Índice

Programa

- **Unidad 0:** Repaso de operatoria, ecuaciones y problemas.
- **Unidad 1:** El número real. Inecuaciones lineales. Intervalos. Inecuaciones más generales. Distancia en la recta real. Módulo.
- **Unidad 2:** Funciones: introducción. Funciones lineales. Funciones cuadráticas. Funciones polinómicas. Continuidad. Teorema de Bolzano. Composición de funciones. Inversa de funciones.
- **Unidad 3:** Funciones homográficas. Noción de límite. Asíntotas horizontales y verticales.
- **Unidad 4:** Funciones exponenciales y logarítmicas. Dominio, imagen, asíntotas. Aplicaciones y problemas. Funciones trigonométricas. Ecuaciones. Máximos, mínimos, amplitud y período.
- **Unidad 5:** Derivadas. Reglas de derivación. Regla de la cadena. Recta tangente. Derivadas sucesivas. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos. Estudio de funciones.
- **Unidad 6:** Integrales. Primitivas de una función. Método de sustitución. Método de integración por partes. Integral definida. Regla de Barrow. Cálculo de áreas.

Práctica 0: Preliminares

Ejercicio 1. Calcular.

a) -3^3 *b*) $(-3)^3$ *c*) -2^4 *d*) $(-2)^4$

e) $\dfrac{1^2}{2}$ *f*) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ *g*) $\dfrac{(-1)^2}{2}$ *h*) $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^3$

i) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$ *j*) $(-3)^{-1}$ *k*) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ *l*) $\dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}}$

m) $2\left(\dfrac{3}{5}\right)$ *n*) $2\cdot\dfrac{3}{5}$ *o*) $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{7}{2}$ *p*) $3:\dfrac{1}{2}$

q) $\dfrac{1}{2}:3$ *r*) $\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{9}\right)$ *s*) $\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}\right)$ *t*) $\sqrt{9+16}$

Ejercicio 2. Resolver.

a) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{3}-\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{6}\right)$ *b*) $\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}\right)\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{6}$ (**C**)

c) $\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^6:\left(\dfrac{2}{5}\right)^4\right]^{-1}$ *d*) $\left(8^{\frac{4}{9}}\right)^{-\frac{3}{2}}$

e) $\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{9}\right)^{-1}\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}\right)^2$ *f*) $\dfrac{4+5^3-9}{10^2-70}$ (**C**)

g) $\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{5}{2}:\dfrac{1}{4}\right)$ (**C**) *h*) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^0+\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}}$

i) $\left(\dfrac{\sqrt{9+16}}{15}+\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ (**C**) *j*) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$

(**C**) *Los ejercicios marcados con esta referencia resolverlos usando la calculadora.*

Ejercicio 3. Resolver.

a) $2x+5=9$ *b*) $5-3(x+1)=3$

c) $3-\dfrac{x}{2}=-5x+7$ *d*) $\dfrac{5}{x}+2=3$

e) $3 + x = x - 2$

f) $\dfrac{3x-7}{x+6} = -2$

g) $\dfrac{3x-2}{7x} = 0$

h) $5x + 2 = x + 3 - (1 - 4x)$

Ejercicio 4. Marcar la única respuesta correcta en cada caso.

a) La expresión $(2+x)^2$ es equivalente a

(i) $4 + x^2$ (ii) $4x^2$ (iii) $4 + 4x + x^2$

b) La expresión $(x-3)^2$ es equivante a

(i) $x^2 - 6x + 9$ (ii) $x^2 - 9$ (iii) $x^2 - 6x - 9$

c) La fracción $\dfrac{4}{2+2a}$ es equivalente a

(i) $\dfrac{2}{1+2a}$ (ii) $\dfrac{4}{2} + \dfrac{4}{2a}$ (iii) $\dfrac{2}{1+a}$

d) La solución de la ecuación $\dfrac{6}{x+2} = 1$ es

(i) $x = 1$ (ii) $x = 2$ (iii) $x = 4$

e) La fracción $\dfrac{5+b}{5}$ es equivalente a

(i) b (ii) $1 + \dfrac{b}{5}$ (iii) $\dfrac{b}{5}$

f) La solución de $5x = 0$ es

(i) $x = -5$ (ii) $x = \dfrac{1}{5}$ (iii) $x = 0$

g) La solución de $\dfrac{7}{2x-4} - \dfrac{1}{x-2} = 3$ es

(i) $x = \dfrac{17}{6}$ (ii) $x = 3$ (iii) $x = 2$

Ejercicio 5. Desarrollar.

a) $(x-5)^2$

b) $(x+7)^2$

c) $4(x-3)(x+1)$

d) $(x-y)(x+y)$

Ejercicio 6. Escribir como producto de dos factores.

a) $x^2 - 81$

b) $x^3 - 11x$

c) $x^2 - 10x + 25$

d) $4x^2 - 9$

e) $x^4 - 81$

f) $x^4 + 3x^3 + 5x^2$

Ejercicio 7. Sean b la longitud de la base y h la longitud de la altura de un rectángulo. Expresar, en función de b y h, las siguientes afirmaciones.

a) La base excede en 2 unidades a la altura.

b) La base es el doble de la altura.

c) La diagonal del rectángulo mide $5cm$.

d) La altura es igual a $\dfrac{2}{5}$ de la base.

Práctica 1

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 1. Representar en la recta real.

a) $\left\{2,\ -1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{8},\ -\frac{3}{2}\right\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ (9x-1)(7x-6) = 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ (5-x)\left(x^2-9\right) = 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ (2-3x)^2 = 0\}$

Ejercicio 2.

a) Dar dos números que pertenezcan al conjunto A y dos que no pertenezcan.

(i) $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -2 < x \leq 4\}$

(ii) $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 > 5\}$

b) Decidir si los números a y b pertenecen al conjunto C.

(i) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 5x - 3 > \frac{1}{2} - x\right\}$ $\quad a = -2; \quad b = 1$

(ii) $C = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 25 > 0\}$ $\quad a = 0; \quad b = 5$

Ejercicio 3. Representar en la recta real y escribir como un intervalo o una unión de intervalos.

a) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ -1 \leq x < 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < -1 \text{ ó } x > 5\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 5x - 3 > \frac{1}{2} - x\right\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ 3 < 2x - 1 \leq 7\}$

Ejercicio 4. Escribir como un intervalo o una unión de intervalos y representar en la recta real.

a) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x(x-1) > 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ (x-1)(x+4) \leq 0\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{3-x}{5x-4} \geq 0\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{7x+5}{x-1} < 7\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{25}{x} + 3 > -2\right\}$

Ejercicio 5. Representar en la recta real.

a) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| = 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| < 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| = -2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}/|x| \geq 5\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| \geq -1\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| \leq \frac{1}{2}\}$

Ejercicio 6.

a) Representar en el plano los puntos A y B y calcular la distancia entre ellos.

(i) $A = (3, 2)$ y $B = (7, 5)$

(ii) $A = (-1, 0)$ y $B = (3, -2)$

(iii) $A = (0, -2)$ y $B = (7, 5)$

b) Calcular el perímetro del triángulo de vértices $A = (1, -3)$, $B = (-2, -3)$ y $C = (-2, 1)$.

Ejercicio 7.

a) Hallar todos los puntos A de la forma $A = (a, -2)$, con $a \in \mathbb{R}$, que están a distancia 5 del punto $B = (0, 1)$.

b) Hallar todos los puntos $P = (a, 3a)$, con $a \in \mathbb{R}$, que están a distancia 3 del punto $Q = (1, 0)$.

c) Sean $A = (0, 0)$ y $B = (4, 0)$. Hallar todos los puntos $P = (a, b)$, con a y b en $\mathbb{R}$, tales que la distancia entre A y P es igual a la distancia entre B y P. Graficar.

Ejercicios tipo parcial

Ejercicio 8. Escribir como un intervalo o una unión de intervalos y representar en la recta real el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 1 \leq 1 - 3x < 2\}$.

Ejercicio 9. Escribir como un intervalo o una unión de intervalos el conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{4}{x} + 11 < 1 \right\}.$$

Ejercicio 10. Escribir como un intervalo o una unión de intervalos el conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{x+1}{x} < \frac{2}{x} \right\}.$$

Ejercicio 11. Hallar todos los puntos de la forma $A = (a, 2a-1)$, con $a \in \mathbb{R}$, que están a distancia 5 del punto $B = (3,3)$.

Ejercicio 12. Hallar todos los puntos del eje y que están a distancia 5 del punto $A = (4,-2)$.

Ejercicio 13. Hallar todos los puntos del eje x que están a distancia 3 del punto $A = (1,-3)$. Graficar.

Ejercicio 14. Dados los puntos $A = (-2,1)$; $B = (a,1)$; $C = (1,-1)$ y $D = (-3,2)$, hallar los valores de a para que la distancia entre C y D sea igual a la distancia entre A y B.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 15. Escribir como un intervalo o una unión de intervalos y representar en la recta real el conjunto $B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{6x^2}{2x-5} > 3x \right\}$.

Ejercicio 16. Dar cinco puntos del plano que estén a distancia 2 del punto $A = (1,-1)$.

Práctica 2

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 1. Sea $f(x) = 4x(x+1)^3$. Completar la siguiente tabla de valores.

x	-3	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f(x)$				

Ejercicio 2. Hallar en los siguientes casos el dominio de f y decidir si $-3 \in \operatorname{Im} f$.

a) $f(x) = \dfrac{x-4}{6+2x}$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-4}$

d) $f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2+1}$

FUNCIONES LINEALES

Ejercicio 3. Graficar la función f, siendo:

a) $f(x) = 4x$

b) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 2$

c) $f(x) = 0$

d) $f(x) = 3x - \frac{2}{5}$

e) $f(x) = 3$

Ejercicio 4. Encontrar la función lineal f que satisface en cada caso:

a) $f(1) = 0,\ f(2) = 5$

b) $f(-2) = 7,\ f(4) = 3$

c) Su gráfico es la recta que pasa por los puntos:

(i) $P = (1,2),\ Q = (3,6)$

(ii) $P = (2,5),\ Q = (-4,5)$

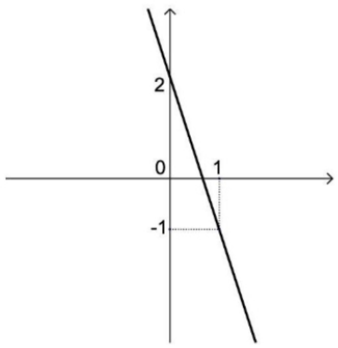
Ejercicio 5. Hallar la ecuación de la recta en cada uno de los siguientes casos:

a) Pasa por el punto $P = (0,2)$ y tiene pendiente $m = 3$.

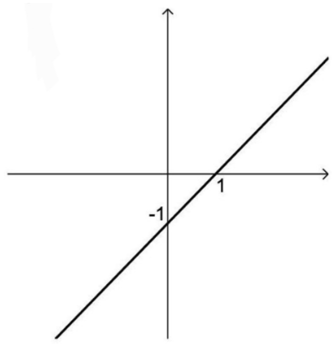
b) Tiene pendiente $m = -\dfrac{3}{2}$ y pasa por el punto $Q = (2,4)$.

Ejercicio 6. Hallar, en cada caso, la función lineal cuyo gráfico es:

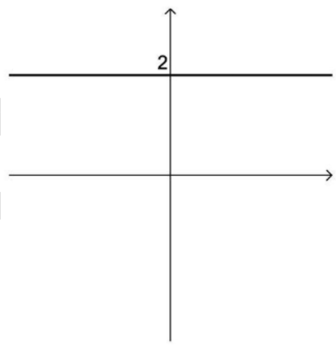
a)



b)



c)



Ejercicio 7.

a) Sea $f(x) = 2x + 5$. Encontrar las intersecciones del gráfico de f con los ejes coordenados. Graficar.

b) Encontrar el cero y los conjuntos de positividad y de negatividad de $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

Ejercicio 8. Hallar en cada caso el punto de intersección de los gráficos de f y g.

a) $f(x) = x + 2$, $g(x) = -2x + 8$.

b) $f(x) = 2x + 1$, g es la función lineal cuyo gráfico tiene pendiente 4 y ordenada al origen 5.

Ejercicio 9. Escribir como intervalo o unión de intervalos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \leq g(x)\}.$$

Representar gráficamente las funciones f y g y el conjunto A.

a) $f(x) = x + 10$, $g(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = -5x + 3$, $g(x) = -7$

Ejercicio 10. Sea $f(x) = mx + 5$. Encontrar el valor de $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(2) = -3$. Para el valor hallado, determinar los puntos en los que el gráfico de f corta a los ejes coordenados.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Ejercicio 11. Hallar el vértice de la parábola que es el gráfico de la función f. Dar su imagen y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Graficar.

a) $f(x) = x^2 - 9$

b) $f(x) = (x+2)^2$

c) $f(x) = -(x-2)(x+5)$

d) $f(x) = 3x^2 + 12x - 9$

Ejercicio 12. Hallar los ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de f.

a) $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$

b) $f(x) = (x-3)^2 + 1$

c) $f(x) = 3x^2 - 9x$

d) $f(x) = -5(x+1)^2$

Ejercicio 13. Hallar, en cada caso, la función cuadrática f tal que:

a) su gráfico tiene vértice $V = (4, 5)$ y pasa por el punto $(3, 3)$.

b) el intervalo de crecimiento es $(3; +\infty)$, su imagen es $[-2; +\infty)$ y $f(4) = 6$.

Ejercicio 14. Hallar, si existen, los puntos de intersección de los gráficos de f y g.

a) $f(x) = x^2 + 5x + 4$, $g(x) = 3x + 7$.

b) $f(x) = -x^2 + x + 1$, $g(x) = -2x + 4$.

c) $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$, $g(x) = 2x^2 + x + 14$.

d) $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$, $g(x) = 2x^2 - x + 5$.

e) f es la función lineal tal que $f(2) = 5$ y $f(4) = 9$, $g(x) = x^2 + 6x + 5$.

FUNCIONES POLINÓMICAS

Ejercicio 15.

a) Encontrar el conjunto de ceros de $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$.

b) Dada $f(x) = \left(x^3 + 6x^2 + 9x\right)(x - 2)$, encontrar todos los puntos donde el gráfico de f corta al eje x.

Ejercicio 16.

a) Sea f la función polinómica de grado 3 que corta al eje x en los puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(2, 0)$. Determinar f sabiendo que $f(3) = 16$.

b) Hallar la función polinómica f de grado 4 tal que su conjunto de ceros es $\{-1,\ 0,\ 1,\ 5\}$ y $f(2) = 9$.

Ejercicio 17. Hallar los ceros de la función polinómica f y determinar sus conjuntos de positividad y de negatividad.

a) $f(x) = (2x + 3)(3x - 9)(x - 4)$

b) $f(x) = x^2(2x - 3)^2$

c) $f(x) = \left(x^3 + 3x^2 + 2x\right)\left(x^2 + \dfrac{9}{4}\right)$

d) $f(x) = 64 - x^6$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Ejercicio 18. Completar la siguiente tabla de valores:

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	4	1	2
$g(x)$	4	2	1	1
$(f \circ g)(x)$				
$(g \circ f)(x)$				

Ejercicio 19. Dadas las funciones f y g, calcular $f \circ g$ y $g \circ f$. Graficar.

a) $f(x) = 4x - 5,\ \ g(x) = x + 3$

b) $f(x) = 2x + 7,\ \ g(x) = -5x$

c) $f(x) = 3x - 2,\ \ g(x) = x^2 + 3$

FUNCIÓN INVERSA

Ejercicio 20. Hallar los $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x) = b$. Representar gráficamente.

a) $f(x) = 2x + 1 \quad b = 9, \quad b = -1$

b) $f(x) = x^2 - 3 \quad b = 13, \quad b = -4$

Ejercicio 21. Calcular f^{-1} y dar su dominio. Graficar f y f^{-1}.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$

b) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9$

c) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x - 1}$

d) $f : (-\infty, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{5 - x}$

Ejercicios tipo parcial

Ejercicio 22. Sean $g(x) = -3x + 8$ y f la función lineal que verifica $f(-3) = 4$ y $f(-1) = 2$. Escribir como un intervalo el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ g(x) < f(x)\}$.

Ejercicio 23. Sean $f(x) = -x + 1$ y g la función lineal tal que $g(1) = 2$ y $g(-2) = 8$. Escribir como un intervalo el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \cdot g(x) \geq 0\}$.

Ejercicio 24. Sea f la función lineal cuyo gráfico pasa por los puntos $(1, 6)$ y $(-1, 2)$. Escribir como intervalo o unión de intervalos el conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \dfrac{f(x)}{3x - 1} > 1\right\}$.

Ejercicio 25. Sea f la función lineal que satisface que $f(2) = 7$ y $f(-2) = -1$. Encontrar los dos puntos del gráfico de f que están a distancia $\sqrt{5}$ del punto $(0, 3)$.

Ejercicio 26. Hallar la función cuadrática f tal que su gráfico es una parábola cuyo vértice tiene abscisa 2, $\mathrm{Im}\, f = [5; +\infty)$ y $f(4) = 13$.

Ejercicio 27. Sean $P = (1, 3)$ y V el vértice de la parábola de ecuación $y = x^2 - 4x + 5$. Dar la ecuación de la recta que pasa por P y por V.

Ejercicio 28. Sea $f(x) = 3x^2 - 3x - 18$. Encontrar la función cuadrática g que tiene los mismos ceros que f y satisface $g(1) = 24$.

Ejercicio 29. Sean P el punto donde la recta de ecuación $y = 2x + 6$ corta al eje x y V el vértice de la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x + 4$. Calcular la distancia entre P y V.

Ejercicio 30. Dada $f(x) = ax^2 + 8x + 2$, hallar a de modo que el vértice del gráfico de f tenga abscisa $x = 2$. Para el valor de a hallado, determinar la imagen de f.

Ejercicio 31. Dadas $f(x) = 6x^2 + kx + 2$ y $g(x) = x + 1$, hallar $k \in \mathbb{R}$ de modo que $f(1) = g(1)$. Para el valor de k hallado, encontrar todos los puntos de intersección de los gráficos de f y g.

Ejercicio 32. Encontrar todos los puntos donde el gráfico de $f(x) = 5(x+1)\left(x^2 + x - 2\right)$ corta al eje x. Determinar los conjuntos de positividad y de negatividad de f.

Ejercicio 33. Determinar los conjuntos de positividad de $f(x) = (-2x+1)\left(x^2 + 3x - 10\right)$.

Ejercicio 34. Hallar la función polinómica de grado 3 cuyo gráfico pasa por los puntos $(-3,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$ y $(3,30)$.

Ejercicio 35. Sean $f(x) = x^2 + 5x$ y $g(x) = 2x - 4$. Hallar los puntos de intersección de los gráficos de $f \circ g$ y $g \circ f$.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 36.

a) La relación funcional entre grados Celsius y grados Kelvin es lineal.

Sabiendo que $0°C = 273K$ y que $27°C = 300K$, encontrar la función f que da la temperatura en grados Celsius conocida la misma en grados Kelvin.

b) La función $g(x) = 1{,}8\,x + 32$ expresa la temperatura en grados Fahrenheit, conocida la misma en grados Celsius. Encontrar la expresión de la temperatura en grados Fahrenheit en función de la temperatura en grados Kelvin. ¿Es lineal?

Ejercicio 37. La función $f(x) = 1{,}8\ x + 32$ expresa la temperatura en grados Fahrenheit, conocida la misma en grados Celsius. Dar la función que permite, dada una temperatura cualquiera en grados Fahrenheit, obtener la misma en grados Celsius. Sabiendo que el papel arde aproximadamente a $451°\mathrm{F}$, ¿a cuántos grados Celsius tendrá que exponer esta práctica para quemarla? (¿Conoce la novela de Ray Bradbury?).

Ejercicio 38. (*Regla de Ruffini o calculadora*) Encontrar el conjunto de ceros de $f(x) = x^6 - x^5 - 5x^4 - 3x^3$, sabiendo que $f(-1) = 0$.

Ejercicio 39. (*Teorema de Bolzano*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que corta al eje x en exactamente 3 puntos y de la cual se conoce la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	-2	3	5	4	1	-1

a) Para cada uno de los ceros de f indicar un intervalo de longitud 1 que lo contenga.

b) Determinar, si es posible, el signo de f en los intervalos dados:

(i) $(0;1)$

(ii) $(2;3)$

(iii) $(5;+\infty)$

(iv) $(-\infty;-2)$

(v) $(0;2)$

(vi) $(-3;-1)$

c) Hacer el gráfico de una función f que satisfaga las condiciones dadas.

Ejercicio 40. (*Aproximación de raíces*) Sea $f(x) = x^3 + x - 7$. Probar que

a) f tiene un cero en el intervalo $(1;2)$.

b) f tiene un cero en el intervalo $(1,7;1,8)$.

c) f tiene un cero en el intervalo $(1,73;1,74)$.

Ejercicio 41. (*Aproximación de raíces*) Aproximar con error menor que $\frac{1}{32}$ un cero de f en el intervalo indicado.

a) $f(x) = x^5 - x - 32$ en $(2;3)$.

b) $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1000$ en $(9;10)$.

Práctica 3

Ejercicios de entrenamiento

FUNCIONES HOMOGRÁFICAS

Ejercicio 1. Hallar el dominio, la imagen, los ceros, los intervalos de positividad y de negatividad y las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de f. Hacer un gráfico de f.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{-2}{x+4}$

c) $f(x) = \dfrac{3x+5}{x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{4}{3x-1} - 3$

Ejercicio 2. Sea $f(x) = \dfrac{5x+1}{3x+k}$. Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de tal forma que $f(1) = 6$. Para el valor de k hallado, determinar las ecuaciones de todas las asíntotas de f.

Ejercicio 3. Dadas las funciones f y g, calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.

a) $f(x) = -x+1 \quad , \quad g(x) = \dfrac{1}{3-x} + 2$

b) $f(x) = x-4 \quad , \quad g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

Ejercicio 4. Sean $f(x) = 2x-1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+3} - 2$. Hallar las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$. Escribir las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de ambas funciones.

Ejercicio 5. Sean $f(x) = kx - 2$ y $g(x) = \dfrac{2x+6}{-x+4}$. Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que $(g \circ f)(1) = 5$. Para el valor de k hallado, calcular $(f \circ g)(1)$.

Ejercicio 6. Dada $f(x) = \dfrac{x-2}{3x+1}$, hallar los valores de $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tales que :

a) $f(x) = -\dfrac{1}{4}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3}$

c) $f(x) = 0$

Representar gráficamente.

Ejercicio 7. Sea $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$. Dar el dominio y la imagen de f. Calcular f^{-1} y hallar su dominio e imagen. Graficar ambas funciones.

Ejercicio 8. Sea $f(x) = \dfrac{4}{x-3} + 2$. Hallar la función inversa f^{-1} y dar el conjunto de positividad de f^{-1}.

Ejercicio 9. Dadas f y g, calcular $h = g \circ f$ y h^{-1}. Dar, en cada caso, las ecuaciones de las asíntotas de h y de h^{-1}.

a) $f(x) = -2x + 1$, $g(x) = \dfrac{-x+3}{4x-1}$

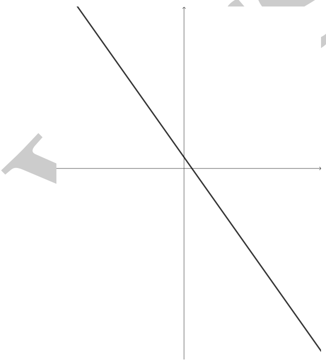
b) $f(x) = 4x - 2$, $g(x) = \dfrac{x+2}{2x-3} + 1$

c) $f(x) = \dfrac{2}{3x-1} + 5$, $g(x) = x + 2$

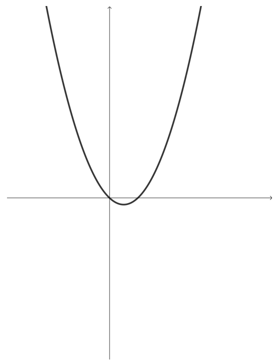
LÍMITE DE FUNCIONES Y ASÍNTOTAS

Ejercicio 10. Analizando el gráfico de f, determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

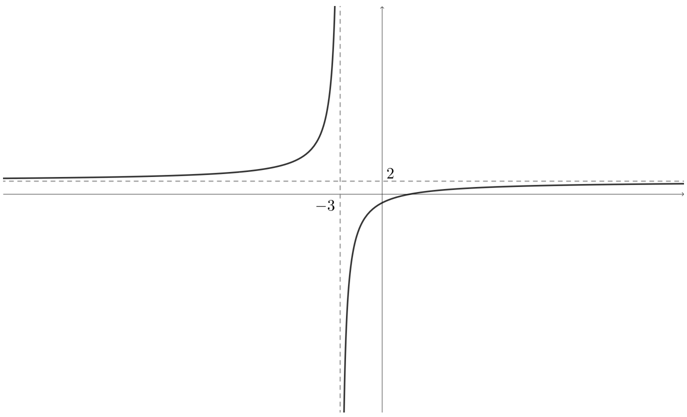
a) $f(x) = -3x + 2$



b) $f(x) = x^2 - 2x$



c) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+3}$



Ejercicio 11. Calcular.

a) $\lim_{x\to+\infty} 3x^3$

b) $\lim_{x\to-\infty} 4x^5$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{3}{x}+5\right)$

d) $\lim_{x\to-\infty} x^3\left(-2+\dfrac{7}{x}\right)$

Ejercicio 12. En cada caso, analizar la existencia de asíntotas horizontales. Si existen, dar sus ecuaciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x+9} - 4$

b) $f(x) = \dfrac{8x}{4x^2+6x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2-5x}{x+6}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^3+x+1}$

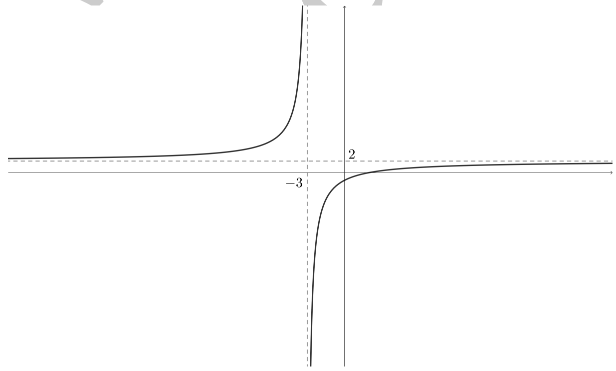
Ejercicio 13. Determinar, en cada caso, el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que:

a) La recta de ecuación $y = \dfrac{2}{3}$ sea asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{ax^2-2x+5}{6x^2+1}$.

b) La recta de ecuación $y = -2$ sea asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{ax}{3x-1} + 1$.

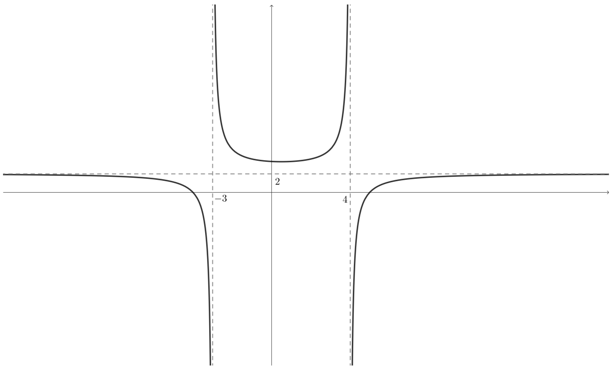
Ejercicio 14. Dado el gráfico de f, calcular los límites que se indican y escribir las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

a) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+3}$



$\lim_{x\to-3^-} f(x)$, $\lim_{x\to-3^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 40}{x^2 - x - 12}$



$$\lim_{x \to -3^-} f(x), \quad \lim_{x \to -3^+} f(x), \quad \lim_{x \to 4^-} f(x), \quad \lim_{x \to 4^+} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Ejercicio 15. En cada caso, hallar el dominio y analizar la existencia de asíntotas verticales. Si existen, dar sus ecuaciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{-5x+1}{x^2+3x-4}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - 1$

d) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-4}$

Ejercicio 16. Hallar, en cada caso, el dominio y las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

a) $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x+2}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + 1$

c) $f(x) = \dfrac{-2x^2+x}{5x^2+25}$

d) $f(x) = \dfrac{-6x+3}{x+3}$

Ejercicios tipo parcial

Ejercicio 17. Sean $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $g(x) = 3x + 1$ y $h = f \circ g$. Hallar los ceros de h^{-1}.

Ejercicio 18. Sean $f(x) = \dfrac{5x}{x-5}$ y $g(x) = x - 1$. Hallar $h = f \circ g$ y encontrar las asíntotas de h.

Ejercicio 19. Sea $f(x) = \dfrac{-20x+4}{kx+10}$. Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $x = 2$ sea asíntota vertical de f. Para el valor hallado, dar la ecuación de la asíntota horizontal de f.

Ejercicio 20. Sea $f(x) = \dfrac{6x-35}{ax-8}$. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $y = 3$ sea asíntota horizontal de f. Para el valor hallado, escribir la ecuación de la asíntota vertical de f.

Ejercicio 21. Sean $f(x) = x + k$ y $g(x) = \dfrac{2}{x}$. Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de manera que $(g \circ f)(1) = -4$. Para el valor de k encontrado, calcular $(f \circ g)(1)$.

Ejercicio 22. Sea $f(x) = \dfrac{5x^2+2x}{x^2+x-2}$. Determinar todas las asíntotas de f y escribir sus ecuaciones.

Ejercicio 23. Sea $f(x) = \dfrac{4x^2}{ax^2-3}$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ de modo que la recta $y = 12$ sea una asíntota horizontal de f. Para el valor de a encontrado, dar las ecuaciones de todas las asíntotas de f.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 24. Sea $f(x) = \dfrac{2}{x+a} - b$. Determinar a y $b \in \mathbb{R}$ para que las rectas de ecuaciones $x = -3$, $y = \dfrac{5}{3}$ sean asíntotas de f.

Ejercicio 25. Sea $f(x) = \dfrac{ax+3}{bx+1}$. Determinar a y $b \in \mathbb{R}$ para que $\dfrac{3}{2}$ sea un cero de f y la recta $y = 6$ sea asíntota horizontal de f.

Ejercicio 26. Hallar la expresión de la longitud L de un lado de un rectángulo en función de la longitud x del otro lado, si el área es 36. Dar el dominio de L y calcular $\lim_{x \to 0^+} L(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} L(x)$.

Ejercicio 27. Hacia un tanque que contiene agua pura, fluye agua salada de modo que la concentración de sal en un tiempo t está dada por la función

$$c(t) = \frac{3t}{100t + 4000}, \quad t > 0.$$

Dibujar el gráfico de $c(t)$, discutir el comportamiento de la función cuando $t \to +\infty$ e interpretar el significado.

Práctica 4

Ejercicios de entrenamiento

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ejercicio 1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $e^{2x-1} = 8$

b) $3e^{2-x} = 1$

c) $\ln(2x-3) = 0$

d) $\ln(5x-1) = 2$

Ejercicio 2. En cada caso hallar dominio, imagen, ceros, conjuntos de positividad y de negatividad y dar la ecuación de la asíntota horizontal de f. Graficar.

a) $f(x) = e^{x+1}$

b) $f(x) = e^{-x} - 2$

c) $f(x) = 6e^{x+2} - 5$

d) $f(x) = e^{-x+1} + 3$

Ejercicio 3. Hallar, en cada caso, el dominio, la imagen, las ecuaciones de las asíntotas verticales, los ceros, y los conjuntos de positividad y de negatividad de:

a) $f(x) = \ln(x-3)$

b) $f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$

c) $f(x) = 1 - \ln(2x-3)$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$

Ejercicio 4. Hallar la función inversa f^{-1}. Dar su dominio y su imagen.

a) $f(x) = e^{2x+1}$

b) $f(x) = \ln(3-x)$

c) $f(x) = 3 - e^{5x-4}$

d) $f(x) = 1 + \ln(2x+3)$

e) $f(x) = 2e^{4-5x} + 3$

Ejercicio 5. Sea $f(x) = e^{4x-8} + b$. Hallar el valor de b para que la imagen de f sea el intervalo $(9; +\infty)$. Para el valor de b hallado, calcular la función inversa f^{-1}.

Ejercicio 6.

a) Sean $f(x) = e^x + 5$, $g(x) = 2x + 3$ y $h(x) = f \circ g(x)$. Hallar la ecuación de la asíntota horizontal de h.

b) Sean $f(x) = 4x - 3$ y $g(x) = 7 - \ln(x)$. Hallar el dominio de la función $g \circ f$.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejercicio 7. Completar las siguientes tablas de valores.

a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(x)$		$\frac{1}{2}$			
$\cos(x)$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	

b)

x	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$
$\operatorname{sen}(x)$				
$\cos(x)$				

Ejercicio 8. Encontrar todos los $x \in [0; 2\pi]$ tales que

a) $\operatorname{sen}(x) = -\dfrac{1}{2}$

b) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos(x) = -1$

d) $\operatorname{sen}(x) = 0$

Ejercicio 9. Resolver las ecuaciones:

a) $\cos(x) = 1$ para $x \in [-\pi; \pi]$

b) $\operatorname{sen}(x) + 1 = 0$ para $x \in [-\pi; 2\pi]$

c) $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ para $x \in \mathbb{R}$

d) $2\operatorname{sen}(x) - \sqrt{2} = 0$ para $x \in [-\pi; \pi]$

e) $2\operatorname{sen}(x) + 1 = 0$ para $x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 10. Hallar la imagen de f. Determinar el valor máximo y el valor mínimo de f e indicar en qué puntos se alcanzan dichos valores.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}(x)$

b) $f(x) = 3\cos(x) + 2$

Ejercicio 11. Dadas $f(x) = 5x + 1$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, hallar las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$. Determinar la imagen de cada una de ellas.

Ejercicio 12. Hallar la imagen de $f(x) = 2\cos(3x) - 1$. Dar un valor de x en el cual f alcance su valor máximo y un valor de x en el cual f alcance su valor mínimo.

Ejercicio 13. Sea $f(x) = 3\operatorname{sen}(x + \pi) + k$. Determinar el valor de k para que $\operatorname{Im} f = [-4; 2]$. Para el valor de k hallado, dar un x_0 tal que $f(x_0) = -4$ y un x_1 tal que $f(x_1) = 2$.

Ejercicios tipo parcial

Ejercicio 14. Sean $f(x) = 6x + 12$, $g(x) = \ln(x)$. Hallar el dominio, los ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de $h = g \circ f$.

Ejercicio 15. Sean $f(x) = 4 + \ln(x)$, $g(x) = 5x + 2$, $h = f \circ g$ y h^{-1} la función inversa de h. Calcular h^{-1} y dar su dominio e imagen.

Ejercicio 16. Sea $f(x) = 3 - e^{4+2x}$. Hallar f^{-1} y dar el dominio.

Ejercicio 17. Sean $f(x) = ax^2 + \dfrac{1}{3}$ y $g(x) = \ln(x)$. Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(2) = 0$.

Ejercicio 18. Hallar todos los $x \in \left[-\pi; \dfrac{3}{4}\pi\right]$ tales que $1 + \operatorname{sen}(x) = 0$.

Ejercicio 19. Sea $f(x) = 5\operatorname{sen}(x) + 2$. Determinar la imagen de f y hallar los $x \in [-\pi; \pi]$ para los cuales f alcanza el valor máximo.

Ejercicio 20. Dada $f(x) = 2\cos(x)$, encontrar todos los $x \in [0; \pi]$ tales que $f(x) = -1$.

Ejercicio 21. Sea $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(x)$. Determinar todos los $x \in [0; 3\pi]$ tales que $f(x) = \dfrac{5}{2}$.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 22. La población (en millones) de cierta región, t años después del año 2000, se puede aproximar mediante la función

$$f(t) = 300 \cdot (1{,}02)^t$$

a) ¿Cuántos individuos tenía la región en 2000?

b) ¿y en 2010?

c) Si no varían las condiciones, ¿cuántos tendrá en 2040?

d) ¿Cuándo la población será el doble de lo que era en el año 2000?

Ejercicio 23. Un jarro con agua se retira del fuego cuando el agua que contiene está hirviendo y se coloca en una habitación donde la temperatura ambiente es $20°C$.
La temperatura (en $°C$) del agua, transcurridos t minutos de haber retirado el jarro del fuego, viene dada por

$$T(t) = 20 + 80e^{-0{,}41t}$$

a) Hallar la temperatura del agua a los 5 minutos.

b) ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que la temperatura sea de $40°\mathrm{C}$?

Ejercicio 24. Hallar la imagen de f. Determinar el valor máximo y el valor mínimo de f e indicar en qué puntos se alcanzan dichos valores.

a) $f(x) = -2\,\mathrm{sen}(2x + \pi)$

b) $f(x) = 2\cos(3x) - 1$

Ejercicio 25. Sea $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Hallar los ceros y los valores máximo y mínimo de f.

Práctica 5

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 1. Hallar la derivada de la función f usando las reglas de derivación.

a) $f(x) = 3x + \cos(x)$

b) $f(x) = x\operatorname{sen}(x)$

c) $f(x) = 5x^2 - \ln(x)$

d) $f(x) = e^x - \operatorname{sen}(x)$

e) $f(x) = (2x+3)e^x$

f) $f(x) = (x^4 - 3x^3)\ln(x)$

g) $f(x) = \dfrac{3x^2 + x}{x^4 + 3}$

h) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{3x^4 + 1}$

Ejercicio 2. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ para el x_0 dado:

a) $f(x) = -2x^2 + 13x - 15\,;$ en $x_0 = 3$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x} - \sqrt{x}\,;$ en $x_0 = 4$

Ejercicio 3. Hallar la derivada de la función f.

a) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$

b) $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{10}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}$

d) $f(x) = \ln\left(3x^2 + 1\right)$

e) $f(x) = e^{x^2 + x}$

f) $f(x) = 3\cos(2x)$

Ejercicio 4. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ para el x_0 dado:

a) $f(x) = \sqrt{2x - 3}\,;$ en $x_0 = 6$

b) $f(x) = \dfrac{5}{3x^2 + 7}\,;$ en $x_0 = 0$

Ejercicio 5. Sea $f(x) = \ln\left(x^2 - 6x + k\right)$. Hallar $k \in \mathbb{R}$ de modo que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 4$ sea igual a 2.

Ejercicio 6. Sea $f(x) = \dfrac{x}{5x^2 + a}$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x_0 = -1$ sea horizontal.

Ejercicio 7. Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y dónde alcanza los extremos locales. Dar los correspondientes valores extremos y graficar f aproximadamente.

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7$

b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

Ejercicio 8. Sea $f'(x) = 5x^3 - 13x^2 - 6x$ la derivada de una función f. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos locales de f.

Ejercicio 9. Hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales y el valor de la función en los mismos. Determinar las asíntotas verticales y horizontales. Hacer un gráfico aproximado de f.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{-3x}{x^2+4}$

d) $f(x) = \dfrac{8-3x}{x^2-2x}$

Ejercicio 10. Hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos locales de f.

a) $f(x) = x^4 e^{-x}$

b) $f(x) = \ln(2-x)$

c) $f(x) = e^{-x^3+12x}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

Ejercicio 11. Sea $f(x) = x + 2\cos(x)$. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos locales de f en el intervalo $[-\pi;\pi]$. Hacer un gráfico aproximado.

Ejercicio 12. Sea $f(x) = \dfrac{(5x-k)^2}{x}$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) Hallar los valores de k para los cuales f tiene un punto crítico en $x = 1$.

b) Para cada valor de k hallado en *a)*, determinar todos los extremos locales de f.

Ejercicio 13. La concentración de un fármaco en la sangre t horas después de ser inyectado viene dada por $C(t) = \dfrac{3t+2}{4t^2+1}$. Hallar cuándo la concentración aumenta, cuándo disminuye y cuándo es máxima.

Ejercicio 14. Un constructor debe hacer una ventana rectangular. Para el marco dispone de $6,40$ metros de varilla metálica. Hallar las dimensiones de la ventana de modo que el área de abertura sea máxima.

Ejercicios tipo parcial

Ejercicio 15. Hallar la derivada de la función f.

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+1}{2x}\right)$ *b*) $f(x) = e^{-5x}\cos(x)$

Ejercicio 16. Sea $f(x) = 5 + 2x^3 + \ln(4x-3)$. Hallar la ecuación de la recta tángente al gráfico de f en el punto $P = (1, f(1))$.

Ejercicio 17. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{3}{x}$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Ejercicio 18. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = 3 + \dfrac{\ln(x-4)}{-x^2+10x-24}$ en el punto $(5, f(5))$.

Ejercicio 19. Sea $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$. Hallar el punto P del gráfico de f en el que $y = -x + 2$ es la ecuación de la recta tangente.

Ejercicio 20. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x} + 8x$. Hallar todos los puntos del gráfico de f en los cuales la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 4x - 7$.

Ejercicio 21. Sea $f(x) = 3\ln(ax-1) - 2$. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x = 1$ sea 6. Dar la ecuación de la recta tangente.

Ejercicio 22. Sea $f(x) = \ln(x^2 + 81)$. Hallar el punto del gráfico de f en el que la pendiente de la recta tangente es $\dfrac{1}{9}$.

Ejercicio 23. Sea $f(x) = \dfrac{8}{x}$. Hallar el punto del gráfico de f en el que la recta tangente tiene ecuación $y = -\dfrac{1}{2}x - 4$.

Ejercicio 24. Sea $f(x) = xe^{-18x^2}$. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y mínimos locales de f y el valor que la función alcanza en los mismos.

Ejercicio 25. Sea $f(x) = e^{3x^4 - ax^2}$. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual f tiene un punto crítico en $x = 2$. Para el valor hallado, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f.

Ejercicio 26. Hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales y las asíntotas verticales y horizontales. Hacer un gráfico aproximado de $f = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+9}}$.

Ejercicio 27. Hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales y las asíntotas verticales y horizontales. Hacer un gráfico aproximado de $f = 3x^2 e^{\frac{x}{3}}$.

Ejercicio 28. Sea $f = 2x - 6\ln(x)$. Hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales y las asíntotas verticales y horizontales. Hacer un gráfico aproximado .

Ejercicio 29. Sea $f(x) = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$. Dar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales y las ecuaciones de las asíntotas verticales de f Graficar.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 30. Hallar todos los puntos del gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+12x+2}{x+1}$ para los cuales la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x - 3$. Escribir las ecuaciones de las rectas en dichos puntos.

Ejercicio 31. Sea $f(x)$ tal que $y = 5x - 4$ es la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(1, f(1))$. Si $g(x) = (x^3 - 6x)f(x)$, calcular $g'(1)$.

Ejercicio 32. Hallar los puntos en los que la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \ln\left(9x^2 - 4\right)$ es igual a 2.

Ejercicio 33. Sea $f(x) = 4 + ae^{x^2-3bx}$. Determinar los valores de a y b para que $y = -3x + 6$ sea la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 0$.

Ejercicio 34. Hallar dos números reales tales que su suma sea igual a 12 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

Ejercicio 35.

a) El desplazamiento (medido en metros) experimentado por un móvil al cabo de t segundos es $x(t) = 6t^2$. Hallar la velocidad instantánea en $t = 2$ segundos.

b) Un móvil se desplaza en linea recta. La posición x en el instante $t(t \geq 0)$ es $x(t) = \dfrac{1}{6}t^3 - 8t$. Determinar la aceleración $a(t) = v'(t)$ $(v(t) = x'(t))$ en el instante en el cuál la velocidad es nula $v(t) = 0$.

Práctica 6

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales.

a) $\int x^{123}\,dx$

b) $\int (2-\sqrt{x})\,dx$

c) $\int (6x^2+\operatorname{sen}(x))\,dx$

d) $\int \left(e^x - \frac{1}{x^4}\right)dx$

Ejercicio 2. Calcular aplicando el método de sustitución.

a) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

b) $\int e^x\sqrt{e^x+3}\,dx$

c) $\int \frac{1}{(3x+1)^2}\,dx$

d) $\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^5(x)}\,dx$

e) $\int e^{-6x}\,dx$

f) $\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,dx$

g) $\int xe^{x^2+5}\,dx$

h) $\int \frac{4x^3+6x^2}{3x^4+6x^3-9}\,dx$

Ejercicio 3. Calcular aplicando el método de integración por partes.

a) $\int (x+3)e^x\,dx$

b) $\int x^9\ln(x)\,dx$

c) $\int x^2e^{-x}\,dx$

d) $\int x^2\operatorname{sen}(x)\,dx$

Ejercicio 4. Calcular:

a) $\int x^{3/2}(x-3)^2\,dx$

b) $\int \left(x^3+5x^2+(5x-1)^9\right)dx$

c) $\int \left(\frac{\cos(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}+1\right)dx$

d) $\int x\cos(3x+1)\,dx$

Ejercicio 5. Hallar la función f tal que

a) $f'(x) = \frac{4x^3+6x+2}{x^4+3x^2+2x+1}$ y $f(0)=5$.

b) $f'(x) = x\sqrt{3x^2+9}$ y $f(3)=20$.

c) $f'(x) = xe^x$ y $f(0) = 4$.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$ y $f(1) = 2$.

Ejercicio 6. Para la función $f(x) = 5x\text{sen}(x^2)$, hallar una primitiva F que verifique $F(0) = 1$.

Ejercicio 7. Usando la regla de Barrow, calcular las siguientes integrales definidas.

a) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^\pi \text{sen}(u)\,du$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^5\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{e-1} \frac{1}{t+1}\,dt$

Ejercicio 8. Usando la regla de Barrow, calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x(x+1)^2\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(u)}{\text{sen}^2(u)}\,du$

d) $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x} - e^{-2x})\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{(\ln x)^2}{x} + x\right) dx$

f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} (t-\pi)\cos(t)\,dt$

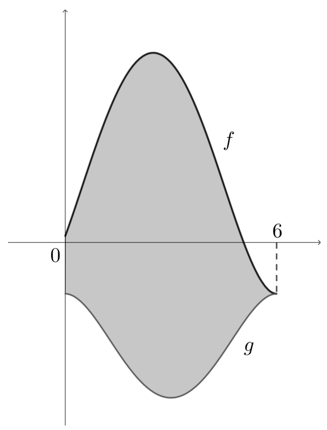
Ejercicio 9.

a) Sabiendo que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = 5$, calcular $\displaystyle\int_1^3 (f(x) + 2x)\,dx$.

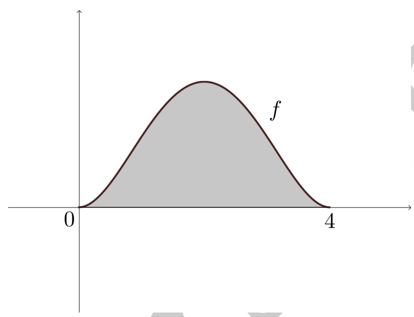
b) Sabiendo que $\displaystyle\int_{-2}^1 (f(t) - 3)\,dt = -2$, calcular $\displaystyle\int_{-2}^1 f(t)\,dt$.

Ejercicio 10. Expresar, usando integrales definidas, el área de las regiones sombreadas.

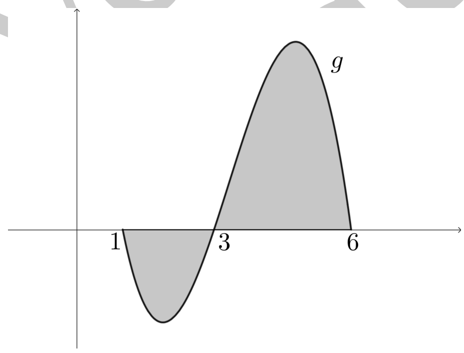
a)



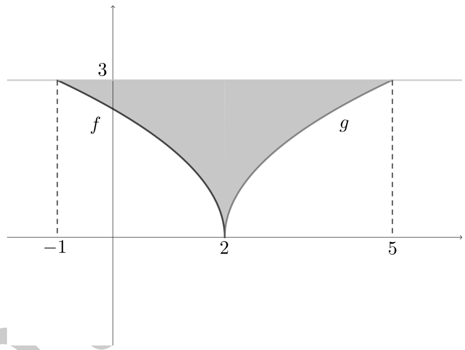
b)



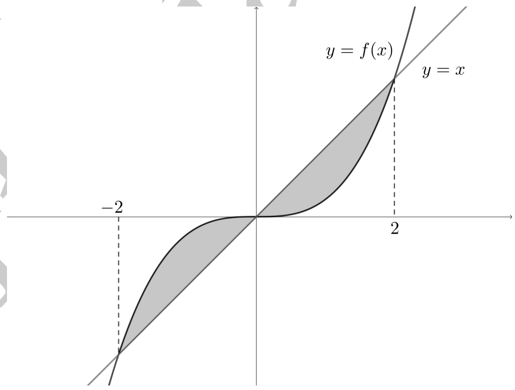
c)



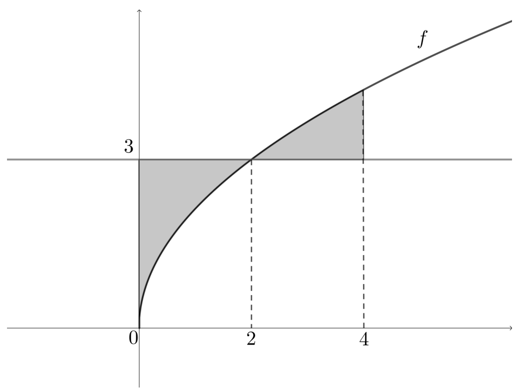
d)



e)



f)



Ejercicio 11. Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y el eje x

b) $f(x) = 2x^2 + 6x - 5$ y $g(x) = x^2 - 3x + 5$

c) $f(x) = -x + 4$ y $g(x) = x^2 + 2x$

d) $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = 4x - 1$

e) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -x + 6$ y el eje x

f) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -x + 6$ y el eje y

Ejercicio 12. Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de

a) $f(x) = -x + 2$ y $g(x) = x^2 - 2x$ para $0 \leq x \leq 3$.

b) $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{2x}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

c) $f(x) = -x^2 - x + 2$ y el eje x para $-3 \leq x \leq 3$.

d) $f(x) = x^2 + 4x + 2$ y $g(x) = -2x^2 + 7x + 8$ para $-2 \leq x \leq 6$.

e) $f(x) = \ln\left(\frac{2}{3}x - 3\right)$ y el eje x para $5 \leq x \leq 9$.

f) $f(x) = \cos(x)$ y el eje x para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

Ejercicio 13. Calcular el área de la región limitada por los gráficos de $f(x) = \sqrt{x-5}$, $g(x) = \sqrt{5-x}$ y la recta $y = 2$.

Ejercicios tipo parcial

Ejercicio 14. Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_1^a \frac{4}{x^2}\,dx = \frac{16}{5}$.

Ejercicio 15. Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^4 (3\sqrt{x} + ax)\,dx = 0$.

Ejercicio 16. Calcular.

a) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{\ln(x)}{3x}\right) dx$

b) $\displaystyle\int (3x-1)e^{2x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \left(2 + x\sqrt{4+5x^2}\right) dx$

d) $\displaystyle\int \left(x\cos(x^2+6) + \operatorname{sen}(x)\right) dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt[5]{\cos(3x+2)}\operatorname{sen}(3x+2)\,dx$

f) $\displaystyle\int (x+5)x^{4/5}\,dx$

g) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(7x+5)\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{7}{(x-3)\left(\ln(2x-6)\right)^5}\,dx$

i) $\displaystyle\int \left(\sqrt{5x+1} + e^{2x-1}\right) dx$

j) $\displaystyle\int \left(x^2 e^{-x^3} + x^2\right) dx$

k) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{\ln(-2x+3)}{-4x+6}\,dx$

Ejercicio 17. Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de las funciones $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$ para $1 \leq x \leq 10$.

Ejercicio 18. Calcular el área de la región limitada por los gráficos de $f(x) = \sqrt{10-x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ y el eje x.

Ejercicio 19. Calcular el área de la región limitada por los gráficos de $f(x) = \frac{4}{x}$ y $g(x) = 5 - x$.

Ejercicio 20. Calcular el área de la región encerrada por $f(x) = \sqrt{x+9}$, la recta $y = 2$ y el eje y.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 21. La aceleración de un móvil en el instante t está dada por $a(t) = t(t-6)\,\mathrm{km/h^2}$. El móvil parte, en el instante inicial $t = 0$, a una velocidad de $40\,\mathrm{km/h}$. ¿Cuál es la velocidad $v(t)$ para $0 \leq t \leq 6$? (Recordar que la aceleración a es la derivada de la velocidad instantánea v, esto es $a(t) = v'(t)$).

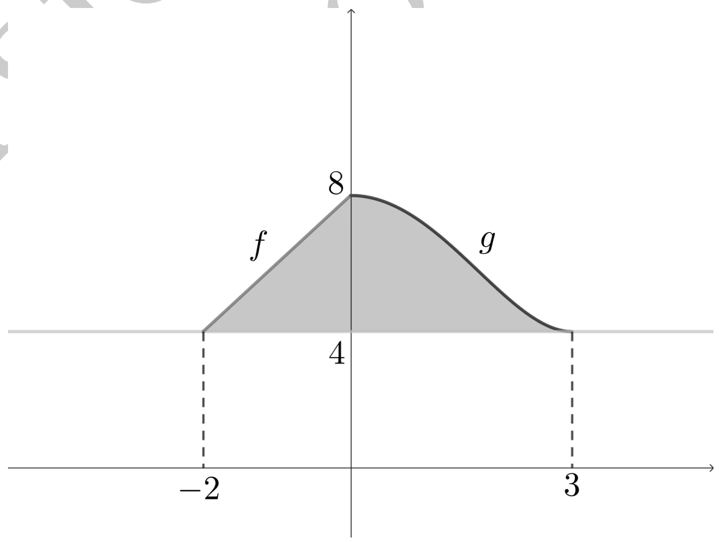
Ejercicio 22. Un cohete está en reposo en el instante $t = 0$. Mediante mediciones en el interior del cohete se comprueba que experimenta una aceleración $a(t) = t^{\frac{1}{2}} + 2$, para todo $t \geq 0$, donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración en $\mathrm{m/seg^2}$. ¿Qué velocidad tiene en el instante $t = 36$? ¿A qué distancia del punto de partida está en ese instante?

Ejercicio 23. Calcular.

a) $\int x^3 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$

b) $\int \frac{3\cos(\ln(x+2))}{x+2}\, dx$

Ejercicio 24. Sabiendo que el área de la región sombreada vale 10, calcular $\int_0^3 g(x)\, dx$.



Ejercicio 25. Calcular el área de la región limitada por los gráficos de $f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = x+1$ y $h(x) = x-1$.