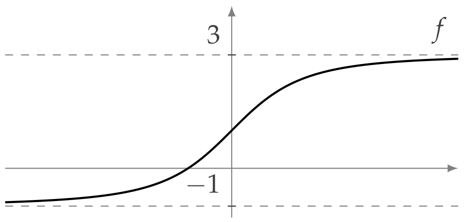
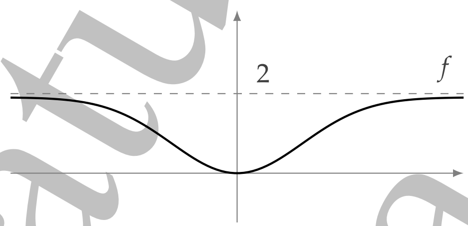
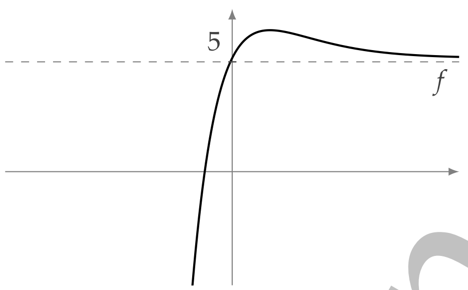
Práctica 4

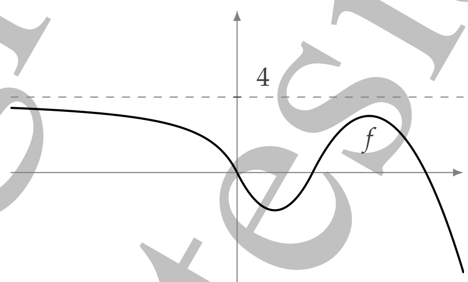
Límite de funciones - Asíntotas - Continuidad

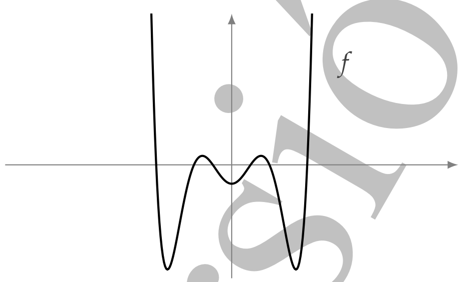
Ejercicio 1. En cada caso, a partir del gráfico de f, determinar (si existen) los valores de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$:

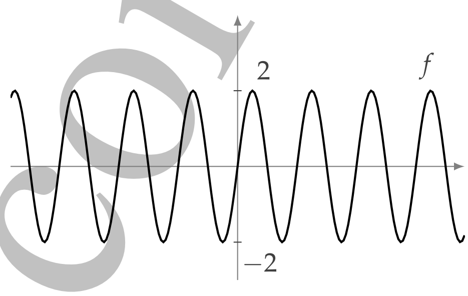
a)


b)


c)


d)


e)


f)


Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} 4x^2$

b) $\lim_{x \to +\infty} -2x^5$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^3}$

d) $\lim_{x \to +\infty} -\dfrac{3}{x} + 5$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(-2 + \dfrac{7}{x}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6 - \dfrac{5}{x^2}}{x^2\left(9 + \dfrac{1}{x}\right)}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 6x^5 - 2x^3 + x + 9$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^5 + x^3 - 3}{x^6 + 1}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 4x}{-2x^2 + 1}$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 2x^3 - 5x}{x^3 + 9x^2 + 10x} + 5$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{x+2} - 1\right)\left(6 + \dfrac{1}{x}\right)$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{9x^2 - x + 1}{-3x^2 + 7x}\right)\left(\dfrac{5}{x-4}\right)$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x+1} - x$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2 + x + 1}$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} + 3$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + x + 1)$

Ejercicio 3. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4x^3$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(9 - \dfrac{2}{x^2}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^4 - 7x^3 + 20$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 1}{-6x^4 + 7}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + x + 1}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{5}{x-3} + 1\right)$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^3 + x + 1}$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2 - 3} + 1$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 + 1)$

Ejercicio 4. En cada caso, analizar la existencia de asíntotas horizontales al gráfico de f y, cuando existan, dar sus ecuaciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x + 5}{-x + 2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x + 9} - 4$

c) $f(x) = \dfrac{8x}{4x^2 + 6x + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x}{x + 6}$

e) $f(x) = \dfrac{6}{x + 1} + 1$

f) $f(x) = \dfrac{30x^2 - 25x + 6}{5x^2 + 6x - 3}$

g) $f(x) = e^{x^3 + 1} + 2$

h) $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 7$

Ejercicio 5. En cada caso, determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique lo pedido:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-5}{ax+1} = 6$

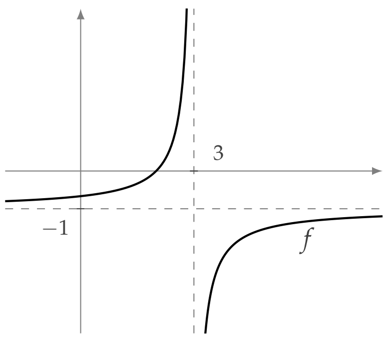
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{ax^2-2x+5}{6x^2+1} = -\dfrac{2}{3}$

c) La recta de ecuación $y=-2$ es asíntota horizontal para $f(x) = \dfrac{ax}{3x-1} + 1$

d) La recta de ecuación $y=3$ es asíntota horizontal en $+\infty$ para $f(x) = e^{-x+3} + \dfrac{1}{x} + a$

Ejercicio 6. A partir del gráfico de f, en cada caso, dar el valor de los límites que se indican y escribir las ecuaciones de todas las asíntotas verticales y horizontales al gráfico:

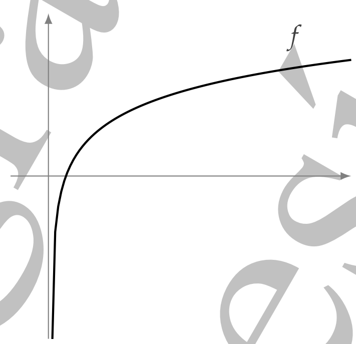
a)



$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

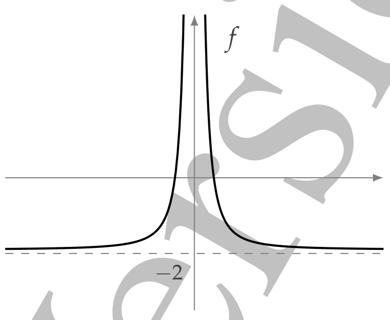
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b)



$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

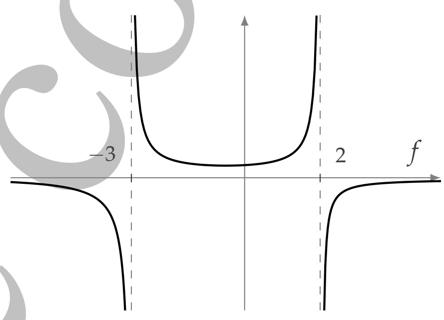
c)



$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

d)

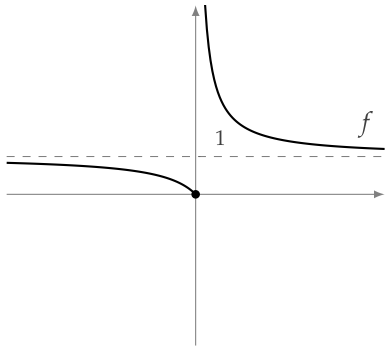


$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

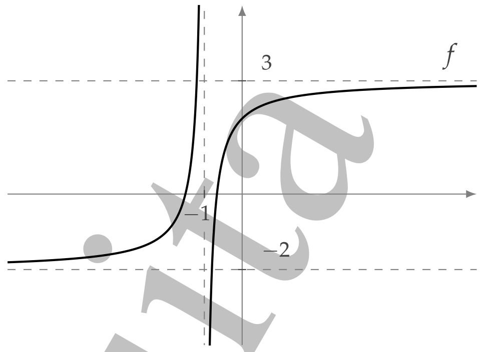
e)



$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

f)



$$\lim_{x\to -1^-} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

Ejercicio 7. Calcular, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} 2x^2 + x - 10$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+9}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3}, \qquad \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{-5x+1}{x+2}, \qquad \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-5x+1}{x+2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3}{x^2} - 1, \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{x^2} - 1, \qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x^2} - 1$

f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4x-4}{x^2-1}, \qquad \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4x-4}{x^2-1}, \qquad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-4}{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4x}{x^2-4}, \qquad \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{4x}{x^2-4}$

h) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-2}{x^2-3x-4}, \qquad \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2x^2-2}{x^2-3x-4}, \qquad \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{2x^2-2}{x^2-3x-4}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x), \qquad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x)$

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x), \qquad \lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x-3), \qquad \lim\limits_{x\to 3^-} \ln(3-x)$

Ejercicio 8. Calcular, en cada caso, el dominio de f, analizar la existencia de asíntotas verticales a su gráfico y, cuando existan, dar sus ecuaciones:

a) $f(x) = \dfrac{-x+5}{2x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{6x}{(x-2)^3}$

c) $f(x) = \dfrac{4x-3}{x^2-x-6}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2-18}{x^2-2x-15}$

e) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$

f) $f(x) = \ln(2x+3)$

Ejercicio 9. Hallar en cada caso el dominio, la imagen, los ceros de f y las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales a su gráfico. Hacer un gráfico aproximado de f y, a partir del gráfico, determinar los conjuntos de positividad y de negatividad de f.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{-2}{x+4}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x+2} + 1$

d) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$

Ejercicio 10. Hallar, para cada f, su función inversa f^{-1} y las ecuaciones de las asíntotas de ambas:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+1}$

Ejercicio 11. Hacia un tanque que contiene agua pura, fluye agua salada de modo que la concentración de sal en un tiempo t está dada por la función $c(t) = \dfrac{3t}{100t+4000}$ para $t > 0$. Graficar $c(t)$. Calcular el límite de la función cuando $t \to +\infty$ e interpretar el significado.

Ejercicio 12. Hallar la expresión de la longitud L de un lado de un rectángulo en función de la longitud x del otro lado, si se sabe que el área es 36. Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} L(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} L(x)$.

Ejercicio 13. En cada caso, calcular el dominio de f y dar las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales a su gráfico:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + 1$

b) $f(x) = \dfrac{-2x^2+x}{5x^2+25}$

c) $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2+4x+3}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

e) $f(x) = \dfrac{-x^2+x+6}{x^2+x-2}$

f) $f(x) = \dfrac{6x^2-24}{x^2-4x+4}$

g) $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$

h) $f(x) = \ln(x^2-4)$

Ejercicio 14. Hallar en cada caso el dominio y todas las asíntotas de f:

a) $f(x) = \dfrac{3}{\ln(x)} + 5$

b) $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$

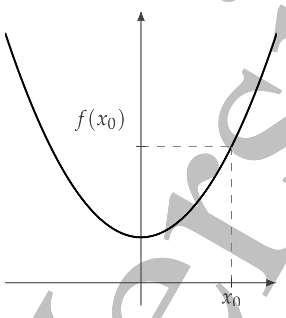
Ejercicio 15.

a) Sea $f(x) = \dfrac{-20x+4}{ax+10}$. Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $x = 2$ sea asíntota vertical al gráfico de f. Para el valor de a hallado, dar la ecuación de la asíntota horizontal al gráfico de f.

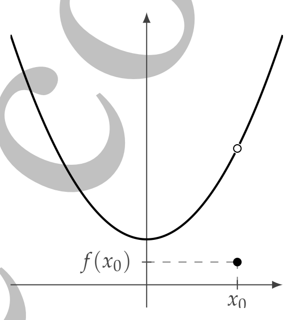
b) Sea $f(x) = \dfrac{ax^2-2x}{x^2+ax-5}$. Determinar $a \in \mathbb{R}$ para que la recta de ecuación $x = -1$ sea asíntota vertical al gráfico de f. Para el valor hallado, dar las ecuaciones de todas las asíntotas verticales y horizontales al gráfico de f.

Ejercicio 16. Analizando el gráfico de la función f, determinar en cada caso si f está definida en x_0, si existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y, en caso afirmativo, si estos dos valores coinciden. Usar la información anterior para deducir en cada caso si f es continua en x_0:

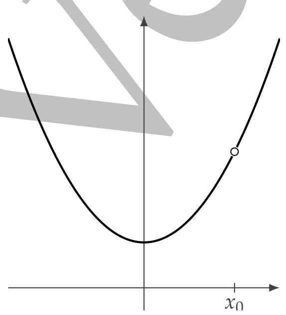
a)



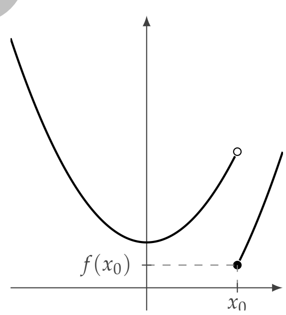
b)

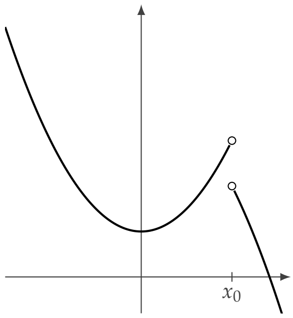


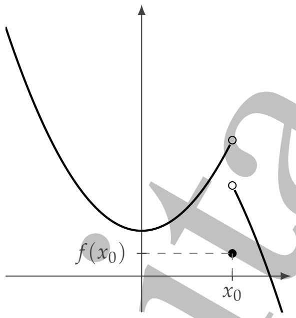
c)

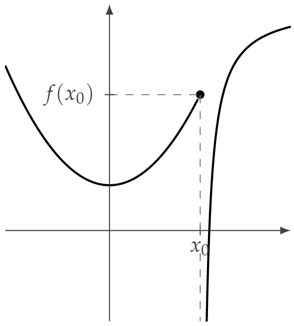


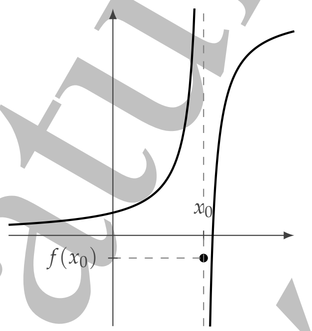
d)



e) 

f) 

g) 

h) 

Ejercicio 17. En cada uno de los siguientes casos, decidir si la función f es continua en el valor de x_0 especificado:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 8$ en $x_0 = 3$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(x - \pi) + 3$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

c) $f(x) = xe^{3x-6} + \ln x$ en $x_0 = 2$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3}{x + 1}$ en $x_0 = 2$

e) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ en $x_0 = 1$

f) $f(x) = \ln(x - 5)$ en $x_0 = 5$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x - \pi)}$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

h) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

j) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - 3)(x^2 + 1)}{x^2 - 9} & \text{si } x \neq 3 \\ \dfrac{5}{3} & \text{si } x = 3 \end{cases}$ en $x_0 = 3$

Ejercicio 18. En cada uno de los siguientes casos, hallar el valor de k para que la función f sea continua en el valor de x_0 especificado:

a) $f(x) = \begin{cases} -5 + xe^{x^2-4} & \text{si } x > -2 \\ 3x + k & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$ en $x_0 = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6x-8}{x^3+2x^2-8x} & \text{si } x < -4 \\ \dfrac{k}{6+x} & \text{si } x \geq -4 \end{cases}$ en $x_0 = -4$

Ejercicio 19. En cada uno de los siguientes casos, hallar todos los puntos de discontinuidad de la función f en el intervalo indicado:

a) $f(x) = |x+3|$ en $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{xe^{x^2-9} - 5}{x^3 - 4x^2 + 3x}$ en $\mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x-3)}$ en $[3, +\infty)$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x)}{x^2+x-2} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x-3}{x^2-9} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $\mathbb{R}$

Ejercicio 20. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que corta al eje x en exactamente tres puntos y de la cual se conoce la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	-2	3	5	4	1	-1

a) Para cada uno de los ceros de f indicar un intervalo de amplitud 1 que lo contenga.

b) Determinar, si es posible, el signo de f en los intervalos dados:

i) $(0; 1)$ ii) $(2; 3)$ iii) $(5; +\infty)$

iv) $(-\infty; -2)$ v) $(0; 2)$ vi) $(-3; -1)$

c) Hacer el gráfico de una función f que satisfaga las condiciones dadas.

Ejercicio 21. En cada una de las siguientes situaciones, hallar el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de la función f si se sabe que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y que f es continua en todo punto:

a) Los únicos ceros de f son -3 y 2 y $f(-5) = -4$, $f(0) = -2$ y $f(3) = 6$.

b) Los únicos ceros de f son -2 , 0 y 3 y $f(-3) = -1$, $f(-1) = 1$, $f(2) = 5$ y $f(5) = -4$.

Ejercicio 22. En cada uno de los siguientes casos, hallar todos los ceros de la función polinómica f y determinar su conjunto de positividad y de negatividad:

a) $f(x) = (2x+3)\,(3x-9)\,(x-4)$

b) $f(x) = x^2\,(2x-3)^2$

c) $f(x) = 5\,(x+1)\,\left(x^2+x-2\right)$

d) $f(x) = \left(x^3+3x^2+2x\right)\left(x^2-\frac{9}{4}\right)$

Ejercicio 23. Hallar, en cada caso, el dominio, el conjunto de ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de la función f:

a) $f(x) = \dfrac{3x+7}{x+3}$

b) $f(x) = |5x+2| - 17$

c) $f(x) = \dfrac{|x-3|-5}{x-6}$

d) $f(x) = \dfrac{4-\sqrt{x}}{\ln(x-3)}$

e) $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$

f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+7}{x+3}\right)$ (Sugerencia: usar el ítem *a)* para calcular el dominio de f)

Ejercicio 24. En cada uno de los siguientes casos, escribir el conjunto A como intervalo o unión de intervalos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} / (3x-6)(x+2)(x-5) < 0\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} / |2x-6| \geq 8\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} / \dfrac{3-6x}{x+4} \leq 3\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} / \dfrac{3x-12}{x^2-4} \leq 3\}$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} / \ln(x^2 - 3) > 0\}$

f) $A = \{x \in [-2\pi; 2\pi] / \cos(2x + \dfrac{\pi}{2}) > 0\}$

Ejercicio 25. Sea $f(x) = x^3 + x - 7$. Probar que

a) f tiene un cero en el intervalo $(1; 2)$

b) f tiene un cero en el intervalo $(1,7; 1,8)$

c) f tiene un cero en el intervalo $(1,73; 1,74)$

Ejercicio 26. En cada uno de los siguientes casos, aproximar con error menor que $\dfrac{1}{8}$ un cero de f en el intervalo indicado:

a) $f(x) = x^5 - x - 32$ en $(2; 3)$

b) $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1000$ en $(9; 10)$