PRÁCTICA 2

SISTEMAS LINEALES Y MATRICES

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Un *sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas* es un conjunto de *m* ecuaciones lineales en las variables $(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde las *a* y las *b* con subíndices representan constantes.

Cuando $b_i = 0$ para todo *i*, $1 \le i \le m$, se dice que el sistema es *homogéneo*.

Una *n*-upla $(s_1, s_2, ..., s_n)$ es una solución del sistema si y sólo si al reemplazar x_i por s_i, $1 \le i \le n$, se satisface cada una de las *m* ecuaciones.

Un sistema se dice *incompatible* si no tiene ninguna solución.

Un sistema se dice *compatible* si tiene alguna solución.

Si un sistema compatible tiene solución única es *determinado*, y si tiene infinitas soluciones es *indeterminado*.

Por *matriz ampliada* o *matriz aumentada* del sistema, entendemos el arreglo rectangular de números:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}$$

En general, dados los números naturales *n* y *m*, se llama *matriz* de *m* filas y *n* columnas con coeficientes reales, al arreglo rectangular $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Abreviadamente $A = \left(a_{ij}\right)$.

Llamamos *filas* de A a las n-uplas $A_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\right)$ con $i = 1, \ldots, m$

Llamamos *columnas* de A a las m-uplas $A^j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}\right)$ con $j = 1, \ldots, n$

Con esta notación, $A = \left(A^1, A^2, \cdots, A^n\right)$ y también $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$.

Decimos que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

Propiedad: Las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema dan lugar a un sistema equivalente al dado:

1- Multiplicar una de las ecuaciones por una constante no nula.

2- Intercambiar dos de las ecuaciones.

3- Sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a otra ecuación.

Las anteriores operaciones sobre las ecuaciones se corresponden con las siguientes operaciones sobre las filas de la matriz aumentada del sistema. Se denominan *operaciones elementales sobre las filas*:

1- Multiplicar una de las filas por una constante no nula.

2- Intercambiar dos de las filas.

3- Sumar un múltiplo de una de las filas a otra fila.

El *método de eliminación de Gauss* para resolver sistemas lineales, consiste en llevar la matriz aumentada del sistema planteado, vía la aplicación sistemática de operaciones elementales sobre sus filas, a la forma escalonada en las filas reducida, que a continuación describiremos. La resolución del sistema resultante, que es equivalente al original, es inmediata.

Se dice que una matriz se encuentra en la forma *escalonada en las filas reducida*, si se cumplen las siguientes condiciones:

1- Si una fila no consta únicamente de ceros, entonces su primer coeficiente no nulo es un 1 (a este 1 se lo denomina 1 principal).

2. Si existen filas que constan sólo de ceros (filas nulas), se agrupan en la parte inferior de la matriz.

3- Si dos filas sucesivas son no nulas, el 1 principal de la fila inferior se presenta más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.

4- Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

Si una matriz tiene sólo las propiedades 1, 2 y 3 se dice que está en la forma *escalonada en las filas*.

Llamamos *rango fila* (o *rango*) de la matriz A al número de filas no nulas que tiene la matriz escalonada en las filas equivalente a A.

En el conjunto de las matrices de m filas y n columnas con coeficientes reales, notado $\mathbb{R}^{m\times n}$, están definidos la *suma* y el *producto por escalares*, de la siguiente manera:

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad kA = (ka_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Es decir, suma y producto por escalares se calculan coordenada a coordenada, en forma análoga a como se hace en $\mathbb{R}^n$.

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times s}$ se define el *producto* de A por B como

$$AB = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times s}$$

donde c_{ij} es igual al producto escalar de la fila i de A por la columna j de B

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \,.\, (\text{columna } j \text{ de } B)$$

Es posible calcular AB sólo si la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B.

Propiedades del producto.

- Es asociativo: $(AB)C = A(BC)$
- Es distributivo: $A(B+C) = AB + AC$

  $(A+B)C = AC + BC$

- La matriz *identidad* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, verifica $AI = IA$ para toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La matriz I es el elemento neutro para este producto.

Notación: El sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

puede escribirse $AX = B$, con $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m\times n}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

En adelante identificaremos $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $B \in \mathbb{R}^{mx1}$ con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Así el sistema se escribirá $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Propiedades: Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathbb{S}_0 = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \,/\, A\mathbf{x}=\mathbf{0}\right\} \qquad \mathbb{S}_\text{b} = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \,/\, A\mathbf{x}=\mathbf{b}\right\}$$

a) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $k\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$.

Esto dice que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es también solución del mismo, y que los múltiplos de una solución son también soluciones.

b) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_\text{b}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_\text{b}$, entonces $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$.

Esto es, la diferencia entre dos soluciones de un sistema no homogéneo, es solución del sistema homogéneo asociado.

c) Sea $\mathbf{s}$ una solución particular del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{s} \in \mathbb{S}_b$), entonces

$$\mathbb{S}_b = \mathbb{S}_0 + \mathbf{s} = \{\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,/\, \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s} \text{ , con } \mathbf{x} \in \mathbb{S}_0 \}.$$

Esto significa que cualquier solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede obtenerse sumando una solución particular del sistema con una solución del sistema homogéneo asociado.

Una *matriz cuadrada* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *inversible* si existe $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$.

Cuando B existe, es única y la notamos $B = A^{-1}$.

Propiedad: Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son inversibles, entonces AC es inversible y vale $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$.

Diremos que dos matrices son equivalentes por filas si puede obtenerse una de la otra por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre las filas.

Propiedad: Si $A \in \mathbb{R}^{n(n}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es inversible.

b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única, cualquiera sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

c) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial.

d) A es equivalente por filas a $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

EJERCICIOS

Ejercicio 1.- Dado el sistema lineal

$$S\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

¿Cuáles de las siguientes 4-uplas son soluciones de S? ¿y del sistema homogéneo asociado?

$\mathbf{x} = (2,2,1,0)$ $\qquad$ $\mathbf{y} = (1,1,1,4)$ $\qquad$ $\mathbf{z} = (0,0,0,0)$

$\mathbf{u} = (-2, \frac{-5}{3}, \frac{10}{3}, -7)$ $\qquad$ $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ $\qquad$ $\mathbf{w} = (-1, -2, 3, -7)$

Ejercicio 2.- Determinar, si existen, a y b para que $(2, -2, 1)$ sea solución de

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2ax_2 & + & x_3 & = & -1 \\ & & ax_2 & - & bx_3 & = & -4 \\ bx_1 & + & x_2 & + & (2a-b)x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

Ejercicio 3.- Obtener un sistema equivalente al dado, cuya matriz ampliada sea escalonada en las filas reducida.

a) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & -1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & - & 2x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

Ejercicio 4.- Resolver por el método de eliminación de Gauss el sistema cuya matriz aumentada es $(A \vdots \mathbf{b})$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = (1,2,-1,0)$
$\mathbf{b} = (0,0,0,0)$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = (1,2,1,2)$
$\mathbf{b} = (2,0,-1,1)$
$\mathbf{b} = (0,0,0,0)$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = (5,3,2)$
$\mathbf{b} = (-1,1,2)$
$\mathbf{b} = (2,1,1)$
$\mathbf{b} = (0,0,0)$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = (2,1,2)$
$\mathbf{b} = (0,0,0)$
$\mathbf{b} = (1,0,0)$
$\mathbf{b} = (0,1,0)$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = (3,1,-1)$
$\mathbf{b} = (0,-1,-2)$
$\mathbf{b} = (0,0,0)$
$\mathbf{b} = (1,1,2)$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{b} = (1,2,3,2)$
$\mathbf{b} = (1,-3,0,3)$

Ejercicio 5.- Determinar si el sistema tiene soluciones no triviales, sin resolverlo.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 6.- Mostrar tres elementos de cada uno de los conjuntos siguientes.

a) $\mathbb{S}_1 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} / a_{ij} = a_{ji}\,,\ 1 \le i, j \le 3 \right\}$ (matrices simétricas)

b) $\mathbb{S}_2 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} / a_{ij} + a_{ji} = 1,\ 1 \le i, j \le 3 \right\}$

c) $\mathbb{S}_3 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} / a_{ij} = -a_{ji}\,,\ 1 \le i, j \le 3 \right\}$ (matrices antisimétricas)

d) $\mathbb{S}_4 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{4\times 4} / \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 0 \right\}$ (matrices de traza nula)

e) $\mathbb{S}_5 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 4} / A \text{ tiene alguna fila nula} \right\}$

f) $\mathbb{S}_6 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} / a_{ij} = 0,\ \text{si } i > j \right\}$ (matrices triangulares superiores)

Ejercicio 7.- Efectuar, cuando sea posible, los cálculos indicados.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) BA ii) BC iii) CB iv) AB v) $BA - C$

vi) ED vii) DA viii) $EA + D$ ix) $AE + 3C$

Ejercicio 8.- Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, hallar

a) la tercera fila de AB

b) la tercera columna de BA

c) el coeficiente c_{32} de $C = BAB$

Ejercicio 9.- Determinar todas las matrices B que verifican:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 10.- Hallar todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 11.- Hallar todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $A\mathrm{X} + B = B\mathrm{X} + A$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 12.- Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles; exhibir la inversa cuando exista.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $G + H$

Ejercicio 13.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Decidir si A^{-1} es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 14.- Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, hallar 4 soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 15.- Sean (1,3,1), (2,2,4) y (2,0,4) soluciones de un sistema lineal no homogéneo.

a) Hallar dos rectas distintas tales que todos sus puntos sean soluciones del sistema homogéneo asociado.

b) Econtrar un plano tal que todos sus puntos sean soluciones del sistema no homogéneo.

Ejercicio 16.- Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Encontrar una recta de soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 17.- Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbb{S}_0 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ A\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$.

Encontrar todos los $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ tales que $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18.- Dadas $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a \\ a-3 \\ a+1 \end{pmatrix}$, determinar todos los valores de a para los cuales el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ es compatible.

Resolver el sistema para alguno de los valores de a hallados.

Ejercicio 19.-

a) Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema S tiene solución única.

$$S \begin{cases} (k^2-1)x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 0 \\ & & (k-1)x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & & (k+2)x_3 & = & 0 \end{cases}$$

b) Determinar todos los valores de k para los cuales el sistema S admite solución no trivial

$$S \begin{cases} (k+1)x_1 & - & 2x_2 & + & kx_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & (k+2)x_2 & + & kx_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & kx_3 & + & (k+4)x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & kx_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Ejercicio 20.- Encontrar todos los valores de a y b para los cuales los sistemas cuyas matrices ampliadas se dan a continuación son compatibles.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & b \\ 0 & a+1 & a^2-1 & b+2 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & -a-1 & b+a \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2+a & b \\ 2 & a-4 & -4 & 2 \\ a-2 & 0 & 12 & 1 \end{array}\right)$

Ejercicio 21.- Resolver el sistema para todos los valores de *b*.

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + 2x_3 - x_4 = b+2 \\ x_1 + bx_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3bx_2 + 2x_3 - 2x_4 = b \end{cases}$$

Ejercicio 22.- Encontrar todos los valores de a y b para los cuales $(2,0,-1)$ es la única solución del sistema $\begin{cases} 2x_1 - ax_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - bx_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

Ejercicio 23.- Hallar todos los valores de k para los cuales

M = $\{\lambda(1,1,0,0)+(2,0,-1,0)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k^2-1)x_2 + 2x_4 = -k^2+1 \\ (k+1)x_3 + 4x_4 = -k-1 \end{cases}$$

Ejercicio 24.- Determinar, para todos los valores reales de *a* y *b*, si el sistema cuya matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & \vdots & 1 \\ -a & -1 & 2+a & \vdots & 2-a \\ -1 & -a & a & \vdots & b \end{pmatrix}$ es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Ejercicio 25.- Encontrar todos los valores de *a* y *b* para los cuales el sistema cuya matriz ampliada es $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & \vdots & 1 \\ -a & -1 & 1 & \vdots & -1 \\ -1 & -a & a & \vdots & b \end{pmatrix}$ tiene como conjunto solución una recta.

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Sea *A* una matriz cuadrada que verifica $A^2 + A + I = 0$.

Demostrar que $A^{-1} = -I - A$.

2. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ para que $(1,-1,2,-1)$ sea solución del sistema cuya matriz aumentada es $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a & \vdots & 2 \\ -2b & -2 & 0 & 2 & \vdots & 2 \\ a & -4 & -b & 5 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$.

Para los valores hallados resolver el sistema.

3. Se considera el sistema $\begin{cases} 2ax_1 - x_2 - 3cx_3 - 3x_4 = 2 \\ -x_1 + ax_2 + 2bx_3 + cx_4 = 1 \\ x_1 - cx_2 + ax_3 + bx_4 = 0 \\ bx_1 - 2ax_2 - 3cx_3 - 5x_4 = -7 \end{cases}$

Hallar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los cuales $X = (2,-1,-1,2)$ es solución del sistema.

4. Encontrar una matriz X que satisfaga la ecuación

$$X\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

5. Se sabe que $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ son soluciones del sistema $Ax=b$. Hallar alguna solución de $Ax=b$ que también sea solución de $2x_1-2x_2+x_3=9$.

6. Hallar todos los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los cuales el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases}x+2ky+z=1\\ kx+2y+kz=k\\ 2y+kz=k-2\end{cases}$ es una recta contenida en el plano $x-4y+2z=4$.

7. Se sabe que $\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ es solución de $3A\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$ y que $\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$ es solución de $2A\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

Encontrar cuatro soluciones distintas del sistema $A\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

8. Hallar todos los valores de $a\in\mathbb{R}$ tales que $\{(2,0,-3)\}$ es el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=5\\ 3x_1+ax_2+x_3=3\\ -x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$

9. Sean $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -6\\ 2 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ una matriz inversible y $C\in\mathbb{R}^{3\times3}$ tales que $BC=A$.

Hallar las soluciones del sistema $B^2C\mathbf{x}=2B\mathbf{x}$ $\quad(\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3)$.

10. Hallar todos los valores de $a,b \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema

$$S:\begin{cases} x_1 + 3x_2 + ax_3 - x_4 = b \\ 2x_1 + 2x_2 - ax_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b \end{cases}$$ es compatible indeterminado.

Resolver el sistema para alguno de los valores hallados.

11. Sean $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x} - B\mathbf{x}$ tiene infinitas soluciones. Resolver el sistema para alguno de los valores de k hallados.

12. Se sabe que (1,2,0) y (3,0,–1) son soluciones de un sistema no homogéneo S. Hallar una solución de S que sea también solución del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

13. Sean en $\mathbb{R}^4$ los sistemas

$$S_1\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases} \quad \text{y} \quad S_2\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + ax_3 = b \end{cases}$$

Hallar todos los valores de $a,b \in \mathbb{R}$ para los cuales S_1 y S_2 tienen infinitas soluciones comunes. Para los valores hallados encontrar todas las soluciones comunes.