PRÁCTICA 3

DETERMINANTES

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Una *permutación* del conjunto $\{1,2,...,n\}$ es un arreglo de estos números en cierto orden, sin omisiones ni repeticiones. Para denotar una permutación cualquiera se escribirá $(j_1, j_2, ..., j_n)$, donde j_i es el *i*-ésimo elemento de la permutación. Se dice que ocurre una *inversión* en una permutación $(j_1, j_2, ..., j_n)$ siempre que un entero mayor precede a uno menor. Diremos que una permutación es *par*, si el número total de inversiones es un número par, y diremos que es *impar* si el número total de inversiones es impar.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por *producto elemental tomado de A* se entiende cualquier producto de *n* elementos tomados de *A*, sin que dos cualesquiera de ellos provengan de una misma fila ni de una misma columna.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ admite $n!$ ($n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1$) productos elementales. Estos son de la forma $a_{1j_1} a_{2j_2} .....a_{nj_n}$ donde $(j_1, j_2, ..., j_n)$ es una permutación de $\{1,2,...,n\}$.

Se denomina *producto elemental con signo tomado de A* a un producto elemental $a_{1j_1} a_{2j_2} .....a_{nj_n}$ multiplicado por $+1$ ó por -1 según la permutación $(j_1, j_2, ..., j_n)$ sea respectivamente par o impar.

Se define el *determinante* de *A* como la suma de todos los productos elementales con signo tomados de *A*.

Notamos $\det(A) = |A| = \sum \pm\ a_{1j_1} a_{2j_2} .....a_{nj_n}$

Propiedades: Si A es una matriz cuadrada que contiene una fila de ceros, $\det(A) = 0$.

Si A es una matriz triangular de $n \times n$, $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal, es decir $\det(A) = a_{11} a_{22} .....a_{nn}$.

Propiedad: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Si A' es la matriz que se obtiene cuando una sola fila de A se multiplica por una constante k, entonces $\det(A') = k\det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de A, entonces $\det(A') = -\det(A)$.
- Si A' es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de una de las filas de A a otra fila, entonces $\det(A') = \det(A)$.

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la matriz *transpuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ que tiene como filas a las columnas de A.

Propiedades: Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces $\det(A^t) = \det(A)$.

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $\det(kA) = k^n \det(A)$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Si A es inversible, entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

DESARROLLO DEL DETERMINANTE POR COFACTORES.

Si A es una matriz cuadrada, entonces el *menor del elemento* a_{ij} se denota M_{ij} y se define como el determinante de la submatriz que queda al eliminar de A la i-ésima fila y la j-ésima columna. El número $(-1)^{i+j} M_{ij}$ se denota C_{ij} y se conoce como *cofactor del elemento* a_{ij}.

Se puede calcular el determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ multiplicando los elementos de cualquier fila (o columna) por sus cofactores y sumando los productos que resulten.

Es decir: para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna)

y

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la i-ésima fila)

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y C_{ij} es el cofactor de a_{ij} entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

se conoce como *matriz de cofactores tomados de A*. La transpuesta de esta matriz se denomina *adjunta de A* y se denota $\operatorname{adj}(A)$.

Propiedad: Si A es una matriz inversible, entonces $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$.

REGLA DE CRAMER.

Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$, entonces la única solución del sistema es $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}\ ,\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}\ ,\ \ldots..\ ,\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

donde A_j es la matriz que se obtiene al reemplazar la j-ésima columna de A por $\mathbf{b}$.

EJERCICIOS

Ejercicio 1.- Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por las filas y columnas indicadas.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ por tercera fila
por primera columna

b) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ por segunda fila
por tercera columna

c) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ por cuarta fila
por quinta columna

Ejercicio 2.- Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por la fila o columna más conveniente.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Ejercicio 3.- Calcular los determinantes de las siguientes matrices usando propiedades.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.- Determinar los valores de k para los cuales $\det(A) = 0$.

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ k^2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5.- Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tal que $\det(A) = 7$.

Calcular los determinantes de las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+3a_{11} & a_{22}+3a_{12} & a_{23}+3a_{13} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$

Ejercicio 6.- Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcular $\det(AB)$ $\det(A+B)$ $\det(A^{10})$ $\det(A^5B-A^5)$

Ejercicio 7.- Sin calcular la matriz inversa, decidir si son inversibles las matrices dadas.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8.- Determinar todos los valores reales de x para los cuales la matriz es inversible.

a) $\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 2 & x-2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x+1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x+1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & x-4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9.- Si $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A)=15$, calcular

a) $\det(2A)$ b) $\det((3A)^{-1})$ c) $\det(3A^{-1})$

Ejercicio 10.- Determinar en cada caso todos los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene solución única.

a) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ (2k-2)x_1 + 2kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+2)x_1 + (k-3)x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + kx_3 = 2 \\ x_1 + 3kx_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

Ejercicio 11.- Encontrar el valor de a para el cual el sistema tiene infinitas soluciones y resolver el sistema para el valor hallado.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ a^2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = a \end{cases}$$

Ejercicio 12.- Determinar los valores de k para los cuales el sistema tiene:
i) ninguna solución ii) solución única iii) infinitas soluciones

a) $\begin{cases} -x_1 & & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ (k^2-3)x_1 & & & - & x_3 & = & k^2+k-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & (k^2-8)x_3 & = & k+14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} kx_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & (k^2-1)x_2 & + & (k+1)x_3 & = & 1 \\ kx_1 & + & (k^2+2)x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{cases}$

Ejercicio 13.- Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar todos los valores de a para los cuales el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{x}$ admite solución no trivial.

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(AB)=2.$ Calcular $\det(B^{-1})$.

2. Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(B)=-3.$

Hallar todas las soluciones del sistema $(BA)\mathbf{x} = -B\mathbf{x}$.

3. Sea $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Decidir para qué valores de a el sistema

$(A^2+2A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tiene solución no trivial.

4. Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los $k\in\mathbb{R}$ tales que $\det(BA^{-1})=\det(\frac{1}{4}BA)$.