

## Práctica 3

### Polinomios

#### Definiciones y propiedades

En lo que sigue,  $\mathbb{K}$  significa  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

Un *polinomio* con coeficientes en  $\mathbb{K}$  es una expresión de la forma

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j$$

con  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $a_j \in \mathbb{K}$  para  $j = 0, \dots, n$ .

Indicaremos con  $\mathbb{K}[x]$  al conjunto de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{K}$  y consideramos en  $\mathbb{K}[x]$  las operaciones de suma y producto usuales.

Dado  $P \in \mathbb{K}[x]$  no nulo,  $P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$  con  $a_n \neq 0$ , decimos que  $a_n$  es el *coeficiente principal* de  $P$  y definimos el *grado* de  $P$  como  $\text{gr}(P) = n$ . Por convención, el polinomio nulo no tiene grado.

*Propiedades.* Dados  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P \neq 0$  y  $Q \neq 0$ ,

- $\text{gr}(PQ) = \text{gr}(P) + \text{gr}(Q)$ ;
- si  $P + Q \neq 0$ , entonces  $\text{gr}(P + Q) \leq \max\{\text{gr}(P), \text{gr}(Q)\}$ ;
- si  $\text{gr}(P) \neq \text{gr}(Q)$ , entonces  $\text{gr}(P + Q) = \max\{\text{gr}(P), \text{gr}(Q)\}$ .

**Algoritmo de división.** Dados  $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ ,  $Q \neq 0$ , existen únicos  $S, R \in \mathbb{K}[x]$  tales que

$$P = QS + R \quad \text{y} \quad R = 0 \text{ o } \text{gr}(R) < \text{gr}(Q).$$

El polinomio  $R$  se llama el *resto* de la división de  $P$  por  $Q$ . Cuando este resto es el polinomio nulo (es decir, si  $P = QS$ ), decimos que  $P$  es divisible por  $Q$  o que  $Q$  divide a  $P$ .

Dados  $P \in \mathbb{K}[x]$ ,  $P(x) = \sum_{j=0}^n a_jx^j$ , y  $z \in \mathbb{K}$ , llamaremos *especialización* de  $P$  en  $z$  al número

$$P(z) = \sum_{j=0}^n a_jz^j \text{ y diremos que } z \text{ es raíz de } P \text{ si } P(z) = 0.$$

**Teorema del resto.** Sean  $P \in \mathbb{K}[x]$  y  $z \in \mathbb{K}$ . Entonces el resto de la división de  $P$  por  $x - z$  es igual a  $P(z)$ . En particular,  $z$  es raíz de  $P$  si y sólo si  $x - z$  divide a  $P$ .

Si  $P \in \mathbb{K}[x]$  y  $z_1, z_2, \dots, z_r$  son  $r$  raíces distintas de  $P$ , entonces

$$P = (x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_r) \cdot Q$$

para algún  $Q \in \mathbb{K}[x]$ .

En consecuencia, si  $P \in \mathbb{K}[x]$  tiene grado  $n$ , entonces  $P$  tiene a lo sumo  $n$  raíces en  $\mathbb{K}$ .

**Teorema de Gauss.** Sea  $P \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ , con  $a_n \neq 0$  y  $a_0 \neq 0$ . Si  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  es raíz de  $P$  (con  $p \in \mathbb{Z}$  y  $q \in \mathbb{N}$  sin factores primos en común), entonces  $p$  es un divisor de  $a_0$  y  $q$  es un divisor de  $a_n$ .

**Teorema fundamental del álgebra.** Si  $P \in \mathbb{C}[x]$  y  $\text{gr}(P) \geq 1$ , existe  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z$  es raíz de  $P$ .

*Propiedad.* Si  $P \in \mathbb{R}[x]$  y  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $z$  es raíz de  $P$  si y sólo si  $\bar{z}$  es raíz de  $P$ .

Sea  $P \in \mathbb{K}[x]$  y sea  $k \in \mathbb{N}$ . Diremos que  $z \in \mathbb{K}$  es una raíz de  $P$  de *multiplicidad*  $k$  si existe  $Q \in \mathbb{K}[x]$  con  $Q(z) \neq 0$  tal que  $P(x) = (x - z)^k Q(x)$ .

Dado  $P \in \mathbb{K}[x]$ ,  $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ , el *polinomio derivado* de  $P$  es  $\partial P(x) = \sum_{j=1}^n j a_j x^{j-1} \in \mathbb{K}[x]$ .

*Propiedades.* Dados  $P, Q \in \mathbb{K}[x]$  y  $a \in \mathbb{K}$ ,

$$a) \partial(P + Q) = \partial P + \partial Q \quad b) \partial(PQ) = (\partial P) \cdot Q + P \cdot (\partial Q) \quad c) \partial(ax^0) = 0$$

Escribimos  $\partial^2 P = \partial(\partial P)$ ,  $\partial^3 P = \partial(\partial^2 P) = \partial(\partial(\partial P))$ ,  $\partial^m P = \partial(\partial^{m-1} P) = \partial(\partial(\dots(\partial P)))$ .

*Propiedad.* Si  $P \in \mathbb{K}[x]$  y  $z \in \mathbb{K}$ , vale que  $z$  es una raíz de  $P$  de multiplicidad  $k$  si y sólo si

$$P(z) = 0, \partial P(z) = 0, \partial^2 P(z) = 0, \dots, \partial^{k-1} P(z) = 0 \text{ y } \partial^k P(z) \neq 0.$$

Dados un polinomio  $f \in \mathbb{R}[x]$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$  una raíz de  $f$ , el *orden de contacto* entre la curva  $y = f(x)$  y el eje  $x$  en el punto  $(x_0, 0)$  es la multiplicidad de  $x_0$  como raíz de  $f$ . Más generalmente, si  $f, g \in \mathbb{R}[x]$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$  es tal que  $f(x_0) = g(x_0)$ , el orden de contacto entre las curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  en el punto de abscisa  $x_0$  es la multiplicidad de  $x_0$  como raíz de  $f - g$ .

**Polinomio interpolador de Lagrange.** Sean  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  tales que  $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$  y sean  $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ . Existe un único polinomio  $L \in \mathbb{K}[x]$ , con  $L = 0$  o  $\text{gr}(L) \leq n$ , que satisface  $L(a_i) = b_i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ . Este polinomio es

$$L(x) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(x) \text{ donde } L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x - a_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k)}$$

## EJERCICIOS

**Ejercicio 1.** Calcular  $PQ$ ,  $P + 3Q$  y  $(P + 2x)xQ^2$ , indicando en cada caso el coeficiente principal y el grado.

a)  $P(x) = 2x^2 - 3$ ,  $Q(x) = x^4$

b)  $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$ ,  $Q(x) = -x^2 + 1$

c)  $P(x) = x^2 - x$ ,  $Q(x) = -x^2 + 3$

d)  $P(x) = -2x + 3$ ,  $Q(x) = x + 2$

**Ejercicio 2.** Determinar el grado del polinomio  $P$  sabiendo que  $(1 + x^2Q)xP$  tiene grado 11 y que  $Q$  es un polinomio de grado 5.

**Ejercicio 3.** Hallar, si existen,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tales que  $x^2 + 8x = a + bx^2 + c(x + 1)(x + 3)$ .

**Ejercicio 4.** Hallar el cociente y el resto de la división de  $P$  por  $Q$ .

a)  $P = 2x^4 - 15x^2 - 5x + 1$ ,  $Q = x - 3$

b)  $P = x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 4$ ,  $Q = x^2 + 1$

c)  $P = 4x^5 + x^3 + x + 1$ ,  $Q = 2x^2 - x + 1$

**Ejercicio 5.** Determinar todos los  $a \in \mathbb{R}$  tales que  $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$  es divisible por  $x^2 + a$ .

**Ejercicio 6.** Determinar todos los  $a \in \mathbb{R}$  tales que

a)  $P(2) = -6$ , para  $P(x) = ax^2 - x$

b)  $P(x) = 2x^4 - 3ax^2 + 1 - 5a$  tenga a cero como raíz

c)  $P(-1) = a$ , para  $P(x) = ax^2 + ax + 5$

**Ejercicio 7.** Determinar todas las raíces de  $P$  en los casos

a)  $P(x) = x^2 + (1 - i)x + 2 - 2i$

b)  $P(x) = ix^6 - 1$

**Ejercicio 8.** Determinar todas las raíces de  $P$  en  $\mathbb{C}$  y escribirlo como producto de polinomios irreducibles en  $\mathbb{C}[x]$  y en  $\mathbb{R}[x]$ .

a)  $P(x) = 3x^3 + x^2 + 12x + 4$

b)  $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{2}{3}x - 7$

c)  $P(x) = x^4 + \frac{7}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1$

d)  $P(x) = (5x^4 + 5)(x^2 - 2)$

e)  $P(x) = 4x^4 - 9x^2 - 9$

f)  $P(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 4$

g)  $P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - x - 10$ , sabiendo que  $i$  es raíz

h)  $P(x) = 3x^5 - 4x^4 + 7x^3 + 19x^2 - 22x + 5$ , sabiendo que  $1 + 2i$  es raíz

**Ejercicio 9.** Determinar todas las raíces de  $P$  en  $\mathbb{C}$ .

a)  $P(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ , sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

b)  $P(x) = x^3 - (3 + 3i)x^2 + 8ix + 4 - 4i$ , sabiendo que tiene una raíz real.

**Ejercicio 10.** Determinar la multiplicidad de  $z$  como raíz de  $P$ .

a)  $P(x) = (x^2 + 4)(x - 2)^3(x^3 - 8)$ ,  $z = 2$

b)  $P(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1$ ,  $z = i$

c)  $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ ,  $z = 1$

d)  $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ ,  $z = \frac{1}{2}$

**Ejercicio 11.** Sabiendo que  $P$  tiene una raíz múltiple, hallar todas sus raíces y escribirlo como producto de polinomios de grado 1.

a)  $P(x) = 4x^3 + 8\sqrt{3}x^2 + 15x + 3\sqrt{3}$

b)  $P(x) = x^3 + 3ix^2 + 4i$

**Ejercicio 12.** Sea  $P(x) = 3x^5 + ax^4 + ax + 3$ . Hallar  $a \in \mathbb{R}$  para que  $-1$  sea raíz múltiple de  $P$ . Para el valor hallado, calcular la multiplicidad de  $-1$  como raíz de  $P$  y escribir a  $P$  como producto de polinomios irreducibles en  $\mathbb{R}[x]$  y en  $\mathbb{C}[x]$ .

**Ejercicio 13.**

- Hallar  $P \in \mathbb{C}[x]$  de grado mínimo que tenga a  $-1$  como raíz, a  $2 + 3i$  como raíz múltiple y que verifique  $P(1) = 20$ .
- Hallar  $P \in \mathbb{R}[x]$  de grado mínimo que tenga a  $-1$  y a  $2 + 3i$  como raíces y que verifique  $P(2) = 3$ .
- Hallar  $P \in \mathbb{R}[x]$  mónico de grado mínimo que tenga a  $-1$  como raíz y a  $2 + 3i$  como raíz doble.

**Ejercicio 14.** Determinar el orden de contacto de las curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  en el punto de abscisa  $x_0$ .

- $f(x) = -3x^5 + x^3 + 2x^2$ ,  $g(x) = 0$ ,  $x_0 = 0$
- $f(x) = x^5 + 5x^3 - 3x^4 - 7x^2 + 6x - 2$ ,  $g(x) = 0$ ,  $x_0 = 1$
- $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ ,  $g(x) = -2x^2 + x + 1$ ,  $x_0 = 0$
- $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 5$ ,  $g(x) = -2x^3 + 1$ ,  $x_0 = -2$

**Ejercicio 15.**

- Encontrar la ecuación de una parábola que pase por los puntos  $(1, -1)$ ,  $(0, 1)$  y  $(2, 2)$ .
- Encontrar un polinomio  $P$  de grado a lo sumo 3 que verifique  $P(1) = 2$ ,  $P(0) = -1$ ,  $P(2) = 2$  y  $P(-1) = 1$ .