Práctica 3

Composición de funciones - Más funciones usuales

Ejercicio 1. Dadas las funciones f y g, calcular $f \circ g$ y $g \circ f$ en cada caso:

a) $f(x) = 3x - 2, \qquad g(x) = x^2 + 3$

b) $f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}, \qquad g(x) = \dfrac{3}{x} - 2$

d) $f(x) = 2x - 1, \qquad g(x) = x\sqrt{x^2+2}$

Ejercicio 2.

a) La relación funcional entre grados Celsius ($^\circ$C) y la escala Kelvin (K) es lineal. Sabiendo que $0\,^\circ\mathrm{C} = 273\,\mathrm{K}$ y que $27\,^\circ\mathrm{C} = 300\,\mathrm{K}$, encontrar la función f que da la temperatura en grados Celsius conocida la misma en la escala Kelvin.

b) La función $g(x) = 1{,}8\;x + 32$ expresa la temperatura en grados Fahrenheit si x es la temperatura en grados Celsius. Encontrar la expresión de la temperatura en grados Fahrenheit en función de la temperatura en la escala Kelvin. ¿Es lineal?

Ejercicio 3.

a) Sean $f(x) = x + k$ y $g(x) = \dfrac{2}{x}$. Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de manera que $(g \circ f)(1) = -4$. Para el valor de k encontrado, calcular $(f \circ g)(1)$.

b) Sean $f(x) = kx - 2$ y $g(x) = \dfrac{2x+6}{-x+4}$. Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que $(g \circ f)(1) = 5$. Para el valor de k hallado, calcular $(f \circ g)(1)$.

Ejercicio 4. En cada caso, resolver la ecuación $f(x) = b$ para cada uno de los valores de b dados y representar gráficamente:

a) $f(x) = 2x + 1, \qquad b = 9, \qquad b = -1$

b) $f(x) = x^2 - 3, \qquad b = 13, \qquad b = -4$

c) $f(x) = \sqrt{x} - 2, \qquad b = 5, \qquad b = -3$

Ejercicio 5. En cada caso, calcular f^{-1}, dar su dominio y graficar aproximadamente f y f^{-1}:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 2x - 4$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 3x^2 + 2$

d) $f : [-2, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sqrt{x+2}$

Ejercicio 6. La función $f(x) = 1,8\,x + 32$ expresa la temperatura en grados Fahrenheit ($^\circ$F) si x es la temperatura en grados Celsius ($^\circ$C). Dar la función que permite, dada una temperatura cualquiera en grados Fahrenheit, obtener la misma en grados Celsius. Sabiendo que el papel arde aproximadamente a 451°F, ¿a cuántos grados Celsius hay que exponer esta práctica después de impresa para quemarla?

Ejercicio 7. Dadas f y g, calcular $h = g \circ f$ y h^{-1} en cada caso:

a) $f(x) = -2x + 1, \qquad g(x) = \dfrac{-x+3}{4x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x-2}{3x+5}, \qquad g(x) = 2x - 1$

Ejercicio 8. Graficar cada una de las siguientes funciones y escribir la imagen como intervalo o unión de intervalos:

a) $f(x) = 2^x - 1$

b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$

c) $f(x) = 10^{-x} - 2$

d) $f(x) = e^{-x+1} + 3$

Ejercicio 9. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2^{2x-1} = 8$

b) $3 \cdot 9^{2-x} = 1$

c) $\ln(2x-3) = 0$

d) $\log_3(5x-1) = 2$

Ejercicio 10. En cada caso, hallar el dominio y los ceros de f:

a) $f(x) = \log_{10}(2-x)$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

Ejercicio 11. Para cada función f, hallar la función inversa f^{-1} y dar dominio e imagen de f y f^{-1}:

a) $f(x) = e^{2x+1}$

b) $f(x) = \ln(3-x)$

c) $f(x) = 1 + \ln(2x+3)$

Ejercicio 12. Sea $f(x) = e^{4x-8} + b$. Hallar el valor de b para que $\operatorname{Im}(f) = (9; +\infty)$. Para el valor de b hallado, calcular la función inversa f^{-1}.

Ejercicio 13. La población (en millones) de cierta región, t años después del año 2000, se puede aproximar mediante la función

$$f(t) = 300 \cdot (1,02)^t.$$

a) ¿Cuántos individuos tenía la región en el año 2000? ¿y en el año 2010?

b) Si no varían las condiciones, ¿Cuántos tendrá en 2040?

c) ¿Cuándo será la población el doble de lo que era en el año 2000?

Ejercicio 14. Un jarro con agua se retira del fuego cuando el agua que contiene está hirviendo y se coloca en una habitación donde la temperatura ambiente es 20° C. La temperatura (medida en $^\circ$C) del agua, transcurridos t minutos de haber retirado el jarro del fuego, viene dada por $T(t) = 20 + 80e^{-0,41t}$.

a) Hallar la temperatura del agua a los 5 minutos.

b) ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que la temperatura del agua sea de 40° C?

Ejercicio 15. En cada caso, hallar la función exponencial $f(x) = ka^x$ que satisface:

a) $f(0) = 5$ y $f(3) = 40$.

b) $f(1) = 7,5$ y $f(5) = 292,96875$.

Ejercicio 16. Completar las tablas siguientes:

a)

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Grados						$180°$

b)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{sen}(x)$		$\frac{1}{2}$			
$\cos(x)$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\text{tg}(x)$			1		$\nexists$

c)

x	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$
$\text{sen}(x)$								
$\cos(x)$								
$\text{tg}(x)$								

Ejercicio 17. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo señalado:

a) $\text{sen}(x) = -\frac{1}{2}$ en $[0; 2\pi)$

b) $\text{sen}(x) = -\frac{1}{2}$ en $\mathbb{R}$

c) $\text{sen}(x) = -\frac{1}{2}$ en $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$

d) $\text{sen}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $[-\pi; \pi]$

e) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $[0; \pi)$

f) $\cos(x) = -1$ en $\mathbb{R}$

g) $\cos(x) - \dfrac{1}{2} = 0$ en $[-\pi; 2\pi]$

h) $\text{tg}(x) = 0$ en $[0; 2\pi)$

i) $\text{tg}(x) = \sqrt{3}$ en $\mathbb{R}$

j) $\text{tg}(x) = -1$ en $\left[-\pi; \dfrac{5}{2}\pi\right]$

Ejercicio 18. Hallar los ceros de f en el intervalo señalado en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en $[-\pi; 5\pi]$

b) $f(x) = \text{tg}\,(2x) + 1$ en $[-\pi; 5\pi]$

c) $f(x) = 3\,\text{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3}$ en $[-\pi; 3\pi]$

d) $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$ en $[0; 3\pi]$

e) $f(x) = 2\,\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x)$ en $[-\pi; \pi]$

f) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2} + \text{sen}(x)\right)\cos(x)$ en $[-\pi; \pi]$

Ejercicio 19. En cada caso, hallar la imagen de f. Determinar el valor máximo y el valor mínimo de f e indicar en qué puntos se alcanzan dichos valores.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}\,\text{sen}\,(x)$

b) $f(x) = -2\,\text{sen}\,(2x + \pi)$

c) $f(x) = 3\cos(-x) + 2$

d) $f(x) = 2\cos(3x) - 1$

Ejercicio 20. Sea $f(x) = -3\,\text{sen}(x + \pi) + k$. Determinar el valor de k para que $\text{Im}\,(f) = [-4; 2]$. Para el valor de k hallado, encontrar un valor de x_0 tal que $f(x_0) = -4$ y un valor de x_1 tal que $f(x_1) = 2$.

Ejercicio 21. Dado el triángulo rectángulo ABC, con $\widehat{BAC} = 90°$, resolverlo completamente (es decir, calcular la medida de todos sus lados y de todos sus ángulos) en cada uno de los siguientes casos:

a) $\overline{AB} = 3$ $\overline{AC} = 4$

b) $\overline{BC} = 5$ $\widehat{ABC} = 60°$

c) $\overline{AC} = 12$ $\overline{BC} = 13$

d) $\overline{AB} = 12$ $\widehat{ACB} = 60°$

Ejercicio 22. Dado el triángulo ABC, resolverlo completamente en cada uno de los siguientes casos:

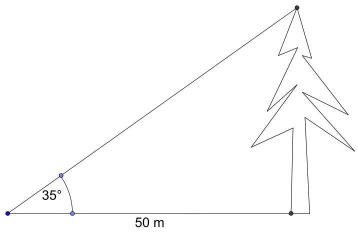
a) $\overline{AB} = 3 \quad \overline{AC} = 4 \quad \overline{BC} = 6$

b) $\overline{BC} = 5 \quad \widehat{ABC} = 60^\circ \quad \widehat{ACB} = 45^\circ$

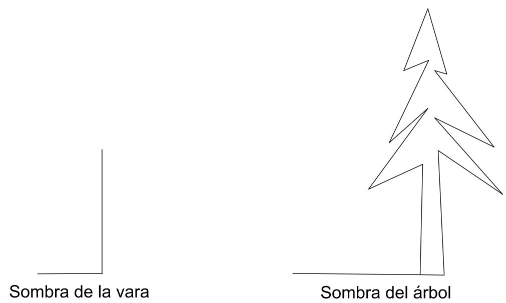
c) $\overline{AB} = 13 \quad \overline{AC} = 10 \quad \widehat{BAC} = 30^\circ$

d) $\overline{AB} = 12 \quad \overline{BC} = 10 \quad \widehat{ACB} = 45^\circ$

Ejercicio 23. En un día nublado, para calcular la altura de un árbol, se cuenta con un teodolito que mide ángulos de manera vertical y horizontal. Si uno se aleja $50\,\text{m}$ del árbol, el ángulo medido en forma vertical desde el suelo hasta la punta del árbol es de 35°. Estimar la altura del árbol.



Ejercicio 24. En un día de sol, un árbol da una sombra de $3{,}5\,\text{m}$ en el mismo momento del día en que una vara vertical de $1\,\text{m}$ da una sombra de $0{,}74\,\text{m}$. Estimar la altura del árbol.



Ejercicio 25. Para hallar la distancia entre dos puntos A y B, un agrimensor escoge un punto C que está a $420\,\text{m}$ de A y a $540\,\text{m}$ de B. Si el ángulo $\widehat{ACB}$ mide $63^\circ 10'$, calcular la distancia entre A y B.

Ejercicio 26. Un guardabosques ubicado en un punto de observación A avista un incendio en dirección N $27^\circ 10'$ E (es decir, rumbo NE haciendo un ángulo de $27^\circ 10'$ con la dirección norte). Otro guardabosques, que está en un punto de observación B a $6\,\text{km}$ directamente al este de A, advierte el mismo incendio en dirección N $52^\circ 40'$ O. Calcular la distancia entre cada punto de observación y el incendio.

Ejercicio 27. Para calcular la altura de una torre (AD), se colocaron dos puntos de referencia B y C sobre el suelo distantes entre sí 50 m. Con un teodolito, desde los puntos B y C se midieron los ángulos horizontales $\widehat{ABC} = 60^\circ$ y $\widehat{ACB} = 70^\circ$ y el vertical $\widehat{ABD} = 42^\circ$. Calcular la altura de la torre.