PRÁCTICA 4

ESPACIOS VECTORIALES – SUBESPACIOS

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

ESPACIOS VECTORIALES

Un *espacio vectorial real* $\mathbb{V}$, o espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, es un conjunto de elementos llamados *vectores*, junto con dos operaciones: *suma* y *producto por un escalar*, que satisfacen las siguientes propiedades.

EV1.- Si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

EV2.- Si $k \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces el producto $k\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

EV3.- Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$, entonces $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

EV4.- Existe un elemento en $\mathbb{V}$, notado $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$.

EV5.- Para cada elemento $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ existe $-\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = -\mathbf{u}+\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

EV6.- Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$.

EV7.- Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $c(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$.

EV8.- Si a y $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $(a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v}+b\mathbf{v}$.

EV9.- Si a y $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$.

EV10.- Si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, entonces $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ $\quad (1 \in \mathbb{R})$

Notación: $\mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{u}+(-\mathbf{v})$

Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial real valen las siguientes propiedades.

a) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

b) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

c) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

d) $-(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = -\mathbf{v}-\mathbf{w}$ para todo $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$.

e) $k(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = k\mathbf{v}-k\mathbf{w}$ para todo $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$, $k \in \mathbb{R}$.

f) $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si $k = 0$ ó $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

SUBESPACIOS

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real, y sea $\mathbb{W}$ un subconjunto de $\mathbb{V}$. $\mathbb{W}$ es un *subespacio* de $\mathbb{V}$ si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

- El vector $\mathbf{0}$ de $\mathbb{V}$ pertenece a $\mathbb{W}$.

- Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos de $\mathbb{W}$, entonces su suma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ pertenece a $\mathbb{W}$.

- Si $\mathbf{v}$ es un elemento de $\mathbb{W}$ y c es un número real, entonces el producto $c\mathbf{v}$ pertenece a $\mathbb{W}$.

Observación: $\mathbb{W}$ es un espacio vectorial real.

Propiedad: Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, entonces la intersección $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Propiedad: El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo con n incógnitas es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

COMBINACIONES LINEALES

Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ elementos de $\mathbb{V}$. Se dice que un vector $\mathbf{w}$ es una *combinación lineal* de $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ si se puede expresar en la forma $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + ... + k_n\mathbf{v}_n$, donde $k_1, ..., k_n$ son números reales.

Si todo elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ decimos que $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ *genera* $\mathbb{V}$ o que $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ es un *conjunto de generadores* de $\mathbb{V}$.

$\mathbb{W} = \left\{ \sum_{i=1}^{r} k_i\mathbf{v}_i \ / \ k_i \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ que se denomina *subespacio generado* por $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r\}$ y se nota $\mathbb{W} = \langle \mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r \rangle$.

Propiedad: Si $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ y $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r$ son vectores de $\mathbb{W}$, entonces $\langle \mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r \rangle \subseteq \mathbb{W}$. O sea $\langle \mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r \rangle$ es el menor subespacio de $\mathbb{V}$ que contiene a los vectores $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r$.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y sean $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n$ elementos de $\mathbb{V}$.
Decimos que $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ es *linealmente dependiente* si existen números reales $a_1,...,a_n$, no todos iguales a cero, tales que $a_1\mathbf{v}_1+...+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$.

Decimos que $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ es *linealmente independiente* si y sólo si se satisface la siguiente condición: siempre que $a_1,...,a_n$ sean números reales tales que $a_1\mathbf{v}_1+...+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$, entonces $a_1=...=a_n=0$.

Propiedad: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y sean $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ vectores de $\mathbb{V}$. Son equivalentes:

a) $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente.

b) $\{\mathbf{v}_1,k\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ con $k\in\mathbb{R}, k\neq 0,$ es linealmente independiente.

c) $\{\mathbf{v}_1+k\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ con $k\in\mathbb{R}$, es linealmente independiente.

Propiedad: Si $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente y $\mathbf{w}\notin\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n\rangle$ entonces $\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_n,\mathbf{w}\rangle$ es linealmente independiente.

Propiedad: Si $\mathbf{w}$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_k$, entonces $\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_k,\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_k\rangle$.

El rango fila de una matriz *A* es igual al máximo número de filas linealmente independientes de *A*.

El rango columna de una matriz *A* es igual al máximo número de columnas linealmente independientes de *A*.

Propiedad: El rango fila de *A* es igual al rango columna de *A*, y lo notamos *rgA*.

De aquí en más, cuando decimos espacio vectorial entenderemos espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

BASES

Una *base* de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una sucesión de elementos $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n$ de $\mathbb{V}$ tales que:

a) $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ genera $\mathbb{V}$

b) $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente

Se dice que un espacio vectorial $\mathbb{V}$, diferente de cero, es de *dimensión finita* si contiene una sucesión finita de vectores que forman una base de $\mathbb{V}$.

Propiedad: Dos bases cualesquiera de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita tienen el mismo número de vectores.

Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, la *dimensión* de $\mathbb{V}$ es el número de vectores que tiene cualquier base de $\mathbb{V}$. Si $\mathbb{V}=\{\mathbf{0}\}$, entonces $\mathbb{V}$ no tiene base y se dice que su dimensión es cero.

Propiedad: La dimensión de $\mathbb{S}_0=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1} / A\mathbf{x}=0\right\}$, es igual a $n-rgA$.

SUMA DE SUBESPACIOS

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios de $\mathbb{V}$; se define la *suma* de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ como $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\left\{\mathbf{v}\in\mathbb{V} / \mathbf{v}=\mathbf{s}+\mathbf{t}, \text{ con } \mathbf{s}\in\mathbb{S} \text{ y } \mathbf{t}\in\mathbb{T}\right\}$.

Propiedades: a) $\mathbb{S}+\mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

b) Si $\dim\mathbb{V}=n$, entonces $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T})=\dim\mathbb{S}+\dim\mathbb{T}-\dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{T})$.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de $\mathbb{V}$ que verifican simultáneamente: $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\mathbb{V}$ y $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=\{\mathbf{0}\}$, entonces $\mathbb{V}$ es la *suma directa* de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$, y se nota $\mathbb{V}=\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}$.

En general, si $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{V}$ verifica $\mathbb{W}=\mathbb{S}+\mathbb{T}$ y $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=\{\mathbf{0}\}$, se dirá que $\mathbb{W}$ es la suma directa de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$, y se notará $\mathbb{W}=\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}$.

COORDENADAS

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y $\mathrm{B}=\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si $\mathbf{v}=a_1\mathbf{v}_1+...+a_n\mathbf{v}_n$, entonces $(a_1,...,a_n)$ son las *coordenadas de* $\mathbf{v}$ *con respecto a la base* B, y notamos $(\mathbf{v})_{\mathrm{B}}=(a_1,...,a_n)$

Observación: Las coordenadas de un vector dependen de la base. Recuerde que cuando se da una base $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$, importa el orden en que se dan los vectores.

ESPACIO EUCLÍDEO

Llamamos *espacio euclídeo* de dimensión n al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con el producto

interno $(x_1,x_2,...,x_n)\cdot(y_1,y_2,...,y_n)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$.

Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n / \mathbf{x}\cdot\mathbf{s}=0 \text{ para todo } \mathbf{s}\in\mathbb{S}\}$ se llama el

complemento ortogonal de $\mathbb{S}$ y se nota $\mathbb{S}^\perp$.

Propiedades: $\mathbb{S}^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{S}\cap\mathbb{S}^\perp=\{\mathbf{0}\}$.

$\dim\mathbb{S}^\perp=n-\dim\mathbb{S}$ y $\mathbb{S}\oplus\mathbb{S}^\perp=\mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{S}^\perp)^\perp=\mathbb{S}$

Si $\mathbb{S}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\rangle$, $\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}\in\mathbb{S}$ si y sólo si $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_i=0$ para $1\le i\le r$.

Observación: Si $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\}$ es una base de $\mathbb{S}$, para hallar $\mathbb{S}^\perp$ basta buscar *n-r* vectores linealmente independientes que sean ortogonales a todos los $\mathbf{v}_i$.

Si $\mathbf{v}=\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2$ con $\mathbf{s}_1\in\mathbb{S}$ y $\mathbf{s}_2\in\mathbb{S}^\perp$, $\mathbf{s}_1$ se llama la *proyección ortogonal* de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbb{S}$.

Propiedad: La proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbb{S}$ es el punto de $\mathbb{S}$ que está a menor

distancia de $\mathbf{v}$, es decir que $\|\mathbf{v}-\mathbf{s}_1\|\le\|\mathbf{v}-\mathbf{s}\|\ \ \forall\mathbf{s}\in\mathbb{S}$.

EJERCICIOS

Ejercicio 1.- Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios.

a) $\mathbb{W}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1-x_2+2x_3=0\}$

b) $\mathbb{W}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / x_1+x_2\le 0\}$

c) $\mathbb{W}=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, a_{11}+a_{22}=0\right\}$

d) $\mathbb{W}=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x_1\cdot x_2=0\right\}$

e) $\mathbb{W}=\left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3 \,/\, \mathbf{v}=\lambda(1,-2,1),\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$

f) $\mathbb{W}=\left\{X\in\mathbb{R}^{2\times 1} \,/\, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.X=X\right\}$

g) $\mathbb{W}=\left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n \,/\, \mathbf{w}.\mathbf{v}=0\right\}$ donde w es un vector fijo de $\mathbb{R}^n$.

h) El plano Π que contiene a los puntos $(2,-4,-1)$, $(6,4,5)$ y $(5,2,3)$.

Ejercicio 2.- Decidir cuáles de los vectores dados pertenecen al subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S}=\langle(1,-2,4)\rangle$ $\quad$ $\mathbf{u}=(\frac{1}{4},-\frac{1}{2},1)$; $\mathbf{v}=(2,-4,4)$; $\mathbf{w}=(0,0,0)$

b) $\mathbb{S}=\langle(1,-1,3),(2,1,-1)\rangle$ $\quad$ $\mathbf{v}=(0,-3,2)$; $\mathbf{w}=(-1,-5,11)$

c) $\mathbb{S}=\langle(1,-1,2,4),(2,1,3,-1),(0,-2,1,0)\rangle$ $\quad$ $\mathbf{v}=(3,2,4,3)$; $\mathbf{w}=(0,-1,0,1)$

Ejercicio 3.- Hallar $a\in\mathbb{R}$ para que el vector **w** pertenezca al subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S}=\langle(1,2,1),(-1,3,2)\rangle$ $\quad$ $\mathbf{w}=(2,a,0)$

b) $\mathbb{S}=\langle(1,0,0,1),(0,2,1,-1),(1,a,-1,0)\rangle$ $\quad$ $\mathbf{w}=(1,-1,2,3)$

Ejercicio 4.- Decidir si el conjunto de vectores dado genera $\mathbb{V}$.

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$ $\quad$ $\{(1,1,1),(3,2,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$ $\quad$ $\{(1,2,-1),(0,1,-1),(2,5,-3)\}$

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$ $\quad$ $\{(1,-1,0,1),(1,-1,-1,2),(0,1,2,1),(1,3,1,3)\}$

d) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad$ $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 5.- Hallar un conjunto de generadores del subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + 4x_3 = 0\right\}$

b) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 \,/\, x_1 + x_2 - 4x_5 = x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\right\}$

c) $\mathbb{S}=\left\{X \in\mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, X.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.X\right\}$

d) $\mathbb{S}=\left\{X \in\mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, A.X = 0, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 6.- Encontrar un sistema de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S}=\left\langle(1,0,1)\right\rangle$

b) $\mathbb{S}=\left\langle(0,1,2,-1),(1,0,1,0)\right\rangle$

c) $\mathbb{S}=\left\langle(1,1,1,1),(2,1,0,-1),(1,0,1,1)\right\rangle$

d) $\mathbb{S}=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle$

Ejercicio 7.- Estudiar la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores.

a) $\left\{(2,1,2),(1,-3,0),(5,-1,4)\right\}$

b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

c) $\left\{(5,4,3,2,1)\right\}$

d) $\left\{(0,2,1,-1),(1,0,0,1),(1,3,-2,1),(2,1,-3,4)\right\}$

Ejercicio 8.- Determinar los valores reales de k para los cuales el conjuntos de vectores es linealmente independiente.

a) $\left\{(0,1,-2),(1,-1,k),(1,-3,0)\right\}$

b) $\left\{(1,-1,3),(k,k+1,k+4),(k+1,k+1,k)\right\}$

c) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & k+1\\ 0 & -k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k-2 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 9.- Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes.

a) Determinar si $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es un conjunto linealmente independiente.

i) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3$; $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$; $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$

ii) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$; $\mathbf{w}_2 = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$; $\mathbf{w}_3 = 5\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$

b) ¿para qué valores de α es $\{\mathbf{v}_1 - \alpha\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2, \alpha\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3\}$ linealmente independiente?

Ejercicio 10.- Hallar base y dimensión de los siguientes subespacios.

a) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,/\, 6x_1 - 2x_2 = 0\}$

b) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, 3x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

c) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x_1 - x_3 = x_1 + x_2 + 2x_4 = x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\}$

d) $\mathbb{S} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4\times 1} \,/\, \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 4 & 1\end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}$

e) $\mathbb{S} = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}X = X\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right\}$

f) $\mathbb{S} = \langle (1,2,3), (3,1,0) \rangle$

g) $\mathbb{S} = \left\langle (2,8,-3), (-1,-4,\frac{3}{2}) \right\rangle$

h) $\mathbb{S} = \langle (1,-1,2,1), (2,1,1,1), (1,2,-1,0), (0,1,1,1) \rangle$

i) $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}\right\rangle$

Ejercicio 11.- Decidir si el conjunto de vectores dado es base del subespacio

$$\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + 2x_4 = 0\right\}.$$

a) $\left\{(1,1,0,0),(0,2,0,1)\right\}$

b) $\left\{(1,1,0,0),(0,2,-1,1),(2,0,0,-1)\right\}$

c) $\left\{(1,1,0,0),(0,2,-1,1),(1,-1,0,1)\right\}$

d) $\left\{(1,1,0,0),(0,2,-1,1),(3,1,1,-1)\right\}$

Ejercicio 12.-Sea $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\right\}$. Hallar una base B de $\mathbb{S}$ tal que todos los vectores de B tienen todas sus coordenadas distintas de 0.

Ejercicio 13.- Determinar la dimensión de $\mathbb{T}_k$ para todos los valores de $k\in\mathbb{R}$.

a) $\mathbb{T}_k=\left\langle(0,-1,k),(1,-1,0),(-3,0,1)\right\rangle$

b) $\mathbb{T}_k=\left\langle \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3+2\mathbf{v}_4\,,\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_1+3\,\mathbf{v}_2-2\,\mathbf{v}_3+k\mathbf{v}_4\right\rangle$, donde $B=\left\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\right\}$ es una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$.

Ejercicio 14.- Extender, si es posible, el conjunto de vectores a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

b) $\left\{\begin{pmatrix}-1&1\\3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\right\}$

c) $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&2\\4&5\end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 15.- Hallar una base de $\mathbb{V}$ que contenga a una base de $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$ $\quad\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1-x_2+x_3=x_2-x_4=0\right\}$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{3\times 2}$ $\quad\mathbb{S}=\left\{X\in\mathbb{R}^{3\times 2} \,/\, x_{11}+x_{31}=x_{12}-x_{21}+x_{22}=x_{11}-x_{22}+x_{32}=0\right\}$

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^5$ $\quad\mathbb{S}=\left\langle(1,2,0,1,-1),(2,1,1,0,0),(1,-1,1,-1,1)\right\rangle$

Ejercicio 16.- Extender, si es posible, el conjunto $\{(1,-1,0,1),(0,1,0,-1)\}$ a base de $\mathbb{R}^4$ con vectores del subespacio $\mathbb{T}$.

a) $\mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_2+x_4=0\right\}$

b) $\mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+x_3=0\right\}$

Ejercicio 17.- Extraer, si es posible, dos bases de $\mathbb{V}$, del conjunto de vectores dado.

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$ $\quad\left\{(1,0,-1),(0,1,1),(1,1,0),(2,1,4)\right\}$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$ $\quad\left\{(2,0,0),(0,-1,4),(2,1,-4),(1,-1,4)\right\}$

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 18.- Determinar si los subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son iguales.

a) $\mathbb{S}=\left\langle(1,0,2),(1,1,-1)\right\rangle$ $\quad\mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1-3x_2-x_3=0\right\}$

b) $\mathbb{S}=\left\langle(0,1,0),(1,1,3)\right\rangle$ $\quad\mathbb{T}=\left\langle(2,2,6),(1,1,1)\right\rangle$

c) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+x_2-x_3-x_4=2x_1+x_4=0\right\}$

$\mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, 3x_1+x_2-x_3=2x_1-x_2+x_4=x_1+2x_2-x_3-x_4=0\right\}$

d) $\mathbb{S}=\left\langle(1,-1,0,2)\right\rangle$ $\quad\mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+x_2+x_3=2x_2+x_4=x_3=0\right\}$

e) $\mathbb{S}=\left\{A\in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, a_{11}+a_{22}=a_{11}+2a_{12}=0\right\}$ $\quad\mathbb{T}=\left\langle\begin{pmatrix}2&1\\0&-2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\rangle$

Ejercicio 19.- Hallar base y dimensión de $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$.

a) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+2x_2-x_3+x_4=x_2+x_3-2x_4=0\right\}$ $\quad\mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+2x_4=0\right\}$

b) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1-x_2+2x_3=x_2+x_4=0\right\}$ $\quad\mathbb{T}=\left\langle(-1,0,1,1),(-2,-2,1,4)\right\rangle$

c) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / 2x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\right\}$ $\quad\mathbb{T}=\left\langle (1,-1,0,0),(0,1,-1,0),(0,1,0,-1)\right\rangle$

d) $\mathbb{S}=\left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad\mathbb{T}=\left\{A\in \mathbb{R}^{2\times 2} / a_{11}+a_{21}-a_{22}=0\right\}$

e) $\mathbb{S}=\left\langle (2,1,0),(1,1,-1)\right\rangle$ $\quad\mathbb{T}=\left\langle (0,1,2),(1,3,-1)\right\rangle$

Ejercicio 20.- Hallar base y dimensión de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

a) $\mathbb{S}=\left\langle (1,-1,0,1),(2,1,1,1)\right\rangle$ $\quad\mathbb{T}=\left\langle (3,0,2,2)\right\rangle$

b) $\mathbb{S}=\left\langle (2,1,-1),(1,0,3)\right\rangle$ $\quad\mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^3 / x_1+2x_2+x_3=0\right\}$

Ejercicio 21.- Sean $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / x_1+2x_2-x_4=2x_1-x_3+x_4=0\right\}$ y $\mathbb{T}=\left\langle (1,3,1,-1);(0,1,-2,-2)\right\rangle$.

a) Hallar una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

b) Escribir $\mathbf{v}=(3,5,7,1)$ como $\mathbf{v}=\mathbf{s}+\mathbf{t}$, con $\mathbf{s}\in\mathbb{S}$ y $\mathbf{t}\in\mathbb{T}$, de dos maneras distintas.

Ejercicio 22.- Sean $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^3 / x_1+x_2+x_3=0\right\}$, $\mathbb{T}=\left\langle (0,1,2);(1,-1,1)\right\rangle$ y $\mathbf{v}=(3,1,2)$. Hallar $\mathbf{s}\in\mathbb{S}$ y $\mathbf{t}\in\mathbb{T}$ tales que $\mathbf{v}\in\left\langle \mathbf{s},\mathbf{t}\right\rangle$.

Ejercicio 23.- Sean $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / 2x_1-x_2+x_4=x_1+x_3=0\right\}$ y $\mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / x_2+2x_3=3x_1+3x_3+x_4=0\right\}$. Hallar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a una base de $\mathbb{S}$ y a una base de $\mathbb{T}$.

Ejercicio 24.- Sea $B=\left\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\right\}$ base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y sean $\mathbb{S}=\left\langle \mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3\right\rangle$ y $\mathbb{T}=\left\langle \mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_4\right\rangle$.

a) Hallar base y dimensión de $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$ y de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

b) Hallar un vector $\mathbf{v}\in\mathbb{S}+\mathbb{T}$ tal que $\mathbf{v}\notin\mathbb{S}$ y $\mathbf{v}\notin\mathbb{T}$.

Ejercicio 25.- Decidir si $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\mathbb{H}$.

a) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1+2x_3=-x_2-x_3+x_4=0\right\}$, $\mathbb{T}=\left\langle(1,2,1,0);(0,0,1,-1)\right\rangle$,
$\mathbb{H}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1-x_2+x_3+x_4=0\right\}$

b) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 \,/\, 2x_3-x_4=x_1+x_5=x_1+x_2-2x_5=0\right\}$, $\mathbb{T}=\left\langle(1,-2,1,1,0);(0,1,2,3,1)\right\rangle$,
$\mathbb{H}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 \,/\, 2x_1+x_2-x_5=0\right\}$

c) $\mathbb{S}=\left\langle(1,0,1,3);(2,2,2,3)\right\rangle$, $\mathbb{T}=\left\langle(3,2,3,6);(0,0,1,0)\right\rangle$, $\mathbb{H}=\left\langle(1,1,0,-1);(2,1,1,2);(0,1,1,1)\right\rangle$

Ejercicio 26.- Hallar dos subespacios distintos $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}'$ tales que $\mathbb{V}=\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}=\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}'$.

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$ $\quad\mathbb{S}=\left\langle(1,2,1,0),(-1,3,1,1)\right\rangle$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^5$ $\quad\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 \,/\, x_1-x_3+2x_4+x_5=3x_1-x_2=x_2+x_3+2x_4-x_5=0\right\}$

c) $\mathbb{V}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1+2x_2+x_3-x_4=0\right\}$ $\quad\mathbb{S}=\left\langle(1,-1,0,-1),(1,-1,1,0)\right\rangle$

Ejercicio 27.- Sean $\mathbb{S}=\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\right\rangle$ y $\mathbb{T}=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times2} \,/\, a_{11}=a_{12}-a_{21}=0\right\}$.

a) Probar que $\mathbb{R}^{2\times2}=\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}$.

b) Escribir $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}3&3\\-5&0\end{pmatrix}$ como $\mathbf{w}=\mathbf{s}+\mathbf{t}$ con $\mathbf{s}\in\mathbb{S}$ y $\mathbf{t}\in\mathbb{T}$.

Ejercicio 28.- Sean $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \,/\, x_1+2x_2+x_3=x_2-x_3=0\right\}$ y
$\mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \,/\, x_1+x_2-x_3=2x_1+x_2=0\right\}$. Hallar un subespacio $\mathbb{W}$ tal que
$\mathbb{T}\subseteq\mathbb{W}$ y $\mathbb{R}^3=\mathbb{S}\oplus\mathbb{W}$.

Ejercicio 29.- Sea $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_2=x_1+x_3=0\right\}$.

Encontrar un subespacio $\mathbb{T}\subseteq\mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

$$\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=\left\langle(1,0,-1,1)\right\rangle \text{ y } \mathbb{S}+\mathbb{T}=\mathbb{R}^4.$$

Ejercicio 30.- Sean $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1+x_3-x_4=x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\}$ y

$$\mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1+x_2+2x_3+x_4=ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0\right\}$$

Determinar todos los valores reales de a, b, c, d para los cuales la suma $\mathbb{S}+\mathbb{T}$ no es directa.

Ejercicio 31.- Sean $\mathbb{H}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 / x_1-x_2-x_3+2x_4-x_5=0\right\}$,
$\mathbb{H}'=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 / 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\right\}$, $\mathbb{W}=\left\langle(1,0,0,1,0);(0,0,1,0,0);(1,-1,1,1,1)\right\rangle$,
$\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 / x_1-x_2-x_3=2x_4-x_5=0\right\}$ y $\mathbb{S}'=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 / 2x_1+x_2=x_3+x_4+x_5=0\right\}$.

Encontrar un subespacio $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}^5$ que verifique simultáneamente:

$$\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}=\mathbb{H};\quad \mathbb{S}'\oplus\mathbb{T}=\mathbb{H}';\quad \mathbb{T}\cap\mathbb{W}\neq\{0\}.$$

Ejercicio 32.- Encontrar todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonales a todos los vectores del conjunto $\{(1,0,-1);(-1,1,3)\}$.

Ejercicio 33.- Encontrar el complemento ortogonal del subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1+x_2+x_3-x_4=x_1+2x_4=0\right\}$.

b) $\mathbb{S}=\left\langle(1,1,3);(2,1,-1)\right\rangle$

c) $\mathbb{S}=\left\langle(2,1,2,0);(1,0,2,1);(3,1,4,1)\right\rangle$

Ejercicio 34.- En $\mathbb{R}^3$, encontrar el complemento ortogonal de:

a) el eje x;

b) el plano coordenado yz;

c) el plano de ecuación $x_1+3x_2-2x_3=0$;

d) la recta de ecuación $X=\lambda(-1,2,5)$.

Ejercicio 35.- Sea $\mathbb{S}=\langle(2,0,0,3,1);(0,1,1,-1,0)\rangle$. Hallar una base de $\mathbb{S}^{\perp}$, y dar un sistema de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea el subespacio $\mathbb{S}$.

Ejercicio 36.- a) Sean $\Pi: 6x_1+4x_2-x_3=0$ y P = (7,5,9). Hallar el punto $Q\in\Pi$ que está más próximo al punto P. Calcular la distancia del punto P al plano Π.

b) Sean $\mathbb{L}:\lambda(-2,4,1)$ y P = (4,1,−8). Hallar el punto $Q\in\mathbb{L}$ que está más próximo al punto P. Calcular la distancia del punto P a la recta $\mathbb{L}$.

Ejercicio 37.- Sean en $\mathbb{R}^3$ las bases $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$B'=\{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ y $B''=\{(3,1,-2),(0,1,-1),(2,0,0)\}$

Hallar las coordenadas con respecto a las bases B, B´ y B´´ de:

a) (4,1,–3)

b) $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$

Ejercicio 38.- Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ en la base

$$B=\left\{\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right\}$$

Ejercicio 39.- Sea $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Determinar si $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\}$ es linealmente independiente, si $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$ son los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas respecto de B son:

a) (2,3,–1), (0,–2,1) y (0,0,3) respectivamente.

b) (3,1,–1), (1,0,2) y (5,1,3) respectivamente.

Ejercicio 40.- Sea B=$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ y sea

$\mathbb{T}_k = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + k\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4 \rangle$.

Determinar todos los valores de k en $\mathbb{R}$ para los cuales $\dim \mathbb{T}_k = 3$.

Ejercicio 41.- Se sabe que B=$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y que las coordenadas de los vectores (0,−1,1), (1,0,1) y (1,1,−1) en la base B son, respectivamente, (1,2,2), (1,1,−1) y (−1,−1,0). Hallar la base B.

Ejercicio 42.- Sea $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ que contenga a una base de $\mathbb{S}$ y a una base de $\mathbb{S}^\perp$, y tal que que vector (0,5,2) tenga coordenadas (0,1,4) en la base B.

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Sea $B = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Sean $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4; \mathbf{v}_2 \rangle$

y $\mathbb{T} = \langle -\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + k\mathbf{v}_4; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + k\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 \rangle$.

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{V}$.

2. Sean $\mathbb{S} = \langle (1,2,0,1); (0,-1,1,0) \rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$.

Hallar, si existe, un subespacio $\mathbb{W}$ de modo que se verifique simultáneamente:

$\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{W}) = 1$; $\dim(\mathbb{T} \cap \mathbb{W}) = 1$; $\dim((\mathbb{S} + \mathbb{T}) \cap \mathbb{W}) = 1$; $\dim \mathbb{W} = 2$

3. Sean en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $\mathbb{S} = \langle (2,1,0,1) \rangle$, $\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$ y

$\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_4 = x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$.

Hallar, si es posible, un subespacio $\mathbb{T}$ que verifique simultáneamente:

$\mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{H}$ y $\mathbb{T} \cap \mathbb{W} \neq \{0\}$.

4. Sean $\mathbb{S}=\langle(1,2,1,0);(0,3,0,2)\rangle$ y $\mathbb{T}=\langle(1,1,1,1);(3,-1,3,4)\rangle$. Hallar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a una base de $\mathbb{S}^{\perp}$ y a una base de $\mathbb{T}$.

5. Sean en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $\mathbb{W}=\langle(1,0,1,2);(1,1,0,-1)\rangle$,

$\mathbb{H}_1=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1-2x_2+x_3-x_4=0\right\}$ y $\mathbb{H}_2=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1+ax_2-x_3+bx_4=0\right\}$.

Hallar $a,b\in\mathbb{R}$ y un subespacio $\mathbb{S}$ tales que se verifique simultáneamente:

$\mathbb{W}\oplus\mathbb{S}=\mathbb{H}_1$ y $\mathbb{W}^{\perp}\oplus\mathbb{S}=\mathbb{H}_2$.

6. Sean $\mathbb{S}_1=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 / x_1+2x_2+x_3=0;4x_1+x_5=0\right\}$ y

$\mathbb{S}_2=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 / x_1+x_2-3x_3+x_4-k^2x_5=0;x_1+2x_2-5x_3+3x_4-k^2x_5=0;x_2-2x_3+kx_4=0\right\}$.

Hallar todos los $k\in\mathbb{R}$ para los cuales $\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2^{\perp}$.

7. Sean $B=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_3\}$, $B'=\{\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3;-\mathbf{v}_2\}$ y $B''=\{-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3;-\mathbf{v}_1\}$ bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tales que $\mathbf{v}_B=(1,-1,1)$ y $\mathbf{w}_{B'}=(2,0,-1)$.

Hallar $(2\mathbf{v}+\mathbf{w})_{B''}$.

8. Sean en $\mathbb{R}^4$ el subespacio $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_2+x_3-x_4=x_1+x_2+2x_3+x_4=0\right\}$ y la base

$B=\{(1,1,1,1);(1,1,2,0);(1,2,0,0);(2,0,0,0)\}$.

Hallar todos los vectores $\mathbf{v}$ que pertenecen a $\mathbb{S}$ y cuyas coordenadas en la base B son de la forma (a,b,a,b).

9. Sean en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1+x_2+x_4=x_2+2x_3=0\right\}$ y

$\mathbb{T}=\langle(5,5,-1,-1);(3,1,0,-1)\rangle$. Hallar un subespacio $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{W}\neq\mathbb{T}$ de manera que se verifique simultáneamente: $\mathbb{S}\cap\mathbb{W}=\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$ y $\mathbb{S}+\mathbb{W}=\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

10. Sea $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$.

Sean $\mathbb{S}=\langle \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-2\mathbf{v}_3+2\mathbf{v}_4,\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4\rangle$ y $\mathbb{T}=\langle \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3\rangle$.

Hallar un subespacio $\mathbb{W}\subset\mathbb{V}$ tal que $\mathbb{W}\oplus(\mathbb{S}\cap\mathbb{T})=\mathbb{V}$.

11. Sea $\mathbb{S}=\langle(1,1,0,2);(0,a,1,-1);(1,0,-1,b);(0,-1,-1,b-2)\rangle$.

Hallar todos los valores de *a* y *b* tales que $\mathbb{S}^{\perp}=\langle(1,-1,1,0)\rangle$.

12. Sean $\mathbb{S}=\langle(1,2,1,1)\rangle$, $\mathbb{H}_1=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1-x_2-x_3+2x_4=0\}$ y
$\mathbb{H}_2=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / -2x_1+x_2-x_3+x_4=0\}$.
Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a una base de $\mathbb{S}$, a una base de $\mathbb{H}_1$ y a una base de $\mathbb{H}_2$ simultáneamente.

13. Sean $\mathbb{W}=\langle(1,-1,0,0);(0,0,0,1);(a,0,1,-1)\rangle$ y $\mathbb{S}=\langle(1,1,1,0);(2,0,1,1)\rangle$.

Determinar $a\in\mathbb{R}$ y un subespacio $\mathbb{H}$ de dimensión 2, tal que $\mathbb{S}+\mathbb{H}^{\perp}=\mathbb{W}$.

14. Sean $\mathbb{S}=\langle(1,-1,1,0);(0,2,-1,-2)\rangle$, $\mathbb{H}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1+x_2+x_4=0\}$ y la base
B={(1,0,1,0); (0,1,0,1); (0,2,0,0); (1,0,–1,0)}.
Hallar un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{T}\oplus\mathbb{S}=\mathbb{H}$, y para todo $\mathbf{v}\in\mathbb{T}$, las coordenadas de **v** en la base B son de la forma (*a*,*b*,*a*,*b*).

15. Sean $\mathbb{T}=\{A\in\mathbb{R}^{3\times3} / a_{11}+a_{22}+a_{33}=0\}$, $\mathbb{S}\subset\mathbb{R}^{3\times3}$, $\mathbb{S}=\langle I\rangle$ donde *I* es la matriz identidad. Calcular $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T})$.

Si $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&2&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$, hallar $S\in\mathbb{S}$ y $T\in\mathbb{T}$ tales que $B=S+T$.

16. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ tiene coordenadas (1,2,0,3) en la base

$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Calcular las coordenadas de $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ en la base B

17. Sean B={(1,–1,0,2);(0,1,2,0);(–2,1,–1,0);(0,0,0,1)} y

$\mathbb{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{4}} / x_1 - x_2 + x_4 = 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}$. Hallar todos los $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ tales que $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ y las coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base B son de la forma (a,0,b,0).