

Práctica 10

Geometría

Ejercicio 1. Dados los puntos $P = (3, 1)$ y $Q = (1, 5) \in \mathbb{R}^2$:

- Graficarlos en el plano.
- Calcular y representar gráficamente los puntos $P + Q$, $P - Q$, $3.P$ y $-2.Q$.
- Hallar a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a.P + b.Q = (5, -3)$. Para los valores hallados, representar gráficamente $a.P$, $b.Q$ y $(5, -3)$.
- ¿Para qué valores de (x, y) existen a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a.P + b.Q = (x, y)$? (Sugerencia: armar el sistema lineal correspondiente y calcular el determinante).

Ejercicio 2. Sea L la recta que pasa por los puntos $(1, -1)$ y $(-2, 2)$:

- Encontrar dos vectores dirección distintos para L .
- Dar una ecuación implícita y una paramétrica para L . ¿Son únicas?
- Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a L : $(2, 1)$, $(0, 0)$, $(-2, 3)$, $(x, -x)$.

Ejercicio 3. Dadas las rectas $L_1 : \vec{X} = \alpha(5, -1) + (2, 1)$, L_2 la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(-3, 2)$, L_3 la recta que pasa por los puntos $(5, 5)$ y $(5, -1)$, $L_4 : x + 3y = -1$ y $L_5 : \vec{X} = \beta(1, 0) + (2, 1)$:

- Dar ecuaciones implícitas para L_1 , L_2 , L_3 y L_5 .
- Dar ecuaciones paramétricas para L_2 , L_3 y L_4 .
- Decidir cuáles corresponden al gráfico de una función lineal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y, en caso afirmativo, hallar su pendiente.

Ejercicio 4. Dadas las rectas $L_1 : -x + 3y = 2$ y $L_2 : -2x + 6y = 5$:

- Representarlas gráficamente en el mismo plano. ¿Cuál es su posición relativa?
- Encontrar dos vectores dirección para cada una. ¿Qué relación tienen todos los vectores dirección encontrados?

Ejercicio 5.

- a) Dar una ecuación paramétrica de la recta paralela a $L : \vec{X} = \beta(2, -3) + (1, 1)$ que pasa por $(0, 0)$.
- b) Dar una ecuación implícita de la recta paralela a $L : 3x + 2y = 3$ que pasa por $(-1, 1)$.
- c) Dar una ecuación paramétrica de la recta paralela a $L : x = 2$ que pasa por $(3, 8)$.

Ejercicio 6. Hallar, en cada caso, la intersección de las rectas L_1 y L_2 :

- a) $L_1 : 3x + y = -3$ y $L_2 : \vec{X} = \alpha(1, 3) + (2, 0)$
- b) $L_1 : -2x + 3y = -13$ y $L_2 : y = 7x + 2$
- c) $L_1 : \vec{X} = \alpha(-4, 1) + (2, 1)$ y $L_2 : \vec{X} = \beta(-2, 1) + (0, -1)$.

Ejercicio 7. En cada caso, plantear el sistema lineal para obtener la intersección de L_1 y L_2 y, en función de la compatibilidad del sistema, decidir las posiciones relativas de las rectas:

- a) $L_1 : 2x + y = 3$ y $L_2 : 2x - y = 1$
- b) $L_1 : x + 3y = 6$ y $L_2 : -2x - 6y = 2$
- c) $L_1 : x - 2y = -1$ y $L_2 : 3x - 6y = -3$

Ejercicio 8. Sean $L_1 : x - 2y = 2$, $L_2 : -2x + y = -3$ y $L_3 : \vec{X} = \alpha(1, -7)$. Dar una ecuación paramétrica de la recta L que pasa por el punto de intersección de L_2 y L_3 y es paralela a L_1 .**Ejercicio 9.** Sea L la recta que pasa por $P = (1, -3)$ y $Q = (2, -4)$. Hallar b tal que la recta que es paralela a L y pasa por $(b, 5)$ también pase por $(2, 2)$.**Ejercicio 10.** En cada caso, calcular el producto escalar indicado entre los vectores de $\mathbb{R}^2$ y determinar si son ortogonales:

- a) $\langle (1, -1); (2, 4) \rangle$
- b) $\langle (1, 3); (-6, 2) \rangle$
- c) $\langle (1, 2); (1, 2) \rangle$
- d) $\langle (-1, 0); (0, 1) \rangle$

Ejercicio 11.

- a) Dar una ecuación paramétrica de la recta perpendicular a $2x - 5y = 3$ que pasa por $P = (2, 6)$

- b) Dar una ecuación implícita de la recta perpendicular a $y = 4$ que pasa por $P = (3, -1)$

Ejercicio 12. Dada $L_1 : -2x + y = 3$, hallar una ecuación paramétrica de la recta L_2 perpendicular a L_1 que pasa por $(1, 2)$. Verificar que el producto de las pendientes de L_1 y de L_2 da -1 .

Ejercicio 13. Sea $P = (4, 9)$ $Q = (-6, 5)$ y $L : y = 2x$. Hallar todos los puntos $A \in L$ tales que:

- a) el triángulo PQA sea rectángulo en $\hat{P}$.
b) el triángulo PQA sea rectángulo en $\hat{A}$.

Ejercicio 14.

- a) Representar gráficamente en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (2, 0, 0)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (2, 2, 2)$, $D = A + B$ y $E = B - C$.
b) Un cubo tiene vértices en $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$. Escribir las coordenadas de los otros 4 vértices.

Ejercicio 15. En cada caso, calcular el producto escalar y vectorial de los siguientes pares de vectores de $\mathbb{R}^3$ y decidir si son ortogonales, colineales o ninguna de las dos cosas:

- a) $(1, 3, 5)$ y $(3, 0, -2)$ b) $(-1, 2, 1)$ y $(6, 1, 4)$
c) $(2, 4, -2)$ y $(-3, -6, 3)$ d) $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$

Ejercicio 16.

- a) Encontrar todos los vectores perpendiculares a $(1, -3, 5)$.
b) Encontrar todos los vectores perpendiculares a $(1, -3, 5)$ y $(-1, 0, 2)$ simultáneamente.

Ejercicio 17. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de la recta que:

- a) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el origen de coordenadas.
b) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el punto $(0, 2, -3)$.

Ejercicio 22. Dar las coordenadas de 3 puntos en $\mathbb{R}^3$ que estén:

- a) en el plano coordenado xy
- b) en el plano paralelo al plano coordenado xy , que contiene al punto $(0, 0, 1)$.
(Sugerencia: hacer un gráfico).

Ejercicio 23. En cada caso, escribir una ecuación paramétrica del plano indicado, representarlo en $\mathbb{R}^3$ y calcular su dirección normal:

- a) Π_1 plano que pasa por los puntos $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$ y $C = (0, 1, 0)$.
- b) Π_2 plano coordenado xy . Comparar con el plano Π_1 del ítem anterior.
- c) Π_3 plano que pasa por los puntos $A = (1, 3, 1)$, $B = (2, 1, 1)$ y $C = (3, 4, 1)$.

Ejercicio 24.

- a) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_1 que pasa por $A = (2, -1, 7)$, $B = (0, 2, 3)$ y $C = (2, 11, 31)$.
- b) Verificar que A , B y C pertenecen al plano $\Pi_2 : \vec{X} = \alpha(1, 0, 5) + \beta(-1, 3, 1) + (1, -1, 2)$.
Deducir que, como A , B y C no están alineados, Π_1 y Π_2 son el mismo plano.
- c) Comparar las ecuaciones paramétricas de Π_1 y de Π_2 . ¿Son iguales?

Ejercicio 25. Dar en $\mathbb{R}^3$ ecuaciones implícitas de:

- a) todos los planos coordenados.
- b) el plano que pasa por $(1, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$ y $(-1, 0, 2)$.
- c) el plano $\Pi : \vec{X} = \alpha(1, 0, 5) + \beta(-1, 3, 1) + (1, -1, 2)$.

Ejercicio 26. Hallar, si es posible, una ecuación implícita de un plano que contiene a las rectas $L_1 : \vec{X} = \lambda(1, 1, 0) + (0, -1, 1)$ y $L_2 : \vec{X} = \lambda(0, 1, -1) + (3, 2, 1)$.

Ejercicio 27. Dar ecuaciones implícitas de:

- a) el plano perpendicular a la recta $L_2 : \vec{X} = \beta(0, 1, 1) + (1, 3, -1)$ que pasa por $(3, 2, 1)$.

Ejercicio 32. En cada caso, hallar la intersección de la recta L con el plano Π :

a) $L : \vec{X} = \alpha(1, 2, 1) + (2, 2, 3)$
 $\Pi : z = 0$

b) $L : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + z = -2 \end{cases} \quad \Pi : y = 3$

c) $L : \vec{X} = \alpha(0, 1, -1) + (0, 1, 1)$
 $\Pi : y + z = 2$

d) $L : \vec{X} = \alpha(0, 1, -1) + (0, 1, 1)$
 $\Pi : y + z = 0.$

e) $L : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + z = -2 \end{cases} \quad \Pi : \vec{X} = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, -2) + (0, 0, 1)$

Ejercicio 33.

- a) Calcular el producto mixto entre $(-1, 2, 1)$, $(6, 1, 4)$ y $(1, 3, 5)$.
- b) Los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, -3)$ y $(1, 2, -1)$ son cuatro de los vértices de un paralelepípedo de forma tal que el $(0, 0, 0)$ forma aristas con los otros tres. Encontrar los otros cuatro vértices y determinar el volumen del paralelepípedo.
- c) Los puntos $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 4)$, $(5, 1, 2)$ y $(3, -1, 0)$ son cuatro de los vértices de un paralelepípedo de forma tal que el $(1, 1, 0)$ forma aristas con los otros tres. Determinar el volumen del paralelepípedo.