PRÁCTICA 7

AUTOVECTORES Y AUTOVALORES

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es un *autovector* de A (o vector propio), si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Diremos que el número λ es un *autovalor* de A (o valor propio) y que el vector $\mathbf{v}$ es un *autovector de A asociado al autovalor λ.*

Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es un *autovector de f asociado al autovalor λ*, si $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

El conjunto $\mathbb{S}_\lambda = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{V} \;/\; f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \}$ es el *subespacio asociado al autovalor λ.*

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Si $\mathbf{v}$ es un autovector de f asociado al autovalor λ y $A = M(f)$, entonces $\mathbf{v}$ es un autovector de A asociado al mismo autovalor λ, pues $A\mathbf{v} = f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$

Propiedad: λ es autovalor de A si y sólo si la matriz $A - \lambda I$ no es inversible, o sea, si y sólo si $\det(A - \lambda I) = 0$.

El polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se llama *polinomio característico* de A. Su grado es n y los autovalores de A son raíces de P.

Propiedad: Si $\lambda_i \neq \lambda_j \;\; \forall\, i \neq j$ y $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ son autovectores de A asociados a los autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_r$, respectivamente, entonces $\{ \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r \}$ es linealmente independiente.

La transformación lineal $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ se dice *diagonalizable* si existe una base B de $\mathbb{V}$ tal que $M_B(f)$ es diagonal.

Propiedad: Si $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal y B es una base de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de f, entonces $M_B(f)$ es diagonal.

Propiedad: Si $\dim \mathbb{V} = n$ y f tiene n autovalores distintos, entonces f es diagonalizable.

Propiedad: Si B y B′ son dos bases de $\mathbb{V}$, y $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal, entonces las matrices $M_B(f)$ y $M_{B'}(f)$ tienen los mismos autovalores.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *diagonalizable* si existe una matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y una matriz inversible $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $A = C\,D\,C^{-1}$

Propiedad: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si tiene n autovectores linealmente independientes, $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

En este caso C es la matriz cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$, y $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$,

donde λ_i es el autovalor asociado a $\mathbf{v}_i$.

EJERCICIOS

Ejercicio 1.- Para cada matriz calcular todos los autovalores y para cada uno de ellos hallar el subespacio asociado.

a) $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.-

a) Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene a 1 como autovalor.

b) Para los valores de k hallados, calcular todos los autovalores de A.

Ejercicio 3.- Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ para la cual $M_B(f)$ sea diagonal.

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.- Sean B = { (1, 1, 1); (0, 1, 1); (0, 0, 1) } y $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t. l. definida por

$M_B(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Encontrar una base B′ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{B'}(f)$ sea diagonal.

Ejercicio 5.- Sea B = {(1, –1, 0); (0, 0, 1); (–3, 2, 0)} y $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que

$M_{BE}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 9 \\ 4 & 4 & -9 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Decidir si f es diagonalizable.

En caso afirmativo, encontrar una base B′ tal que $M_{B'}(f)$ sea diagonal.

Ejercicio 6.- Determinar si la matriz A es diagonalizable; en caso afirmativo encontrar matrices C y D tales que D es diagonal y $A = C\,D\,C^{-1}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 7.- Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, calcular A^{10}.

Ejercicio 8.- Sea f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbb{S} = \langle (a+3, a^2-4, 1) \rangle$.

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$.

Ejercicio 9.- Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 4x_2 + 4x_3,\ 5x_1 + 7x_2 + 10x_3,\ -6x_1 - 7x_2 - 10x_3).$$

Encontrar una base de B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ k & 3 & -1 \end{pmatrix}$ tiene un autovalor igual a -2.

Decidir si A es diagonalizable.

2. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$, B = $\{(-1, 1, 0), \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tal que $M_B(f)$ sea diagonal.

3. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{V}$ y $f:\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la t.l. definida por:

$f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$; $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$; $f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_3$. Hallar una base de autovectores de f.

4. Sea B = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar los autovalores y autovectores de f. ¿Es f diagonalizable?

5.- Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 2x_3, -7x_1 - 3x_2 + x_3, \alpha x_1 + 4x_3)$.

Determinar α para que f no sea isomorfismo y decidir si existe una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_B(f)$ sea diagonal.

6. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, 3x_2 + 2x_3, -x_3)$.

Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_B(f^{-1})$ sea diagonal.

7. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \langle(1,1,0,-1), (-1,0,1,0)\rangle$.

Hallar una t.l. $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que sus autovalores sean 3, -2 y 0; $\operatorname{Im} f = \mathbb{T}$ y $\operatorname{Nu} f \subset \mathbb{S}$.

8. Sean B = $\{(0,1,1), (1/2,-1/2,0), (0,0,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que

$M_{EB}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar una base B′ tal que $M_{B'}(f)$ sea diagonal.

9. Sean B = {(0,0,1), (1,0,0), (0,1,0)}; B′ = {(0,0,–1), (–1,–1,–1), (3,2,1)} y $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar los autovalores de $f \circ f$.

10. Sea B = {(1,0,–1), (0,2,1), (–1,3,2)} y $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que

$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontrar a y b para que $f(-1, -1, 0) = (-1, -1, 0)$.

Para los valores hallados, decidir si f es diagonalizable.

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 0 & b & -2 \\ 1 & a+2b & 2 \end{pmatrix}$.

Determinar a y b para que $(1,-1,0)$ sea autovector de A.

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & -4 \\ -8 & 8 & k \end{pmatrix}$, hallar $k \in \mathbb{R}$ sabiendo que 1 es autovalor de A.

Para ese valor de k, determinar si A es diagonalizable.

13. Sean B={v_1; v_2; v_3} y B'={v_1; $v_1 - v_3$; $v_2 + v_3$} bases de $\mathbb{R}^3$ y sea f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Decidir si f es diagonalizable.

14. Sean B'= {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$} y B''= {$\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$; $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$; $\mathbf{v}_2$} bases de $\mathbb{V}$. Sea f: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la t. l. tal que $M_{B''B'}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y sea g: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definida por $g(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) - 2\mathbf{v}$.

Hallar una base B de $\mathbb{V}$ tal que $M_B(g)$ sea diagonal.

15. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una t. l. que verifica: $f(1,1,0) = (2,-10,k)$; $f(0,-1,0) = (0, 3, 0)$ y $f(0,1,1) = (2,-2, 4)$.

Hallar, si es posible, los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales f no es monomorfismo.

Para los valores de k encontrados, decidir si f es diagonalizable.

16. Sean $B=\{(1,-2,2);(0,-1,0);(0,1,-1)\}$ y f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t. l. tal que

$$M_{EB}(f)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & -1 \\ 5-k & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de k para los cuales 1 es autovalor de f y f es diagonalizable.

17. Sean $B=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_3\}$ y $B'=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2;-\mathbf{v}_1-2\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3\}$ bases de un e.v. $\mathbb{V}$ y $f:\ \mathbb{V}\to\mathbb{V}$ la transformación lineal tal que $M_{BB'}(f)=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Hallar, si es posible, una base de autovectores de *f*, sabiendo que $2\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3$ es un autovector de f.