Práctica 2

Números Complejos

Definiciones y propiedades

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos se define como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R},\, i^2 = -1\}$$

La representación $z = a + bi$ de un número complejo se llama la *forma binómica* de z, a se llama la *parte real* de z y escribimos $\mathrm{Re}(z) = a$, y b se llama la *parte imaginaria* de z y escribimos $\mathrm{Im}(z) = b$.
Dados $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z = w \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \text{ e } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w).$$

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, definimos la suma y el producto de z y w en la forma

$$z + w = (a + c) + (b + d)i \qquad \text{(suma)}$$

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad \text{(producto)}$$

La suma y el producto son asociativos y conmutativos y, además, vale la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
Notación: $a + (-b)i = a - bi$, $a + 0i = a$, $0 + bi = bi$.

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, llamaremos *conjugado* de z al número complejo $\overline{z} = a - bi$ y *módulo* de z al número real no negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se verifican:

a) $z\overline{z} = |z|^2$ *b*) si $z \neq 0$, $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Propiedades de la conjugación:

C1) $\overline{\overline{z}} = z$ C2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ C3) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

C4) si $z \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$ C5) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ C6) $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)\, i$

Propiedades del módulo:

M1) $z = 0 \iff |z| = 0$ M2) $|z| = |\overline{z}|$ M3) $|zw| = |z|\,|w|$

M4) $|z| = |-z|$ M5) si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ M6) si $w \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, llamaremos *argumento* de z al único número real $\arg(z)$ que verifica

$$0 \leq \arg(z) < 2\pi, \qquad \cos(\arg(z)) = \frac{a}{|z|} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\arg(z)) = \frac{b}{|z|}.$$

La *forma polar o trigonométrica* de z es

$$z = |z|\,(\cos(\arg(z)) + i\ \operatorname{sen}(\arg(z)))$$

Se verifican:

- si $z = \rho\,(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$ con $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, entonces $|z| = \rho$ y $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.
- si $z = \rho\,(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$ y $w = \tau\,(\cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta))$, con $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ y $\tau, \beta \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, entonces

$$z = w \iff \rho = \tau \quad \text{y} \quad \alpha = \beta + 2k\pi \ \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = |z|\,(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$, la *notación exponencial* de z es $z = |z|\,e^{i\alpha}$.

Teorema de De Moivre. Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $w \neq 0$.
Si $z = |z|\,(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))$ y $w = |w|\,(\cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta))$, entonces

$$zw = |z|\,|w|\,(\cos(\alpha+\beta) + i\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$$

es decir,

$$|z|\,e^{i\alpha}\ |w|\,e^{i\beta} = |z|\,|w|\,e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Como consecuencia, se deduce que:

$$\begin{array}{rclcrcl}
z^{-1} & = & |z|^{-1}\,(\cos(-\alpha) + i\ \operatorname{sen}(-\alpha)) & \text{es decir,} & z^{-1} & = & |z|^{-1}\,e^{-i\alpha} \\
\overline{z} & = & |z|\,(\cos(-\alpha) + i\ \operatorname{sen}(-\alpha)) & \text{es decir,} & \overline{z} & = & |z|\,e^{-i\alpha} \\
\dfrac{z}{w} & = & \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha-\beta) + i\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta)) & \text{es decir,} & \dfrac{z}{w} & = & \dfrac{|z|}{|w|}e^{i(\alpha-\beta)} \\
z^n & = & |z|^n\,(\cos(n\alpha) + i\ \operatorname{sen}(n\alpha)) & \text{es decir,} & z^n & = & |z|^n\,e^{i(n\alpha)}
\end{array}$$

Si $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, una *raíz n-ésima* de w es un número $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = w$. Si z es una raíz n-ésima de w, entonces

$$z = |w|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\Big(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\Big) + i\operatorname{sen}\Big(\frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}\Big)\right)$$

para algún número entero k tal que $0 \leq k \leq n-1$.

EJERCICIOS

Ejercicio 1. Dar la forma binómica de z en los casos

a) $z = 1 - i(2+i)$

b) $z = (1+2i)(3-i)^2$

c) $z = (3+4i)^{-1}$

Ejercicio 2. Hallar todos los números complejos z que satisfacen

a) $(1+i)z + 5 = 2 - 3i$

b) $i(z-5) = (1+3i)z$

c) $\dfrac{z-i}{z} = 2+i$

d) $\dfrac{2+i}{z} = \dfrac{2+2i}{z+1}$

Ejercicio 3. Dar la forma binómica de todos los números complejos z que satisfacen

a) $\overline{z}(z+1) = 11 + 3i$

b) $\mathrm{Re}(z).\,\overline{z} = 4 + 6i$

c) $\mathrm{Im}(z).\,z + i\,\mathrm{Re}(z).\,\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z).\mathrm{Im}(\mathrm{z})$

Ejercicio 4. Dados $z = 1+3i$ y $w = 4+2i$, representar en el plano, sin calcularlos, los números complejos $\overline{z}$, $-z$, $2z$, $-3w$, $-\overline{w}$, $z+w$, $w-z$ y $\overline{z}-3w$.

Ejercicio 5. Sabiendo que $2+2i; -2+2i; -2-2i$ y $2-2i$ son los vértices de un cuadrado de lados paralelos a los ejes cuyas diagonales se cortan en $z=0$, hallar $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{C}$ que sean los vértices de un cuadrado de lados paralelos a los ejes del mismo tamaño que el dado pero cuyas diagonales se corten en $z = 3+5i$.

Ejercicio 6. Calcular $|z|$ en los casos

a) $z = i(4-3i)$

b) $z = (1+i)^8$

c) $z = \sqrt{5}\,(1+2i)^{-1}\,\overline{(1+i)}$

d) $z = 1 - i(2+i)$

e) $z = (-7i)\,\left|(1-i)^{-1}\right|$

f) $z = \sqrt{2}(-1+i)^{-1}(3+i)^8$

Ejercicio 7. Dado $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, hallar $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos tales que $w = a+bi$ sea múltiplo real de z y la diagonal del rectángulo de vértices 0, a, w y bi en el plano complejo mida *a*) 7

b) 15

c) k, donde k es un número real positivo dado.

Ejercicio 8. Representar en el plano complejo

a) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 2\}$

b) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \leq 2\}$

c) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - 1 + i| = 2\}$

d) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - 1 + i| \leq 2\}$

e) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - 1 + i| \geq 2\}$

f) $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 1\}$

g) $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 1\}$

h) $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Im}(z) < 2\mathrm{Re}(z) + 1 \text{ y } |z| < 1\}$

Ejercicio 9. Representar en el plano complejo

a) $\{z \in \mathbb{C}\ /\ |z - 1| = |z + i|\}$

b) $\{z \in \mathbb{C}/\ |z - 1 - 2i| \leq 2 \text{ y } \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z) - 1\}$

c) $\{z \in \mathbb{C}/\ |3z - 3| \geq 6 \text{ y } |z| \leq |z - 1 - i|\}$

Ejercicio 10. Escribir en forma binómica todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

a) $z^2 = 3 + 4i$

b) $z^2 = -8i$

c) $z^2 - 2z + 5 = 0$

d) $z(z + 1) = 5 + 5i$

Ejercicio 11. Sin calcular $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$, representar en el plano complejo

a) $z = 2(\cos\pi + i\ \mathrm{sen}\pi)$

b) $z = 3\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{3}{2}\pi\right)$

c) $z = \cos\frac{7}{4}\pi + i\ \mathrm{sen}\frac{7}{4}\pi$

d) $z = 5\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\ \mathrm{sen}\frac{3}{4}\pi\right)$

Ejercicio 12. Hallar el módulo y el argumento de z y expresar a z con la notación exponencial en los casos

a) $z = \sqrt{7}$

b) $z = -2$

c) $z = -6i$

d) $z = 2 + 2i$

e) $z = \sqrt{3} + i$

f) $z = -1 - \sqrt{3}i$

g) $z = -3\left(\cos\frac{17}{5}\pi + i\ \mathrm{sen}\frac{17}{5}\pi\right)$

h) $z = \cos\frac{7}{4}\pi - i\ \mathrm{sen}\frac{7}{4}\pi$

i) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)^{-1}$

j) $\cos\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$

Ejercicio 13. Representar en el plano complejo

a) $\{z \in \mathbb{C} / 1 \leq |z| \leq 4 \text{ y } \arg(z) = \frac{\pi}{4}\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} / \ |z-1| \ = 3 \text{ y } 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) \text{ y } \pi \leq \arg(z) \leq \frac{7}{4}\pi\}$

Ejercicio 14. Hallar la forma polar de z en los casos

a) $z = (1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

b) $z = (-3i)(-1+i)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{5}\right)$

c) $z = (-1+\sqrt{3}i)^8(2+2i)^{-1}$

d) $z = \left(\mathrm{sen}\frac{2\pi}{7} - i\cos\frac{2\pi}{7}\right)^5$

Ejercicio 15. Hallar la forma binómica de z en los casos

a) $z = (-\sqrt{3}+i)^{16}(1-i)$

b) $z = \dfrac{-2i}{(1+\sqrt{3}i)^{11}}$

c) $z = \dfrac{(\sqrt{3}+i)^{23}}{(-1-i)^{31}}$

d) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{15}$

Ejercicio 16. Hallar las raíces n-ésimas de w y expresarlas con la notación exponencial en los casos

a) $n = 3$, $n = 4$ y $n = 6$, $\quad w = 1$

b) $n = 6$, $\quad w = -1$

c) $n = 4$, $\quad w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $n = 5$, $\quad w = i$

e) $n = 3$, $\quad w = 5 - 5i$

f) $n = 4$, $\quad w = -8 + 8\sqrt{3}i$

Ejercicio 17. Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

a) $z^6 = -1$

b) $z^3 = \overline{iz^2}$

c) $z^8 = \left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

d) $z^4 = -\bar{z}^4$

e) $z^3 + 4i\,|z| = 0$

f) $z^6 = (1+2i)^6$

Ejercicio 18.

a) Hallar los vértices de un hexágono regular inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 0$ y radio 2 y que tiene a 2 como uno de sus vértices.

b) Hallar los vértices de un hexágono regular que esté inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 1 + i$ y radio 2.

c) Hallar los vértices de un hexágono regular que esté inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 1 + i$ y radio 4.

d) Hallar los vértices del hexágono regular inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 0$ y radio 2 que se obtiene rotando en sentido antihorario el hexágono hallado en $a)$ en un ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

e) Hallar los vértices del hexágono regular inscripto en la circunferencia de centro $z_0 = 0$ y radio 2 que tiene dos de sus vértices sobre el eje imaginario puro.

f) Hallar los vértices del hexágono regular que tiene a $w = 3 + 4i$ como uno de sus vértices y que está inscripto en una circunferencia de centro $z_0 = 0$.