text{ Si } c \in \mathbb{R}, \quad c(A+B) = cA + cB$$

$$4) \text{ Si } c_1 \in \mathbb{R} \text{ y } c_2 \in \mathbb{R}, \quad (c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A \text{ y } (c_1 c_2)A = c_1(c_2A)$$

$$5) O + A = A$$

$$6) 1A = A$$

$$7) A + (-1)A = O$$

$$\text{Notación } -A = (-1)A$$

$$8) 0A = O$$

En este contexto,

a) $\overline{AB}$ es equivalente a $\overline{CD}$ si y sólo si $D - C = B - A$; en particular,

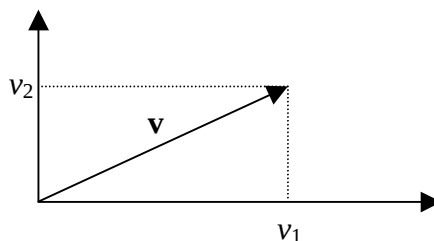
$\overline{AB}$ es equivalente a $\overline{OP}$ si y sólo si $P = B - A$.

b) $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son *paralelos* o tienen igual dirección si existe k en $\mathbb{R}$, $k \neq 0$ tal que

$$B - A = k(D - C).$$

Si $k > 0$, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tienen igual sentido; si $k < 0$, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tienen sentidos opuestos.

LONGITUD DE UN VECTOR



En $\mathbb{R}^2$, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, la *norma* o *longitud* de $\mathbf{v}$, que notaremos $\|\mathbf{v}\|$, es $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Análogamente, en $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ la *norma* o *longitud* de $\mathbf{v}$ es $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Propiedades:

1) Si $A = O$, entonces $\|A\| = 0$; si $A \neq O$, entonces $\|A\| > 0$.

$$2) \|A\| = \|-A\|$$

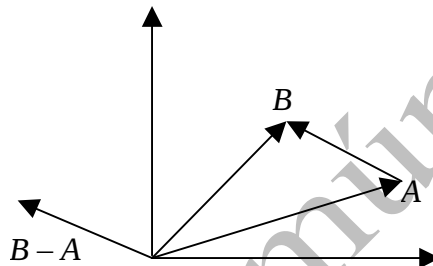
$$3) \text{ Si } c \in \mathbb{R} \quad \|cA\| = |c| \|A\|.$$

$$4) \text{ Desigualdad triangular: } \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Si A y B son dos puntos de $\mathbb{R}^2$, la *distancia* entre A y B es la longitud del vector $B - A$

(equivalente a $\overline{AB}$) y se nota

$$d(A,B) = \|B - A\|$$



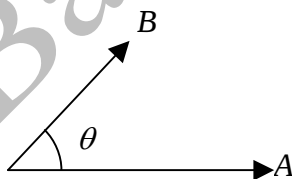
Análogamente, en $\mathbb{R}^3$, la *distancia* entre dos puntos A y B es

$$d(A,B) = \|B - A\|$$

Un vector A se dice *unitario* si $\|A\| = 1$.

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Llamaremos *ángulo* entre A y B al ángulo $\theta(A,B)$ que determinan los dos vectores y verifica $0 \leq \theta(A,B) \leq \pi$.



PRODUCTO INTERNO O ESCALAR

Dados dos vectores A y B llamaremos *producto interno (o escalar)* de A y B al número real

$$A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos \theta \quad (\theta = \theta(A,B)).$$

Propiedad:

$$A \cdot B = \frac{1}{2} (\|B\|^2 + \|A\|^2 - \|B - A\|^2)$$

En particular si A y B son vectores en el plano, $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

En $\mathbb{R}^3$, si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Observaciones: 1) El producto escalar de dos vectores es un número real.

$$2) \|A\| = \sqrt{A \cdot A}$$

Propiedades:

$$\text{PE1.- } A \cdot B = B \cdot A$$

$$\text{PE2.- } A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = (B + C) \cdot A$$

$$\text{PE3.- Si } k \in \mathbb{R}, (kA) \cdot B = k(A \cdot B) = A \cdot (kB)$$

$$\text{PE4.- Si } A = O, A \cdot A = 0. \quad \text{Si } A \neq O, A \cdot A > 0$$

$$\text{PE5.- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: } |A \cdot B| \leq \|A\| \|B\|$$

De PE5 se deduce que si A y B son ambos distintos de cero, vale

$$-1 \leq \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} \leq 1$$

Propiedad: el *ángulo entre dos vectores* A y B ($\theta = \theta(A, B)$) es el único ángulo θ entre 0 y π que verifica

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|}$$

Diremos que dos vectores A y B son *ortogonales* o *perpendiculares* si $A \cdot B = 0$.

PRODUCTO VECTORIAL

Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, el *producto vectorial* de A y B es:

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Observación: El producto vectorial de dos vectores de $\mathbb{R}^3$ es un vector de $\mathbb{R}^3$.

Propiedades:

$$\text{PV1.- } A \times B = -B \times A$$

$$\text{PV2.- } A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$(B + C) \times A = B \times A + C \times A$$

$$\text{PV3.- Si } k \in \mathbb{R}, (kA) \times B = k(A \times B) = A \times (kB)$$

PV4.- $A \times A = O$

PV5.- $A \times B$ es perpendicular a A y a B

PV6.- $\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$

PV7.- $\|A \times B\| = \|A\| \|B\| |\sin \theta|$ donde θ es el ángulo formado por A y B .

Observación:

De PV7 se deduce que $\|A \times B\|$ es el área del paralelogramo de vértices $O, A, B, A + B$.

RECTAS

Dados en el plano $\mathbb{R}^2$ un vector A y un punto P la *ecuación paramétrica* de la recta L que

pasa por P en la dirección de A es:

$$X = tA + P \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Si $A = (a_1, a_2)$ y $P = (p_1, p_2)$,

se escribe: $(x, y) = t(a_1, a_2) + (p_1, p_2)$

$$\text{ó } \begin{cases} x = t a_1 + p_1 \\ y = t a_2 + p_2 \end{cases}$$

Si $c = a_2 p_1 - a_1 p_2$, la recta L es el conjunto de soluciones de la ecuación

$$a_2 x - a_1 y = c$$

Para describir una recta en $\mathbb{R}^2$ podemos utilizar la ecuación paramétrica $X = tA + P$

(donde $X = (x, y)$) o utilizar la ecuación implícita $ax + by = c$.

Dados en $\mathbb{R}^3$ un vector A y un punto P la *ecuación paramétrica* de la recta L que pasa por P

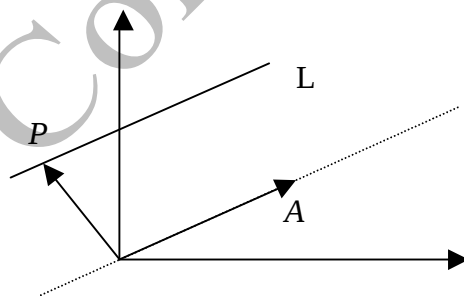
en la dirección de A es:

$$X = tA + P \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $P = (p_1, p_2, p_3)$ tenemos

$$(x, y, z) = t(a_1, a_2, a_3) + (p_1, p_2, p_3)$$

$$\text{ó } \begin{cases} x = t a_1 + p_1 \\ y = t a_2 + p_2 \\ z = t a_3 + p_3 \end{cases}$$



Si $c = a_2 p_1 - a_1 p_2$ y $d = a_3 p_2 - a_2 p_3$, la recta L es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} a_2 x - a_1 y = c \\ a_3 y - a_2 z = d \end{cases}$$

Para describir una recta en $\mathbb{R}^3$ podemos utilizar la ecuación paramétrica $X = t A + P$ (donde $X = (x, y, z)$) o un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas.

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Para definir el ángulo entre dos rectas usamos sus vectores dirección, eligiendo entre los ángulos que éstos forman, el único θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Dos rectas en $\mathbb{R}^2$ ó en $\mathbb{R}^3$ son *perpendiculares* si sus direcciones lo son.

Dos rectas en $\mathbb{R}^2$ ó en $\mathbb{R}^3$ son *paralelas* si sus direcciones lo son.

PLANOS EN $\mathbb{R}^3$

Dados un vector N y un punto Q de $\mathbb{R}^3$, la *ecuación del plano* Π que pasa por Q y es

perpendicular a N es $\Pi : (X - Q) \cdot N = 0$

El plano es el conjunto de todos los puntos X tales que $(X - Q)$ es perpendicular a N .

Diremos que N es un *vector normal* al plano.

Si $X = (x_1, x_2, x_3)$ y $N = (a, b, c)$, la ecuación resulta:

$$\Pi: a x_1 + b x_2 + c x_3 = d \quad \text{donde } d = Q \cdot N$$

Dos planos son *paralelos* si sus vectores normales lo son.

Una recta es *paralela a un plano* si el vector dirección de la recta y el vector normal al plano son perpendiculares.

Dados un punto P y un plano Π cuya normal es N , se define *distancia de P a Π* como la distancia de P a P' , donde P' es el punto de intersección del plano Π con la recta de dirección N que pasa por P .

Si Q es un punto en el plano, esta distancia es: $d(P, \Pi) = \frac{|(Q - P) \cdot N|}{\|N\|}$.

Si $P = (x_0, y_0, z_0)$ y $\Pi: ax + by + cz = k$ entonces: $d(P, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

En el desarrollo de la práctica, para simplificar la notación, suprimiremos las flechas arriba de los vectores.

VECTORES EN $\mathbb{R}^n$

Llamaremos *punto o vector* en el espacio $\mathbb{R}^n$ a la n -upla

$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ donde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son números reales.

Estos números son las *coordenadas* de X .

Si $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$

decimos que $A = B$ si y sólo si $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_n = b_n$.

Definimos la *suma* $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ y

el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ $cA = (ca_1, ca_2, ca_3, \dots, ca_n)$.

Propiedades:

$$1) A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$2) A + B = B + A$$

$$3) \text{ Si } c \in \mathbb{R}, c(A+B) = cA + cB$$

$$4) \text{ Si } c_1 \in \mathbb{R} \text{ y } c_2 \in \mathbb{R}, (c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A \text{ y } (c_1 c_2)A = c_1(c_2A)$$

$$5) O + A = A$$

$$6) 1A = A$$

$$7) A + (-1)A = O \quad \text{Notación } -A = (-1)A$$

$$8) 0A = O$$

Llamaremos *norma* de $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ al número

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Propiedades:

$$1) \text{ Si } A = O, \text{ entonces } \|A\| = 0; \text{ si } A \neq O, \text{ entonces } \|A\| > 0.$$

$$2) \|A\| = \|-A\|$$

$$3) \text{ Si } c \in \mathbb{R} \quad \|cA\| = |c| \|A\|.$$

$$4) \text{ Desigualdad triangular: } \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Si $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$, llamaremos *distancia* entre A y B a la longitud del vector AB

$$d(A, B) = \|B - A\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

Si $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ llamaremos *producto escalar* de A y B al número real

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Propiedades:

PE1.- $A \cdot B = B \cdot A$

PE2.- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C = (B + C) \cdot A$

PE3.- Si $k \in \mathbb{R}$, $(kA) \cdot B = k(A \cdot B) = A \cdot (kB)$

PE4.- Si $A = O$, $A \cdot A = 0$. Si $A \neq O$, $A \cdot A > 0$

PE5.- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|A \cdot B| \leq \|A\| \|B\|$

Dados en $\mathbb{R}^n$ un vector A y un punto P la *ecuación paramétrica* de la recta L que pasa por P en la dirección de A es:

$$X = tA + P \quad (t \in \mathbb{R}).$$

EJERCICIOS

Ejercicio 1.- Efectuar las operaciones indicadas.

a) $A + B$; $A + 2B$; $A - B$; $A + (1/2)B$; $A - 3B$, si $A = (3, 2)$ y $B = (2, 4)$

b) $A - 3B$; $A + C - B$; $2A - 2(C + B)$, si $A = (1, 2, 0)$; $B = (2, 0, 0)$ y $C = (1, 1, 1)$

Ejercicio 2.- Hallar, si es posible, x ; y ; z tales que

a) $(x, x + 1) = (3, y)$

b) $(2x + y, x - 2y) = (1, 3)$

c) $(2, 4) = (2x + y, x - 2y)$

d) $(1, 2, 3) = x(2, 4, 3) + y(1, 2, 12) + z(0, 0, 3)$

Ejercicio 3.- Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento AB para

a) $A = (-2, -1)$; $B = (4, -1)$

b) $A = (1, 0, 5)$; $B = (2, 4, 7)$

Ejercicio 4.- Calcular la longitud de los vectores

$$(3,0); (2,1); (-3,-4); (\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}); (-2,3,0); 3(2,3,6)$$

Ejercicio 5.- Graficar en el plano el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y)\| = 1\}$

Ejercicio 6.- Hallar la distancia entre A y B si

$$\text{a) } A = (1,-3); B = (4,1) \quad \text{b) } A = (4,-2,6); B = (3,-4,4) \quad \text{c) } A = (1,2,-3); B = (3,-2,0)$$

Ejercicio 7.- Determinar todos los valores de k tales que

$$\text{a) } \|A\| = 2 \quad \text{si } A = (1, k, 0)$$

$$\text{b) } d(A, B) = 2 \quad \text{si } A = (1,1,1); B = (k,-k,2)$$

$$\text{c) } \|A\| = 1 \quad \text{si } A = k(2,2,1)$$

Ejercicio 8.- Si $\mathbf{v} = (2,-1,1)$; $\mathbf{w} = (1,0,2)$; $\mathbf{u} = (-2,-2,1)$, calcular

$$\text{a) } \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$$

$$\text{b) } \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

$$\text{c) } \|3\mathbf{v} + 3\mathbf{w}\|$$

$$\text{d) } \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

$$\text{e) } \left\| \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w} \right\|$$

$$\text{f) } \|\mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{u}\|$$

Ejercicio 9.- En cada caso encontrar los dos vectores unitarios paralelos a A

$$\text{a) } A = (3,-1)$$

$$\text{b) } A = (0,3,0)$$

$$\text{c) } A = (2,-3,6)$$

$$\text{d) } A = (a,b,c)$$

Ejercicio 10.- a) Sean $A = (1,2)$; $B = (-1,-2)$; $C = (-2,1)$; $D = (1,0)$; $E = (0,0)$; $F = (x, y)$

$$\text{Calcular } A \cdot B; \quad A \cdot C; \quad A \cdot E; \quad B \cdot C;$$

$$B \cdot (C + D); \quad (D - C) \cdot A; \quad F \cdot A; \quad F \cdot E$$

b) Sean $A = (1,1,1)$; $B = (1,-1,0)$; $C = (2,-1,-1)$; $D = (2,3,-1)$; $E = (-1,0,2)$

$$\text{Calcular } A \cdot B; \quad A \cdot C; \quad A \cdot (B + C); \quad A \cdot (2B - 3C);$$

$$A \cdot D; \quad A \cdot E; \quad D \cdot (A + E)$$

Ejercicio 11.- a) Encontrar y representar en el plano todos los vectores (x, y) ortogonales a

$$\text{i) } A = (1,2)$$

$$\text{ii) } E_1 = (1,0)$$

$$\text{iii) } E_2 = (0,1)$$

b) encontrar todos los vectores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a

$$\text{i) } E_1 = (1,0,0)$$

$$\text{ii) } E_2 = (0,1,0)$$

$$\text{iii) } E_3 = (0,0,1)$$

iv) E_1 y E_2 v) E_1 y E_3 vi) E_2 y E_3

Ejercicio 12.- Dados $A = (1, -2)$ y $B = (3, 4)$, hallar todos los vectores (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tales que $A \cdot (x, y) = A \cdot B$

Ejercicio 13.- a) Encontrar un vector ortogonal a $(1, 1)$ de longitud 8, ¿es único?

b) encontrar todos los vectores ortogonales a $(0, 0, 1)$ de longitud 1; dibujarlos.

c) Encontrar un vector que sea ortogonal a A y a B si $A = (1, 2, -1)$ y $B = (2, 0, 1)$

Ejercicio 14.- Hallar el ángulo que forman A y B en los siguientes casos

a) $A = (1, 1)$; $B = (-1, 0)$

b) $A = (1, 2)$; $B = (-2, 1)$

c) $A = (1, \sqrt{3})$; $B = (-2, 2\sqrt{3})$

d) $A = (2, 1, 1)$; $B = (1, -1, 2)$

Ejercicio 15.- En cada caso, encontrar B tal que

a) si $A = (1, 1)$, $\alpha(A, B) = \pi / 4$ y $\|B\| = 2$

b) si $A = (-1, 0)$, $\alpha(A, B) = \pi / 3$ y $\|B\| = 1$

Ejercicio 16.- Sea A un vector de longitud 3. Si B es un vector tal que $\alpha(A, B) = \pi / 4$ y $(A - B)$ es ortogonal a A , calcular $\|B\|$.

Ejercicio 17.- Encontrar una ecuación paramétrica de

a) la recta que pasa por $(1, 3, -1)$ y tiene dirección $(1, -2, 2)$

b) la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(2, 3)$

c) la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a

$$A = (2, -2, 1) \text{ y } B = (-3, 2, 1)$$

d) dos rectas distintas L_1 y L_2 que pasen por $(-2, 1, 2)$ y sean perpendiculares a la recta

$$L: X = \mu(2, 2, -2) + (1, 0, 1)$$

Ejercicio 18.- Encontrar la intersección de cada par de rectas

$$a) X = \mu(2, 2, 2) + (1, 0, 0)$$

$$X = \mu(-1, -1, -1) + (0, -1, -1)$$

$$b) X = \mu(1, 3, 1) + (0, -1, 2)$$

$$X = \mu(2, -1, 0) + (1, 1, 2)$$

$$c) X = \lambda(2, -2, 1) + (3, 0, 2)$$

$$X = \lambda(2, 1, -1) + (-1, 1, 2)$$

Ejercicio 19.- Si $A = (1,2,2)$; $B = (-1,1,2)$; $C = (-2,2,-1)$, calcular

$$A \times B; \quad B \times A; \quad A \times C; \quad A \times (B \times C); \quad (A \times B) \times C; \quad (A \times B) \cdot A; \quad (A \times B) \cdot C$$

Ejercicio 20.- Hallar $\mathbf{v}$, de norma 1, que sea ortogonal a $A = (1,1,1)$ y a $B = (1,1,-1)$

Ejercicio 21.- Calcular el área de

a) el paralelogramo de vértices O , A , B y $(A + B)$ si $A = (2,1,0)$ y $B = (1,5,0)$

b) el triángulo de vértices $A = (1,3,2)$; $B = (1,5,0)$ y $C = (1,1,-2)$

Ejercicio 22.- Dar una ecuación del plano Π .

a) Π es perpendicular a $N = (1,2,-1)$ y pasa por $P = (5,3,3)$

b) Π contiene a los puntos $A = (2,-1,3)$; $B = (2,1,1)$ y $C = (3,3,2)$

c) Π contiene a los ejes x e y

d) Π es paralelo al plano $\Pi': 3x + y - 4z = 2$ y pasa por el punto $P = (1,1,-2)$

Ejercicio 23.- Sean $\Pi: 2x - y + 3z = 5$; $\Pi': x + 3y - z = 2$

$$L: X = \alpha(1,-1,-1) + (1,0,-2); \quad L': X = \alpha(3,5,1) + (0,1,2).$$

Calcular: $L \cap \Pi$; $L' \cap \Pi$; $\Pi \cap \Pi'$.

Ejercicio 24.- Sean $L: X = \beta(k^2 + 1, k, k+7)$ y $\Pi: x + 2y - 3z = 2$.

Determinar todos los valores de k para los cuales $L \cap \Pi = \emptyset$

Ejercicio 25.- Si $L: X = \alpha(1,-1,3) + (0,2,1)$ y $A = (1,2,-3)$,

a) hallar una ecuación del plano Π que contiene a L y al punto A

b) hallar una ecuación de la recta L' perpendicular a Π que pasa por A

c) calcular $L \cap \Pi$ y $L' \cap \Pi$.

Ejercicio 26.- a) Dar una ecuación del plano Π que contiene a las rectas

$$L: X = \lambda(1,2,-1) + (3,0,0) \quad \text{y} \quad L': X = \lambda(-2,-4,2) + (0,1,1)$$

b) Si $L: X = \lambda(1,2,0) + (1,1,1)$, dar una ecuación del plano Π que contiene a L y tal que la recta $L': X = \lambda(-1,0,1) + (1,2,3)$ es paralela a Π .

Ejercicio 27.- Sean $\Pi: x_1 + x_2 + x_3 = 5$ y $L: X = \lambda(1, 1, -2)$. Hallar una recta L' contenida en Π que sea perpendicular a L . ¿Es única?

Ejercicio 28.- Sea $\Pi: 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1$

a) Dar las ecuaciones de dos rectas L_1 y L_2 , contenidas en Π y perpendiculares entre sí

b) Dar la ecuación de una recta L' contenida en Π que sea perpendicular a la recta

$L: X = t(-2, 3, 1) + (2, 1, 2)$

Ejercicio 29.- Hallar la distancia entre $P = (2, 2, 1)$ y el plano que contiene a las rectas

$L: X = \lambda(1, 2, -1) + (1, 3, 2)$ y $L': X = \alpha(2, -1, 3) + (3, 2, 5)$

Ejercicio 30.- Sea $P = (2, 1, -1)$

a) si $\Pi: x_1 + x_2 - x_3 = 3$, ¿cuál es el punto de Π a menor distancia de P ?

b) si $L: X = \lambda(1, 3, 1) + (2, 2, 0)$, ¿cuál es el punto de L a menor distancia de P ?

Ejercicio 31.- Sean $L: X = \beta(2, 3, -1)$ y $\Pi: x_1 + 2x_2 = 0$. Determinar

a) todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a distancia $\sqrt{5}$ de Π

b) todos los puntos de L que están a distancia $\sqrt{5}$ de Π .

Ejercicio 32.- Si $\Pi_1: 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1$ y $\Pi_2: -3x_2 + 4x_3 = 3$, hallar todos los puntos P de $\mathbb{R}^3$ que verifican

a) $d(P, \Pi_1) = d(P, \Pi_2)$

b) $d(P, \Pi_1) = d(P, \Pi_2) = 2$

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Demostrar las siguientes igualdades e interpretarlas geométricamente

a) $\|A - B\| = \|A + B\| \Leftrightarrow A \cdot B = 0$

b) $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 \Leftrightarrow A \cdot B = 0$ (Teorema de Pitágoras)

2. Sean la recta $\mathbb{L}: \lambda(2, 1, -1) + (1, -1, 2)$ y los puntos $A = (1, 0, 2)$ y $B = (3, -1, 6)$.

Hallar todos los puntos $P \in \mathbb{L}$ tales que el triángulo ABP es rectángulo en P.

3. Sean $P=(-1,2,0)$, $Q=(-2,1,1)$ y $\mathbb{L}:(1,1,-1)+\lambda(0,-1,3)$.

Dar una ecuación del plano Π que contiene a la recta paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por P , y a la recta paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por Q .

4. Sean el plano $\Pi:2x-2y+z=1$, $A=(1,1,1)$ y $B=(3,2,-1)$. Hallar todos los puntos C y $D \in \Pi$ tales que $ABCD$ es un cuadrado.

5. Sean $\mathbb{L}_1:\lambda(0,1,-1)+(0,-1,0)$ y $\mathbb{L}_2:\lambda(1,1,1)+(2,3,0)$.

Encontrar, si es posible, un plano Π tal que $d(P,\Pi)=2\sqrt{6}$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$ y para todo $P \in \mathbb{L}_2$.

6. Sean $\Pi_1:3x-2y+z=4$, y Π_2 el plano que contiene a los puntos $A=(0,1,1)$, $B=(3,-1,-1)$ y $C=(3,0,1)$.
Hallar todos los puntos del plano Π_1 que están a distancia 2 del plano Π_2 .

7. Sean $\Pi_1:7x-5y-2z=0$, $\Pi_2:5x-4y-z=0$, y $\mathbb{L}$ la recta que pasa por los puntos $P=(-2,3,-3)$ y $Q=(-1,2,-1)$. Hallar todos los planos Π que verifican simultáneamente:

i) $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$ ii) $d(R,\Pi)=\sqrt{14}$ para todo $R \in \mathbb{L}$.

8. Sean $\mathbb{L}_1:\lambda(k^2+k,k,k-1)$; $\mathbb{L}_2:\lambda(4,1,-1)+(2k,0,2k)$ y $\Pi:x-2y+2z=3$.

Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $d(P,\Pi)=d(Q,\Pi)$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$ y todo $Q \in \mathbb{L}_2$.

9. Sean $\Pi:x_1-x_2+3x_3=-1$, $\mathbb{L}:\lambda(0,-2,1)+(1,2,3)$ y $P=(-1,1,2)$.

Encontrar una recta $\mathbb{L}'$ que satisfaga simultáneamente:

i) $P \in \mathbb{L}'$ ii) $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset$ iii) $\mathbb{L}'$ es paralela a Π .

10. Dadas $\mathbb{L}:\lambda(1,2,1)+(0,1,1)$ y $\mathbb{L}':\lambda(2,-1,-2)+(1,1,0)$, hallar todos los planos Π tales que $\Pi \cap \mathbb{L}' = \emptyset$ y $d(P,\Pi)=\sqrt{2}$ para todo $P \in \mathbb{L}$.

11. Sean $\mathbb{L}_1:\lambda(1,-2,2)+(0,1,-1)$; $\mathbb{L}_2:\lambda(0,1,-1)+(-2,1,-1)$ y $\mathbb{L}_3:\lambda(1,3,-1)+(0,-5,0)$.

Encontrar, si es posible, una recta $\mathbb{L}$ tal que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L} \neq \emptyset$; $\mathbb{L}_3 \cap \mathbb{L} \neq \emptyset$ y $\mathbb{L} \perp \mathbb{L}_3$.

12. Sean en $\mathbb{R}^3$ el plano $\Pi:2x_1-x_2+2x_3=4$, $P=(2,2,2)$ y $Q=(1,0,1)$.

Determinar un plano Π' que contenga a P , a Q , y al punto R de Π tal que $d(P,R)=d(P,\Pi)$.