PRÁCTICA 6

NÚMEROS COMPLEJOS Y POLINOMIOS

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

NÚMEROS COMPLEJOS

El conjunto $\mathbb{C}$ de los *números complejos* es:

$$\mathbb{C} = \{\ z = a + bi \ /\ \ a, b \in \mathbb{R}\ ;\ \ i^2 = -1\}$$

Si $z \in \mathbb{C}$, la representación $a + bi$ se llama *forma binómica* de z.

La *parte real* de z es a: $\quad \operatorname{Re} z = a$.

La *parte imaginaria* de z es b: $\quad \operatorname{Im} z = b$.

Si $z, w \in \mathbb{C}$ $\qquad z = w \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ e $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos;

la suma es $\qquad z + w = (a + c) + (b + d)i$

el producto es $\qquad z\,w = (ac - bd) + (ad + bc)i$

La suma es asociativa y conmutativa; el producto es asociativo y conmutativo y vale la propiedad distributiva respecto de la suma.

Notación: $\quad a + (-b)i = a - bi \qquad a + 0i = a \qquad 0 + bi = bi$

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, llamaremos *conjugado* de z a $\quad \overline{z} = a - bi$

y llamaremos *módulo de z* al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Observaciones $\qquad$ 1) $|z|^2 = z\,\overline{z}$ $\qquad$ 2) Si $z \neq 0$, $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Propiedades:

C1) $\overline{\overline{z}} = z$

C2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

C3) $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$

C4) Si $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

C5) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$

C6) $z - \overline{z} = 2(\operatorname{Im} z)i$

M1) $z = 0 \iff |z| = 0$

M2) $|z\,w| = |z||w|$

M3) $|z| = |\overline{z}|$

M4) $|z| = |-z|$

M5) Si $z \neq 0 \Rightarrow |z^{-1}| = |z|^{-1}$

M6) Si $w \neq 0 \Rightarrow \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $z \neq 0$, llamaremos *argumento de z* al único número real $\arg z$ tal que $\quad 0 \leq \arg z < 2\pi \quad ; \quad \cos \arg z = \dfrac{a}{|z|} \quad ; \quad \operatorname{sen} \arg z = \dfrac{b}{|z|}$

Si $z \in \mathbb{C}$, la *forma trigonométrica de z* es $\quad z = |z|(\cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z)$

Si $z = \rho(\cos \alpha + i\operatorname{sen} \alpha)$ y $w = \tau(\cos \beta + i\operatorname{sen} \beta)$, con $\rho, \tau > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$z = w \Leftrightarrow \rho = \tau \text{ (es decir } |z| = |w|\text{) y } \alpha = \beta + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema de De Moivre. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $w \neq 0$.
Si $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ y $w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ entonces

$$z\,w = |z||w|(\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta))$$

Corolario.

$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha))$$
$$\overline{z} = |z| \cdot (\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha))$$
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$$
$$z^n = |z|^n (\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Si $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, una *raíz n-ésima* de w es un número $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = w$.
Propiedad. Si z es una raíz n-ésima de w entonces:

$$z = |w|^{1/n}\left(\cos \frac{\arg w + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right)$$

para algún entero k tal que $0 \leq k \leq n - 1$.

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, la *notación exponencial de z* es $\qquad z = |z|e^{i\alpha}$

Propiedades. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\overline{e^{i\alpha}} = e^{\overline{i\alpha}} = e^{-i\alpha}$$
$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

POLINOMIOS

En lo que sigue $\mathbb{K}$ significa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Un *polinomio* con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma

$P(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + ... + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ con $n \in \mathbb{N}_0$ y $a_j \in \mathbb{K}$.

Indicamos $\mathbb{K}[X] = \{ P \,/\, P$ es polinomio con coeficientes en $\mathbb{K} \}$, y consideramos en $\mathbb{K}[X]$ las operaciones de suma y producto usuales.

Grado de P: Si $P \neq 0$, $P(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + ... + a_n x^n$ y $a_n \neq 0$, definimos

$$\text{grado de } P = \text{gr } P = n$$

El polinomio nulo no tiene grado.

Valen las siguientes propiedades: si $P \neq 0$, $Q \neq 0$,

$\text{gr}(P\,Q) = \text{gr } P + \text{gr } Q$

$\text{gr}(P + Q) \leq \max\{ \text{gr } P, \text{gr } Q\}$ (si $P + Q \neq 0$)

Dados $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ y $z \in \mathbb{K}$, llamamos *especialización* de P en z al

número $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$

Sea $P \in \mathbb{K}[X]$, $z \in \mathbb{K}$. Diremos que *z es raíz de P* si $P(z) = 0$.

Algoritmo de división.

Dados P, $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q \neq 0$, existen únicos S, $R \in \mathbb{K}[X]$ tales que:

$$P = Q\,S + R \quad \text{con} \quad R = 0 \text{ ó gr } R < \text{gr } Q$$

Se dice que Q *divide* a P (o que P es divisible por Q) y se nota $Q \mid P$, si el resto de la división de P por Q es el polinomio nulo, esto es, si $P = Q\,S$ con $S \in \mathbb{K}[X]$.

Teorema del Resto.

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ y $z \in \mathbb{K}$, el resto de la división de P por $(x–z)$ es igual a $P(z)$.

Corolario. Sea $P \in \mathbb{K}[X]$ y $z \in \mathbb{K}$; z es raíz de P si y sólo si $(x – z) \mid P$.

Teorema.

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ y $a_1, a_2, ..., a_r \in \mathbb{K}$ son raíces de P con $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, entonces $P(x) = (x – a_1)(x – a_2)...(x – a_r)\, Q(x)$ con $Q \in \mathbb{K}[X]$.

Corolario. Si P es un polinomio de grado n entonces P tiene a lo sumo n raíces.

Teorema de Gauss.

Sea $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ con $a_0 \neq 0$. Si $\frac{p}{q}$ (con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ y $(p, q) = 1$) es una raíz de P, entonces $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$.

Teorema fundamental del álgebra.

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ y gr $P \geq 1$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que z es raíz de P.

Teorema.

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$, y sea $z \in \mathbb{C}$. Si z es raíz de $P \Rightarrow \overline{z}$ es raíz de P.

Si $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{K}[X]$, llamaremos *polinomio derivado* de P a:

$$\partial P(x) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j$$

Propiedades.

$\partial(P+Q) = \partial P + \partial Q$ $\qquad$ $\partial(P \cdot Q) = (\partial P) \cdot Q + P \cdot \partial Q$ $\qquad$ $\partial(kx^0) = 0$

Notación: Designamos $\partial^{(m)} P = \partial(\partial^{(m-1)} P) = \partial(\partial(\ldots(\partial P)))$

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, diremos que $z \in \mathbb{C}$ es *raíz de multiplicidad* k de P ($k \in \mathbb{N}$) si $P(x) = (x - z)^k Q(x)$ con $Q \in \mathbb{C}[X]$ y $Q(z) \neq 0$.

Teorema.

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$, y sea $z \in \mathbb{C}$; z es raíz de multiplicidad k de P si y sólo si $P(z) = \partial P(z) = \partial^2 P(z) = \cdots = \partial^{(k-1)} P(z) = 0$ y $\partial^{(k)} P(z) \neq 0$.

Polinomio interpolador de Lagrange

Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_i \in \mathbb{K}$, $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, y sean $b_0, b_1, \ldots, b_n$ arbitrarios, $b_i \in \mathbb{K}$. Existe un único polinomio $L \in \mathbb{K}[X]$, con $L = 0$ ó gr $L \leq n$, que satisface $L(a_i) = b_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Se trata del polinomio:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(x) \quad \text{donde} \quad L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x - a_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (a_i - a_k)}$$

EJERCICIOS

NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1.- Dar la forma binómica de z.

a) $z=(3-i)+(\frac{1}{5}+5i)$ b) $z=(\sqrt{2}+i)(\sqrt{3}-i)$ c) $z=(3+\frac{1}{3}i)(3-\frac{1}{3}i)+(3+2i)$

Ejercicio 2.- Dar la forma binómica de z.

a) $z=(1+2i)(1-2i)^{-1}$ b) $z=(1+i)(2+3i)\overline{(3+2i)}$

c) $z=(1+i)^{-1}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)+(-2+5i)$

Ejercicio 3.- Calcular $|z|$.

a) $z=(\sqrt{2}+i)+(3\sqrt{2}-3i)$ b) $z=(1+ai)(1-ai)^{-1}$ $a\in\mathbb{R}$

c) $z=(3i)^{-1}$ d) $z=\big||1-i|+i\big|+i$

e) $z=(1+i)(1-2i)(3-i)$ f) $z=3(1+3i)^{10}$

Ejercicio 4.- Dar la forma binómica de $\overline{z}$.

a) $z=|1-i|+i$ b) $z=\big||1+i|+i\big|+i$

c) $z=(1-2i)(2-i)$ d) $z=(1+3i)(1-3i)$

Ejercicio 5.- Representar en el plano todos los $z\in\mathbb{C}$ tales que:
a) $|z|=3$ b) $|z|\leq 2$ c) $z=\overline{z}$

Ejercicio 6.-

a) Representar en el plano el conjunto $B=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z+1-i|\leq 2\}$.

b) Representar en el plano el conjunto $B=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z+1|\leq|z-3-i|\}$.

c) Si $A=\{z\in\mathbb{C}\,/\,\mathrm{Re}\,z\leq 1,\ \mathrm{Im}\,z\leq\frac{1}{2}\}$ y $B=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z-1-3i|=5\}$, representar $C=A\cap B$.

Ejercicio 7.- Escribir en forma binómica todos los $z\in\mathbb{C}$ tales que:

a) $z^2=1-4\sqrt{3}i$ b) $z^2=16+14\sqrt{3}i$

c) $z^2+2z+3=0$ d) $z^2=5-2i\,z$

Ejercicio 8.- Hallar todos los $z\in\mathbb{C}$ tales que su conjugado coincide con su cuadrado.

Ejercicio 9.- Calcular $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$.

a) $z = 2(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$ b) $z = 3(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi)$

c) $z = (\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi)$ d) $z = 2(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi)$

Ejercicio 10.- Escribir z en forma trigonométrica.

a) $z = \sqrt{5}$ b) $z = -6$ c) $z = 15i$ d) $z = -\frac{1}{3}i$

e) $z = \sqrt{5} + \sqrt{5}i$ f) $z = 3 - \sqrt{3}i$

g) $z = -3(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$ h) $z = 3(\cos\frac{\pi}{2} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2})$

i) $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3})$ j) $z = \frac{\pi}{2}i(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2})$

Ejercicio 11.- Representar en el plano.

a) $A = \{z \in \mathbb{C} / \arg z = 0\}$ b) $B = \{z \in \mathbb{C} / \frac{1}{2}\pi \le \arg z \le \frac{5}{4}\pi\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 5,\ 0 \le \arg z \le \frac{2}{3}\pi\}$ d) $C = \{z \in \mathbb{C} / |z + 1 - i| \le 3,\ \frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}\}$

Ejercicio 12.-

a) Escribir en forma trigonométrica $z = (1+i)(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$

b) Escribir en forma binómica $z = (-3\sqrt{3} + 3i)^{15}$

c) Escribir en forma binómica $z = \dfrac{1+i}{(-\sqrt{3}+i)^5}$

Ejercicio 13.- Encontrar todas las raíces n-ésimas de w para:

a) $n = 3$ $w = 1$ b) $n = 5$ $w = -3$ c) $n = 4$ $w = -1 - \sqrt{3}i$

Ejercicio 14.- Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^8 = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

Ejercicio 15.- Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

a) $z^3 = i\,\overline{z}^2$ b) $z^{10} = -4\overline{z}^{10}$ c) $z^5 - \overline{z} = 0$

d) $z^4 + z^{-4} = 0$ e) $z^3 + 9i\,\overline{z}^2\,|z| = 0$ f) $z^4 = (\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^8$

Ejercicio 16.-

a) Escribir en forma binómica $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{-i\pi}$, $e^{i\frac{5}{6}\pi}$.

b) Expresar en forma exponencial las raíces quintas de -1.

c) Probar que $\forall t \in \mathbb{R}$ es $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ y $\operatorname{sen} t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$

POLINOMIOS

Ejercicio 17.- Calcular PQ, $3P + Q$ y $P^2 - Q$ e indicar el grado de cada uno.

a) $P(x) = 2x + 1$ $\quad Q(x) = x^2 + 3x - 2$

b) $P(x) = 3x^2 + x - 1$ $\quad Q(x) = -9x^2 - 3x + 6$

c) $P(x) = x^3 - 3$ $\quad Q(x) = -x^3 + 2x^2 + 1$

Ejercicio 18.- Encontrar, si existen, a, b y c en $\mathbb{R}$ tales que:

a) $3x - 2 = a(x^2 + x + 3) + b(x^2 - 2x + 1) + c(x^2 - 3)$

b) $(2x - 1)(x + 1) = ax^2 + b(x + 1)(x + 3)$

Ejercicio 19.- a) Determinar $a \in \mathbb{R}$ tal que:

i) Si $P(x) = ax^3 - 3ax^2 + 2$, sea $P(2) = 3$

ii) Si $P(x) = x^3 + 3x^2 + a$, P tenga a cero como raíz

iii) Si $P(x) = ax^2 + ax + 3$, sea $P(-1) = 3$ y gr $P = 2$

b) Determinar a, b y c en $\mathbb{R}$ para que:

i) $P(x) = ax^2 + bx + c$ tenga a 1 y -1 por raíces

ii) $P(x) = x^2 + 2bx + a$ y $Q(x) = ax^3 - b$ tengan a 2 como raíz común.

Ejercicio 20.- Determinar todas las raíces de P.

a) $P(x) = x^2 + ix + 1$

b) $P(x) = x^2 + (1 - i)x + 1$

c) $P(x) = x^2 + 2x + 1$

d) $P(x) = ix^5 - 1$

Ejercicio 21.- Hallar todas las raíces de P.

a) $P(x) = 3x^3 + x^2 + 12x + 4$

b) $P(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \dfrac{2}{3}x - 7$

c) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

d) $P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - x - 10$ sabiendo que i es raíz

e) $P(x) = x^5 - 25x^3 + 85x^2 - 106x + 45$ sabiendo que $(2 + i)$ es raíz

f) $P(x) = x^4 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{4}$

g) $P(x) = x^6 - 2x^4 - 51x^2 - 108$ sabiendo que $P(-\sqrt{3}\,i) = 0$

Ejercicio 22.- Dado $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + ax + a$, determinar $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que $(1 + i)$ es raíz de P y hallar las restantes raíces de P.

Ejercicio 23.- Escribir $x^4 + 1$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[X]$ y en $\mathbb{R}[X]$.

Ejercicio 24.- Determinar la multiplicidad de α como raíz de P.

a) $P(x) = (x^2 - 1)(x - 1)^3(x^5 - 1)$ $\quad \alpha = 1$

b) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 12x^2$ $\quad \alpha = 0$

c) $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$ $\quad \alpha = 2$

d) $P(x) = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^3 + i)$ $\quad \alpha = i$

Ejercicio 25.- Hallar todas las raíces del polinomio P y escribirlo como producto de polinomios de grado 1.

a) $P(x) = x^5 - 6x^4 + 10x^3 + 4x^2 - 24x + 16$, y se sabe que P tiene una raíz triple.

b) $P(x) = 4x^3 + 8\sqrt{3}\,x^2 + 15x + 3\sqrt{3}$, y se sabe que P tiene una raíz doble.

Ejercicio 26.-

a) Hallar $P \in \mathbb{R}[X]$, de grado mínimo, que tenga a 1/2 como raíz simple, a $(1 + i)$ como raíz doble y que verifique que $P(0) = -2$.

b) Hallar todos los polinomios P con coeficientes reales, de grado 3, que tengan a (-2) como raíz doble y que verifiquen $P(1) = P(-1)$.

Ejercicio 27.- Sabiendo que $Q(x) = 81x^4 - 1$ y $P(x) = 9x^4 + 27x^3 - 8x^2 + 3x - 1$ tienen alguna raíz común, encontrar todas las raíces de P.

Ejercicio 28.- Sea $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1$, y sean a, b y c sus raíces.

Calcular: $\quad a+b+c \quad abc \quad a^2+b^2+c^2 \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Ejercicio 29.- Calcular la suma y el producto de las raíces séptimas de la unidad.

Ejercicio 30.-

a) Sea $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + \alpha$.

Encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la suma de dos de las raíces de P sea igual a -1.

b) Sea $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + \alpha$.

Encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que una de las raíces de P sea igual a la opuesta de otra.

c) $P(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + \alpha$.

Encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que una de las raíces de P sea igual a la suma de las otras dos.

Ejercicio 31.-

a) Encontrar un polinomio P, de grado a lo sumo 3, que satisfaga:

$$P(1) = 1 \quad ; \quad P(0) = -1 \quad ; \quad P(2) = 2 \quad ; \quad P(-1) = 0$$

b) Encontrar la ecuación de una parábola que pase por P_1, P_2 y P_3, donde

$$P_1 = (-1,1) \quad ; \quad P_2 = (0,1) \quad ; \quad P_3 = (2,-2)$$

c) Encontrar un polinomio de grado 4 que satisfaga:

$$P(-1) = -1 \quad ; \quad P(0) = 1 \quad ; \quad P(1) = 4$$

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que:

a) $z^3 = 3iz\overline{z}$ b) $(1+\sqrt{3}i)z^3 = 2\overline{z}$

2. Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, tal que $|z| = 1$. Calcular $\operatorname{Im}(i\frac{1+z}{1-z})$.

3. Hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$, de grado mínimo, que verifique:

$P(1+i) = 0$; -1 es raíz doble de P ; $\operatorname{Im}(P(i)) = 28$

4. Sea $P(x) = (x^3 - ax^2 - a^2x + 1)(x^2 - a^2)$. Hallar a para que -1 sea raíz doble de P.

5. Sean $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - 8x - 8$ y $Q(x) = x^3 - 1$. Se sabe que P y Q tienen al menos una raíz común. Hallar todas las raíces de P en $\mathbb{C}$.

6. Hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$, de grado mínimo, que verifique simultáneamente: las soluciones de $z^2 = 5\overline{z}$ son raíces de P; P tiene alguna raíz doble; $P(1) = 31$.

7. Encontrar todas las raíces de $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 - 12x - 8$, sabiendo que tiene alguna raíz imaginaria pura.

8. a) Hallar todas las raíces sextas de $(1 + i)$

b) ¿Existe una raíz sexta de $(1 + i)$ cuyo conjugado sea también raíz sexta de $(1 + i)$?

c) Hallar el producto de todas las raíces sextas de $1 + i$.

9. a) Hallar el resto de la división de P por $(x - 3)(x + 2)$, si $P(3) = 1$ y $P(-2) = 3$

b) Calcular el resto de la división de $P(x) = x^n - 2x^{n-1} + 2$ por $x^2 + x$.

c) Los restos de dividir a $P(x)$ por $(x + 2)$, $(x - 3)$ y $(x + 1)$ son 3, 7 y 13 respectivamente. Calcular el resto de la división de $P(x)$ por $(x + 2)(x - 3)(x + 1)$

d) Calcular el resto de la división de $P(x) = (\cos a + x \operatorname{sen} a)^n$ por $x^2 + 1$.

10. Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ y $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$. Hallar el resto de la división de P por Q sabiendo que $P(0) = -1$; $P(1) = 3$; $\partial P(1) = -3$.

11. Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^7 \overline{z}^3 = -2^{10} i$.

12. Hallar z_1 y z_2 tales que ambos sean soluciones de $(1-i)z^2 = (2+2i)\overline{z}$ y que además verifiquen $\operatorname{Re}(z_1) < 0$; $\operatorname{Im}(z_1 \cdot \overline{z}_2) > 0$.

13. Encontrar un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$ de grado mínimo que tenga por raíces a las soluciones de la ecuación $(2 \operatorname{Im} z - i \operatorname{Re} z)^2 = -5 + 12i$.

14. Hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$ de grado 4, que cumpla las siguientes condiciones:

i) el coeficiente principal de P es igual a 6 ii) $-1-i$ es raíz de P

iii) el cociente entre dos de sus raíces reales es igual a 4 iv) $P(0)=192$

15. Graficar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 = (\overline{z})^4$ y $|\operatorname{Re}(z)| < 1$.

16. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^6 = i(\overline{z})^{-4}$ e $\operatorname{Im}(z^3) < 0$.

17. Hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$, de grado mínimo, que tenga por raíces a todas las soluciones de la ecuación $z^4 \overline{z} = 2i|z|^4$.

18. Hallar todas las raíces de $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10$ sabiendo que la suma de sus raíces reales es igual a cero.

19. Se sabe que el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$ tiene alguna raíz imaginaria pura. Hallar todas las raíces de P y escribir P como producto de polinomios de grado 1.