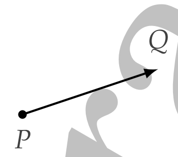
Práctica 4

Álgebra vectorial - Primera parte

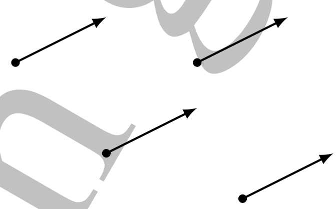
Definiciones y propiedades

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

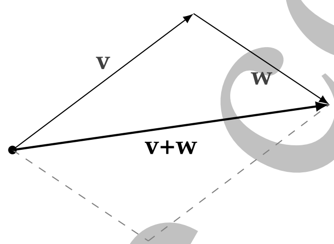
Una flecha que sirve para representar cantidades físicas (fuerzas, velocidades) es un *vector*. Para dar un vector necesitamos un *origen* (P) y un *extremo* (Q) que lo determinan totalmente, proporcionando su dirección, longitud y sentido.



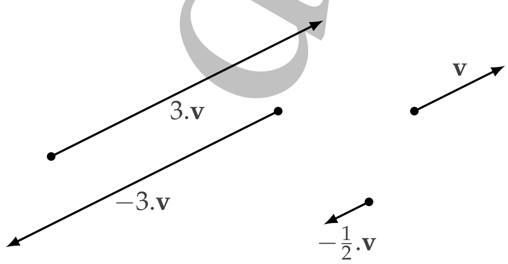
Vectores equivalentes son los que tienen igual dirección, longitud y sentido. Los siguientes vectores son todos equivalentes:



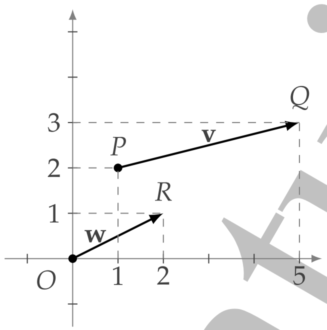
Los vectores se pueden sumar. La suma, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es equivalente a una de las diagonales del paralelogramo de lados $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$:



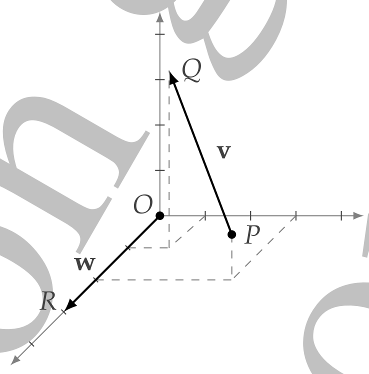
También se puede multiplicar un vector por un número (escalar). El resultado es un vector de igual dirección que el dado; el número afecta la longitud y el sentido del vector.



En el plano $\mathbb{R}^2$ los puntos están dados por pares de números reales (sus coordenadas) por lo que, para dar un vector, bastará dar dos pares de números reales que caractericen su origen y su extremo. En la figura que sigue, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ está dado por $P = (1,2)$ y $Q = (5,3)$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{OR}$ está dado por $O = (0,0)$ y $R = (2,1)$.



Algo análogo se puede decir en el espacio de tres dimensiones $\mathbb{R}^3$; ahora, cada punto, en particular el origen y el extremo de un vector, estará dado por una terna de números reales. En la figura que sigue, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ está dado por $P = (2,3,1)$ y $Q = (1,1,4)$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{OR}$ está dado por $O = (0,0,0)$ y $R = (3,0,0)$.



En adelante trabajaremos con vectores cuyo origen O tiene todas sus coordenadas iguales a 0 ($O = (0,0)$ en $\mathbb{R}^2$ y $O = (0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$), identificando entonces el punto P con la flecha $\overrightarrow{OP}$.

Dados $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ en $\mathbb{R}^2$, definimos

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2)$.

Análogamente, en $\mathbb{R}^3$, si $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$, se define

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2, cp_3)$.

Escribimos $P - Q = P + (-1).Q$ (es decir, resta coordenada a coordenada).

En este contexto vale:

a) $\overrightarrow{PQ}$ es *equivalente* a $\overrightarrow{RS}$ si y sólo si $S - R = Q - P$. En particular, $\overrightarrow{PQ}$ es *equivalente* a $\overrightarrow{OR}$ si y sólo si $R = Q - P$.

b) $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son *paralelos* o tienen igual dirección si existe $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, tal que $Q - P = k.(S - R)$.
Si $k > 0$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen igual sentido; si $k < 0$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen sentidos opuestos.

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Generalizando lo anterior, llamaremos *punto* o *vector* en el espacio $\mathbb{R}^n$ a una n-upla $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, donde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son números reales. Estos números son las *coordenadas* de X.

Si $P = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$ decimos que

$$P = Q \text{ si y sólo si } p_1 = q_1,\ p_2 = q_2,\ p_3 = q_3,\ \ldots,\ p_n = q_n.$$

Definimos

- la *suma* como $P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3, \ldots, p_n + q_n)$ y
- el *producto* por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $c.P = (cp_1, cp_2, cp_3, \ldots, cp_n)$.

El vector con todas sus coordenadas cero se notará $O = (0, 0, 0, \ldots, 0)$

Propiedades. Las siguientes propiedades para la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector valen en cualquier espacio de vectores $\mathbb{R}^n$:

1) $P + (Q + R) = (P + Q) + R$

2) $P + Q = Q + P$

3) Si $c \in \mathbb{R}$, $c.(P + Q) = c.P + c.Q$

4) Si $c_1 \in \mathbb{R}$ y $c_2 \in \mathbb{R}$, $(c_1 + c_2).P = c_1.P + c_2.P$ y $(c_1c_2).P = c_1.(c_2.P)$

5) $O + P = P$

6) $1.P = P$

7) $P + (-1).P = O$ Notación: $-P = (-1).P$

8) $0.A = O$

Producto interno o escalar

Dados dos vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ en $\mathbb{R}^2$, se define el *producto interno (o escalar)* de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como el número real $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$.
En $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, el *producto interno (o escalar)* de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el número real $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$.

Propiedades.

PE1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

PE2. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{w} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$

PE3. Si $k \in \mathbb{R}$, $(k.\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = k.(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (k.\mathbf{w})$

PE4. Si $\mathbf{v} = O$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. Si $\mathbf{v} \neq O$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$.

Diremos que dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son *ortogonales* o *perpendiculares* si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Producto vectorial

Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, el *producto vectorial* $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ se define como el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$. Notar que el producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$ es un vector en $\mathbb{R}^3$.

Propiedades.

PV1. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$

PV2. $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{z})$

$(\mathbf{w} + \mathbf{z}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{z} \times \mathbf{v})$

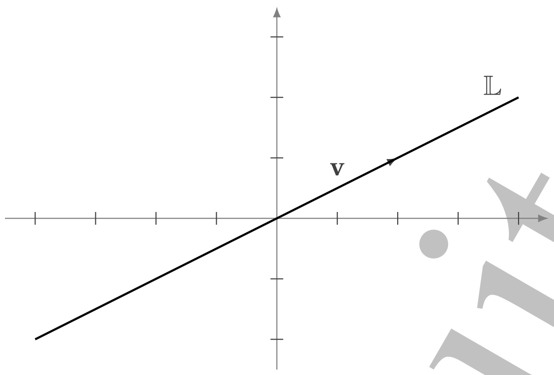
PV3. Si $k \in \mathbb{R}$, $(k.\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = k.(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (k.\mathbf{w})$

PV4. $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = O$

PV5. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$

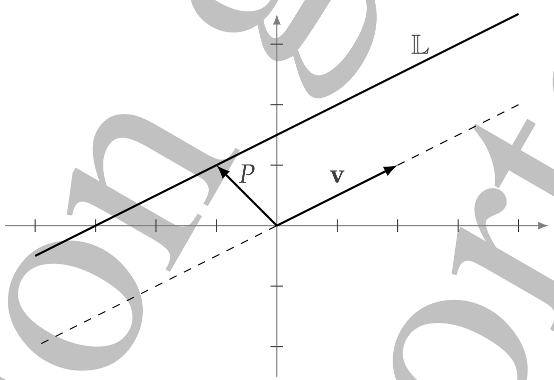
Rectas

Dado en el plano $\mathbb{R}^2$ un vector $\mathbf{v}$, el conjunto de todos sus múltiplos es la recta $\mathbb{L}$ que tiene por dirección a $\mathbf{v}$ y que pasa por O.



Una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ es $X = \lambda.\mathbf{v}\ (\lambda \in \mathbb{R})$. Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $X = (x, y)$, la ecuación se escribe $(x, y) = \lambda.(v_1, v_2)\ (\lambda \in \mathbb{R})$.
La recta $\mathbb{L}$ resulta ser el conjunto de soluciones de la ecuación $v_2 x - v_1 y = 0$, y esta ecuación es una *ecuación implícita* de $\mathbb{L}$.

Ahora bien, dados en el plano $\mathbb{R}^2$ un vector $\mathbf{v}$ y un punto P, una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por P en la dirección de $\mathbf{v}$ es $X = \lambda.\mathbf{v} + P\ (\lambda \in \mathbb{R})$. El vector $\mathbf{v}$ se dice un *vector dirección* para $\mathbb{L}$.



Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $P = (p_1, p_2)$ y $X = (x, y)$, la ecuación paramétrica se escribe $(x, y) = \lambda.(v_1, v_2) + (p_1, p_2)$.
Si $c = v_2 p_1 - v_1 p_2$, la recta $\mathbb{L}$ es el conjunto de soluciones de la ecuación $v_2 x - v_1 y = c$, y esta ecuación es una *ecuación implícita* para $\mathbb{L}$.
Para describir una recta en $\mathbb{R}^2$, podemos utilizar una ecuación paramétrica del tipo $X = \lambda.\mathbf{v} + P$ o utilizar una ecuación implícita del tipo $ax + by = c$.

De manera similar, dados en $\mathbb{R}^3$ un vector $\mathbf{v}$ y un punto P una *ecuación paramétrica* de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por P en la dirección de $\mathbf{v}$ es $X = \lambda.\mathbf{v} + P \quad (\lambda \in \mathbb{R})$. El vector $\mathbf{v}$ se dice un *vector dirección* para $\mathbb{L}$.
Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $X = (x, y, z)$, tenemos que $(x, y, z) = \lambda.(v_1, v_2, v_3) + (p_1, p_2, p_3)$.

Planos en $\mathbb{R}^3$

Dado un vector $\mathbf{N}$ y un punto Q de $\mathbb{R}^3$, la *ecuación* del plano Π que pasa por Q y es perpendicular a $\mathbf{N}$ es

$$\Pi : \quad (X - Q) \cdot \mathbf{N} = 0.$$

El plano Π es el conjunto de todos los puntos X tales que $X - Q$ es perpendicular a $\mathbf{N}$. Diremos que $\mathbf{N}$ es un *vector normal* al plano. Si $X = (x, y, z)$ y $\mathbf{N} = (a, b, c)$, la ecuación resulta:

$$\Pi : \quad ax + by + cz = d \quad \text{donde} \quad d = Q \cdot \mathbf{N}.$$

Esta ecuación es una *ecuación implícita* del plano Π.
Si los puntos P, Q y R no están alineados y pertenecen al plano Π, resulta que Π es el conjunto de todos los X que cumplen

$$X = \alpha.(P - R) + \beta.(Q - R) + R \quad \text{para } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Ésta es una *ecuación paramétrica* del plano Π. Un vector normal $\mathbf{N}$ a Π es cualquier vector no nulo perpendicular simultáneamente a $P - R$ y a $Q - R$. Por ejemplo, puede tomarse $\mathbf{N} = (P - R) \times (Q - R)$.

Una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^3$ puede considerarse como intersección de dos planos que la contienen. Por lo tanto, para dar ecuaciones implícitas para una recta se necesitan por lo menos dos ecuaciones.
Una forma de obtener ecuaciones implícitas a partir de una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}$ del tipo $(x, y, z) = \lambda.(v_1, v_2, v_3) + (p_1, p_2, p_3)$ es buscar dos vectores con distintas direcciones (a, b, c) y (d, e, f) perpendiculares a (v_1, v_2, v_3) simultáneamente. Entonces la recta $\mathbb{L}$ estará dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3 \\ dx + ey + fz = dp_1 + ep_2 + fp_3. \end{cases}$$

Posiciones relativas

Dos rectas en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ se dicen

- *coincidentes* si son la misma recta,
- *transversales* si se cortan en un punto,
- *paralelas* si sus direcciones coinciden.

Dos rectas en $\mathbb{R}^3$ pueden no cortarse ni ser paralelas; en este caso, se dicen *alabeadas*.

Si las direcciones de dos rectas son perpendiculares, decimos que las rectas son *perpendiculares* u *ortogonales*.

Dos planos en $\mathbb{R}^3$ se dicen

- *coincidentes* si son el mismo plano,
- *transversales* si se cortan en una recta,
- *paralelos* si sus vectores normales lo son.

Una recta y un plano en $\mathbb{R}^3$ son

- *paralelos* si la dirección de la recta es perpendicular al vector normal al plano,
- *ortogonales* si la dirección de la recta es paralela al vector normal al plano.

Ejercicios

Ejercicio 1. Dados los puntos $P = (3,1)$ y $Q = (1,-5) \in \mathbb{R}^2$:

a) Graficarlos en el plano.

b) Calcular y representar gráficamente los puntos $P+Q$, $P-Q$, $3.P$, $-2.Q$ y $P+\frac{1}{2}Q$.

c) Representar en un mismo gráfico $3.P$, $-2.Q$ y $3.P-2.Q$.

d) Graficar los conjuntos $A = \{a.P \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{b.Q \in \mathbb{R}^2 \ / \ b \in \mathbb{R}\}$

e) Determinar geométricamente para qué valores de (x,y) existen a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a.P + b.Q = (x,y)$.

Ejercicio 2.

a) Representar gráficamente en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P = (1,0,0)$, $Q = (1,1,0)$, $R = (1,1,1)$ y calcular y representar gráficamente los puntos $S = P+Q$, $T = Q-R$ y $V = \frac{1}{2}.R - P$.

b) Un cubo tiene vértices en $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Escribir las coordenadas de los otros 4 vértices.

c) Hallar, si es posible, a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que $(1,2,3) = a.(1,0,0) + b.(1,1,0) + c.(1,1,1)$.

Ejercicio 3. Efectuar las operaciones indicadas en cada caso.

a) Si $P = (2, 3, 0, -2)$ y $Q = (1, 4, -2, -1) \in \mathbb{R}^4$, calcular $R = P + 3.Q$ y $S = 2.P - \frac{1}{3}.Q$.

b) Si $P = (1, 0, -3, 0, 2)$ y $Q = (0, -1, -2, 0, 4) \in \mathbb{R}^5$, calcular $R = -P + 2.Q$ y $S = -2.P - \frac{2}{3}.Q$.

Ejercicio 4. Dados en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 5)$ y $\mathbf{v}_3 = (3, -1)$:

a) Graficarlos.

b) Graficar $\mathbf{w}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (2, 5)$ y $\mathbf{w}_3 = (-3, -1)$. ¿Qué efecto geométrico produce cambiar el signo a la primera coordenada de un vector?

c) Graficar $\mathbf{z}_1 = (1, -2)$, $\mathbf{z}_2 = (-2, -5)$ y $\mathbf{z}_3 = (3, 1)$. ¿Qué efecto geométrico produce cambiar el signo a la segunda coordenada de un vector?

d) Graficar $-\mathbf{v}_1$, $-\mathbf{v}_2$ y $-\mathbf{v}_3$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar un vector por -1?

Comparar con el ejercicio 4 de la práctica 2.

Ejercicio 5. Dados en $\mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $P_1 = (-2, 1)$, $P_2 = (-2, 3)$ y $P_3 = (-3, 3)$ y el vector $\mathbf{t} = (4, 2)$:

a) Graficarlos.

b) Graficar, con la misma escala, el triángulo de vértices $P_1 + \mathbf{t}$, $P_2 + \mathbf{t}$ y $P_3 + \mathbf{t}$ y el triángulo de vértices $P_1 - \mathbf{t}$, $P_2 - \mathbf{t}$ y $P_3 - \mathbf{t}$. ¿Qué efecto geométrico produce sumar el vector $\mathbf{t}$? ¿Y restarlo?

c) Graficar, con la misma escala, el triángulo de vértices $2.P_1$, $2.P_2$ y $2.P_3$ y el triángulo de vértices $\frac{1}{2}.P_1$, $\frac{1}{2}.P_2$ y $\frac{1}{2}.P_3$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar por 2? ¿Y por $\frac{1}{2}$?

Comparar con los ejercicios 4, 5 y 7 de la práctica 2.

Ejercicio 6. Dado un vector se le realizan dos operaciones consecutivas: primero se lo multiplica por un escalar fijo (dilatación) y luego se le suma otro vector fijo (traslación).

a) Si se le aplican estas dos operaciones al vector $\mathbf{v} = (1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega al vector $\mathbf{w} = (-6, 12)$. ¿Se puede decidir cuál fue la dilatación y cuál la traslación? (Sugerencia: buscar si es posible llegar de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ de dos formas distintas).

b) Si se le aplican las dos operaciones a $\mathbf{v}_1 = (1,2)$ y a $\mathbf{v}_2 = (3,4)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega a $\mathbf{w}_1 = (-6,12)$ y a $\mathbf{w}_2 = (-5,13)$ respectivamente. Hallar el escalar que da la dilatación y el vector que da la traslación.

c) ¿Puede ser que luego de aplicar la misma dilatación y la misma traslación a los vectores $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ y $\mathbf{v}_2 = (2,-4)$ se llegue a los vectores $\mathbf{w}_1 = (2,4)$ y $\mathbf{w}_2 = (-2,3)$ respectivamente?

d) Si se le aplican las dos operaciones en $\mathbb{R}^3$ a $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$ se llega a $\mathbf{w}_1 = (2,1,5)$. Probar que, si λ es el escalar que da la dilatación, al aplicarle las mismas dos operaciones a $\mathbf{v}_2 = (2,1,3)$ se llega a $(\lambda+2, 1, 2\lambda+5)$.

Ejercicio 7.

a) En cada caso, graficar los vectores de $\mathbb{R}^2$ involucrados, calcular el producto escalar $\cdot$ indicado y determinar si son ortogonales:

$$(1,-1)\cdot(2,4); \quad (1,3)\cdot(-6,2); \quad (1,2)\cdot(1,2); \quad (-1,0)\cdot(0,1)$$

b) En cada caso, calcular el producto escalar indicado de vectores de $\mathbb{R}^3$ y decidir si son ortogonales:

$$(1,3,5)\cdot(3,0,-2); \quad (-1,2,1)\cdot(6,1,4); \quad (2,4,-2)\cdot(-3,-6,3); \quad (1,0,0)\cdot(0,1,1)$$

c) Hallar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^2$ que sean ortogonales a $(5,-3)$. ¿Qué relación cumplen entre sí?

d) Encontrar dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $(1,1,2)$ que no sean paralelos entre sí.

e) Hallar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a $(1,2,1)$ y a $(1,-3,0)$ simultáneamente. ¿Qué relación cumplen entre sí?

f) Dados $\mathbf{v} = (1,2)$; $\mathbf{w} = (-1,5)$ y $\mathbf{z} = (3,1)$, calcular

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}; \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}; \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{z}; \quad \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}+\mathbf{z}); \quad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}); \qquad (5.\mathbf{v})\cdot\mathbf{z}; \qquad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}-3.\mathbf{z}).$$

¿Qué relaciones se cumplen?

g) Dados $\mathbf{v} = (1,1,1)$; $\mathbf{w} = (1,-1,3)$ y $\mathbf{z} = (2,-1,1)$, calcular

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}; \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}; \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{z}; \quad \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}+\mathbf{z}); \quad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}); \qquad (5.\mathbf{v})\cdot\mathbf{z}; \qquad \mathbf{v}\cdot(2.\mathbf{w}-3.\mathbf{z}).$$

¿Qué relaciones se cumplen?

Ejercicio 8. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas para vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$:

a) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $-\mathbf{w}$ y a $5.\mathbf{w}$.

b) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ y a $\mathbf{z}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}+\mathbf{z}$ y a $3.\mathbf{w}-2.\mathbf{z}$.

c) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$.

d) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ y a $\mathbf{w}-3.\mathbf{z}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{z}$.

Ejercicio 9.

a) En cada caso, calcular el producto vectorial indicado de vectores de $\mathbb{R}^3$. ¿En qué casos da $(0,0,0)$?

$$(1,3,5)\times(3,0,-2);\quad (-1,2,1)\times(6,1,4);\quad (2,4,-2)\times(-3,-6,3);$$

$$(0,0,0)\times(1,-1,3);\quad (a,b,c)\times(ka,kb,kc)$$

b) Dados $\mathbf{v}=(1,1,1)$; $\mathbf{w}=(1,-1,0)$ y $\mathbf{z}=(2,-1,1)$, calcular

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w};\quad \mathbf{w}\times\mathbf{v};\quad \mathbf{v}\times\mathbf{z};\quad \mathbf{v}\times(\mathbf{w}+\mathbf{z});\quad \mathbf{v}\times(3.\mathbf{w});\quad (5.\mathbf{v})\times\mathbf{z};\quad \mathbf{v}\times(2.\mathbf{w}-3.\mathbf{z})$$

¿Qué relaciones se cumplen?

c) Dados $\mathbf{v}=(1,1,1)$; $\mathbf{w}=(1,-1,0)$, calcular

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{v};\quad (\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}$$

¿Cómo resulta ser el vector $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ con respecto a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$?

d) Dar un vector que sea ortogonal a $(1,3,5)$ y a $(3,0,-2)$ simultáneamente.

Ejercicio 10. Sea $\mathbb{L}\subset\mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $(3,2)$ y $(0,0)$.

a) Graficarla.

b) Encontrar dos vectores dirección distintos para $\mathbb{L}$. Graficarlos.

c) Dar una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}$. ¿Es única?

d) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\mathbb{L}$: $(-3,-2)$, $(2,3)$, $(0,0)$, $(-6x,-2x)$.

e) ¿Es $\mathbb{L}$ igual a la recta $\mathbb{L}' : X = \lambda.(300, 200) + (3, 2)$?

Ejercicio 11. Sea $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(-2, 2)$.

a) Graficarla.

b) Encontrar dos vectores dirección distintos para $\mathbb{L}$. Graficarlos.

c) Dar dos ecuaciones paramétricas para $\mathbb{L}$.

d) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\mathbb{L}$: $(-3, 1)$, $(4, 0)$, $(0, 0)$, $(-3x + 1, x + 1)$.

e) ¿Es $\mathbb{L}$ igual a la recta $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-27, 9) + (-14, 6)$? ¿Y a la recta $\mathbb{L}'' : X = \lambda.(27, -9) + (-27, 9)$?

Ejercicio 12. Un móvil se desplaza por el plano $\mathbb{R}^2$ de forma tal que, en tiempo t, se encuentra en el punto $t.(3, -2) + (1, 1)$.

a) Graficar la trayectoria del móvil si parte en tiempo $t = 0$.

b) Graficar los puntos donde se encuentra en tiempo $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$.

c) Si $P(t)$ es el punto en el que se encuentra en tiempo t, calcular $P(0)$ y $P(t + 1) - P(t)$ para un valor genérico de t. ¿Qué relación tienen con los datos dados?

d) Si hay una pared ubicada en la recta vertical de ecuación $x = 16$, ¿en qué momento choca el móvil contra la pared?

e) Repetir los distintos ítems con un móvil que se desplaza según la ecuación $t.(6, -4) + (1, 1)$ para $t \geq 0$ y con otro que se desplaza según $t.(\frac{3}{2}, -1) + (1, 1)$ para $t \geq 0$. ¿Cómo son las trayectorias? ¿En qué se diferencian los movimientos?

Ejercicio 13. Dada la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2) + (3, 2)$:

a) Dar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}_1$ paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por $(0, 0)$.

b) Dar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}_2$ paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por $(-1, -6)$.

c) Graficar $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Qué relación cumplen $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$? Justificar.

Ejercicio 14. Sea $\mathbb{L}$ la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(0, 3)$.

a) Hallar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}_1$ perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $(0,0)$.

b) Hallar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}_2$ perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $(1,2)$.

c) Graficar las tres rectas en un mismo sistema de coordenadas. ¿En qué posición relativa están $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$?

Ejercicio 15. Sean $P=(4,9)$, $Q=(-6,5)$ y $\mathbb{L}: X=\lambda.(1,2)$. Hallar todos los puntos $R\in\mathbb{L}$ tales que:

a) el triángulo PQR sea rectángulo en P.

b) el triángulo PQR sea rectángulo en R.

Ejercicio 16. Dadas $\mathbb{L}_1: X=\alpha.(5,-1)+(2,1)$, $\mathbb{L}_2$ la recta que pasa por los puntos $(0,1)$ y $(-3,2)$, $\mathbb{L}_3$ la recta que pasa por los puntos $(5,5)$ y $(5,-1)$, $\mathbb{L}_4: X=\beta.(1,0)+(2,1)$ y $\mathbb{L}_5: x+3y=-1$:

a) Dar ecuaciones implícitas para $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{L}_3$ y $\mathbb{L}_4$.

b) Dar una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}_5$.

Ejercicio 17. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1: -x+3y=2$, $\mathbb{L}_2: -2x+6y=-3$ y $\mathbb{L}_3: x-3y=0$:

a) Representarlas gráficamente en el mismo plano. ¿Cuál es su posición relativa?

b) Notar que las ecuaciones de las rectas anteriores pueden escribirse usando el producto escalar: $\mathbb{L}_1: (-1,3)\cdot(x,y)=2$, $\mathbb{L}_2: (-2,6)\cdot(x,y)=-3$ y $\mathbb{L}_3: (1,-3)\cdot(x,y)=0$ ¿Qué relación tienen entre sí los vectores $(-1,3)$, $(-2,6)$ y $(1,-3)$ que aparecen en las ecuaciones?

c) Buscar un vector dirección distinto para cada una de las rectas. ¿Qué relación tienen los vectores dirección encontrados con los vectores $(-1,3)$, $(-2,6)$ y $(1,-3)$?

d) Dar una ecuación implícita de la recta paralela a $\mathbb{L}_1$ que pasa por $(-1,1)$.

Ejercicio 18.

a) Dar una ecuación paramétrica de la recta paralela a $\mathbb{L}: x=2$ que pasa por $(3,8)$.

b) Dar una ecuación implícita de la recta perpendicular a $\mathbb{L}: X=\lambda.(2,3)+(1,2)$ que pasa por $(5,-2)$.

Ejercicio 19. Hallar, en cada caso, la intersección de las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ y decidir sus posiciones relativas:

a) $\mathbb{L}_1 : 3x + y = -3$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha(1,3) + (2,0)$.

b) $\mathbb{L}_1 : -2x + 3y = -13$ y $\mathbb{L}_2 : y = 7x + 2$.

c) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(-4,1) + (2,1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(-2,1) + (0,-1)$.

d) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(-3,2) + (5,1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(6,-4) + (0,1)$.

e) $\mathbb{L}_1 : x - 2y = -1$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(2,1) + (1,1)$

Ejercicio 20. Sean $\mathbb{L}_1 : x - 2y = 3$, $\mathbb{L}_2 : -2x + y = -3$ y $\mathbb{L}_3 : X = \alpha.(1,-7)$.

a) Dar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por el punto de intersección de $\mathbb{L}_2$ y $\mathbb{L}_3$ y es paralela a $\mathbb{L}_1$.

b) Dar una ecuación implícita de la recta $\mathbb{L}'$ que pasa por el punto de intersección de $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ y es perpendicular a $\mathbb{L}_3$.

Ejercicio 21. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^3$ que:

a) tiene dirección $(1,-1,2)$ y pasa por el origen de coordenadas.

b) tiene dirección $(1,-1,2)$ y pasa por el punto $(0,2,-3)$.

c) pasa por los puntos $(1,5,1)$ y $(-4,3,2)$.

d) es paralela a $\mathbb{L} : X = \lambda.(2,1,-1) + (-2,4,1)$ y pasa por el punto $(0,3,2)$.

e) pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a $(2,-2,1)$ y a $(-3,2,1)$.

f) es perpendicular a $(2,1,0)$ y a $(0,-1,2)$ simultáneamente y pasa por el origen.

g) es perpendicular a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2,1,-1) + (-2,4,1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(-1,0,2) + (2,1,0)$ simultáneamente y pasa por el punto $(0,3,2)$.

Ejercicio 22. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1,2,-1) + (1,3,5)$ y $\mathbb{L}_2$ la recta paralela a $\mathbb{L}_1$ que pasa por el punto $(3,2,4)$.

a) Hallar el punto de $\mathbb{L}_2$ que tiene coordenada $z = 0$.

b) Decidir si los puntos $(-1,-1,7)$ y $(1,-2,6)$ están en $\mathbb{L}_2$.

Ejercicio 23.

a) Decidir si los puntos $(1,2,-4)$, $(3,-2,0)$ y $(2,0,-2)$ están alineados.

b) Decidir si los puntos $(1,1,3)$, $(2,1,4)$ y $(2,1,5)$ están alineados.

c) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que los puntos $(2+a,3,-1)$, $(5,a+3,-2)$ y $(a,-1,1)$ están alineados.

Ejercicio 24. Sean $\mathbb{L} : X = \beta.(1,1,-2) + (0,0,4)$ y $P = (3,1,0)$. Determinar un punto $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que:

a) la recta que pasa por P y Q sea paralela a $\mathbb{L}$.

b) $Q \in \mathbb{L}$ y la recta que pasa por P y Q sea perpendicular a $\mathbb{L}$.

Ejercicio 25. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1,2,1) + (2,3,2) \qquad \mathbb{L}_2 : X = \beta.(0,1,-1) + (1,3,-1)$$
$$\mathbb{L}_3 : X = \gamma.(2,4,2) + (1,5,0) \qquad \mathbb{L}_4 : X = \delta.(2,4,2) + (3,5,3)$$

calcular las siguientes intersecciones y, en cada caso, dar la posición relativa de las rectas en el espacio:

a) $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ *b)* $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3$ *c)* $\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3$ *d)* $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_4$

Ejercicio 26.

a) Dos móviles se desplazan por el espacio de forma tal que las ecuaciones de sus movimientos están dadas por $t.(1,2,-4) + (-1,3,0)$ y $t.(1,6,-10) + (2,1,0)$ para $t \geq 0$. Decidir si las trayectorias de los móviles se cruzan y, en caso afirmativo, decir en qué punto. ¿Se encuentran los dos móviles?

b) Mismo problema para las ecuaciones de movimiento $t.(1,2,0) + (0,3,2)$ y $t.(3,-4,0) + (1,5,7)$. ¿Son paralelas estas trayectorias?

Ejercicio 27. En cada caso, dar una ecuación implícita de:

a) los planos coordenados xy, xz y yz.

b) el plano Π perpendicular al vector $(1,-1,2)$ que pasa por el origen de coordenadas.

c) el plano Π perpendicular al vector $(1,-1,2)$ que pasa por el punto $(1,1,2)$.

d) el plano Π perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(2,1,-1) + (-2,4,1)$ que pasa por el punto $(-4,3,2)$.

e) el plano Π paralelo al plano $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 3$ que pasa por el punto $(0,1,2)$.

f) el plano Π que contiene a los puntos $(1,0,0)$, $(2,1,0)$ y $(1,1,-1)$.

Ejercicio 28.

a) Decidir si el punto $(1,2,-3)$ está en el plano que pasa por los puntos $(1,1,0)$, $(2,3,-1)$ y $(5,0,2)$.

b) Decidir si los puntos $(1,1,0)$, $(2,3,-1)$, $(5,0,2)$ y $(0,-1,1)$ son coplanares (es decir, están en un mismo plano).

Ejercicio 29. Dados el plano $\Pi : 2x - 3y + 7z = 3$ y las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2,1,-1) + (-2,4,1)$, $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(2,-1,-1) + (-7,-1,2)$ y $\mathbb{L}_3 : X = \lambda.(-1,4,2) + (1,0,1)$:

a) Calcular las intersecciones $\Pi \cap \mathbb{L}_1$, $\Pi \cap \mathbb{L}_2$ y $\Pi \cap \mathbb{L}_3$ y dar sus posiciones relativas.

b) Un móvil se dirige hacia el plano Π según la ecuación de movimiento $t.(1,1,1) + (-7,0,-1)$ para $t \geq 0$. Calcular en qué tiempo llega al plano y en qué punto lo impacta.

Ejercicio 30. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de una recta en $\mathbb{R}^3$ que:

a) es perpendicular al plano $\Pi : 4x - 2y + z = 3$ y pasa por el punto $(0,1,-2)$.

b) es paralela a los planos $\Pi_1 : 3x - y + 2z = 4$ y $\Pi_2 : y + z = 3$ simultáneamente y pasa por el punto $(1,3,1)$.

c) es perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(0,0,1) + (1,3,-2)$ y está incluida en el plano $\Pi : x + y + z = 2$.

Ejercicio 31. Para cada $k \in \mathbb{R}$, se considera la recta $\mathbb{L}_k : X = \lambda.(k, k+2, 1) + (1,1,1)$.

a) Probar que, si $k \neq k'$, $\mathbb{L}_k$ y $\mathbb{L}_{k'}$ son rectas distintas.

b) Probar que, para cualquier valor de k, $\mathbb{L}_k$ está incluida en el plano $\Pi : x - y + 2z = 2$.

c) Probar que la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,1,0) + (1,1,1)$ es una recta incluida en el plano Π pero no es igual a $\mathbb{L}_k$ para ningún valor de k.

Ejercicio 32.

a) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas transversales $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2,-1) + (3,0,0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2,-4,1) + (5,4,-3)$.

b) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas paralelas $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2,-1) + (3,0,0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2,-4,2) + (0,1,1)$.

c) ¿Existe algún plano que contenga simultáneamente a las rectas $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,2,0) + (3,0,-3)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2,0,0) + (0,2,3)$?

Ejercicio 33.

a) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_1 que pasa por $P = (2,-1,7)$, $Q = (0,2,3)$ y $R = (-2,5,-1)$.

b) Verificar que P, Q y R pertenecen al plano $\Pi_2 : X = \alpha.(1,0,5) + \beta.(-1,3,1) + (1,-1,2)$. Deducir que, como P, Q y R no están alineados, Π_1 y Π_2 son el mismo plano.

c) Comparar las ecuaciones paramétricas de Π_1 y de Π_2. ¿Son iguales?

d) Hallar una ecuación paramétrica del plano Π_3 paralelo a Π_1 que pasa por el punto $(1,0,2)$.

Ejercicio 34. Dar en $\mathbb{R}^3$ ecuaciones implícitas de:

a) el plano $\Pi_1 : X = \alpha.(1,0,5) + \beta.(-1,3,1) + (1,-1,2)$.

b) el plano paralelo al plano $\Pi_2 : X = \alpha.(1,3,2) + \beta.(2,5,3) + (3,2,1)$ que pasa por el punto $(2,3,1)$.

Ejercicio 35. Dar en $\mathbb{R}^3$ ecuaciones paramétricas de:

a) el plano perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \beta.(0,1,1) + (1,3,-1)$ que pasa por $(3,2,1)$.

b) el plano paralelo al plano $\Pi : 3x + 2y + z = 1$ que pasa por el punto $(1,1,1)$.

Ejercicio 36. Decidir en cada caso si los planos Π_1 y Π_2 se intersecan. En caso afirmativo, dar una ecuación paramétrica de la intersección.

a) $\Pi_1 : y = 0$ y $\Pi_2 : z = 2$

b) $\Pi_1 : x + z = 0$ y $\Pi_2 : y - z = 0$

c) $\Pi_1 : x + y - z = 0$ y $\Pi_2 : x + z = 2$

d) $\Pi_1 : x - z = 0$ y $\Pi_2 : 2x - 2z = 3$

e) $\Pi_1 : x + y - z = 1$ y $\Pi_2 : 2x + 2y - 2z = 2$

Ejercicio 37. En cada caso, dar ecuaciones implícitas que definan la recta pedida.

a) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1,3,1) + (2,0,0)$.

b) $\mathbb{L}_2 : X = \beta.(-3,0,1) + (1,1,1)$.

c) la recta $\mathbb{L}_3$ perpendicular al plano $\Pi_1 : X = \alpha.(1,0,5) + \beta.(-1,3,1) + (1,-1,2)$ que pasa por $(1,0,1)$.

d) la recta $\mathbb{L}_4$ perpendicular al plano $\Pi_2 : 2x + 2y - 2z = 3$ que pasa por el punto $(2,1,-1)$.

e) la recta $\mathbb{L}_5$ que pasa por el origen y es paralela a los planos $\Pi_3 : 2x - y + z = 3$ y $\Pi_4 : X = \alpha.(1,3,1) + \beta.(0,2,1) + (1,-1,2)$ simultáneamente.

f) la recta $\mathbb{L}_6$ que pasa por el punto $(2,0,-1)$, está incluida en el plano $\Pi_5 : 3x - z = 7$ y es paralela al plano $\Pi_6 : X = \alpha.(2,0,-2) + \beta.(3,1,1) + (1,0,2)$ simultáneamente.

Ejercicio 38. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) Dar ecuaciones paramétricas para $\mathbb{L}_1$ y para $\mathbb{L}_2$.

b) Decidir si son paralelas, coincidentes, alabeadas o se cortan en un punto.

Ejercicio 39. En cada caso, hallar la intersección de la recta $\mathbb{L}$ con el plano Π y decidir su posición relativa:

a) $\mathbb{L} : X = \alpha.(1,2,1) + (2,2,3)$
$\Pi : z = 0$

b) $\mathbb{L} : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$ $\quad \Pi : y = 3$

c) $\mathbb{L} : X = \alpha.(0,1,-1) + (0,1,1)$
$\Pi : y + z = 2$

d) $\mathbb{L} : X = \alpha.(0,1,-1) + (0,1,1)$
$\Pi : y + z = 0$.

e) $\mathbb{L} : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$ $\quad \Pi : X = \alpha.(1,0,0) + \beta.(0,1,-2) + (0,0,1)$

Ejercicios surtidos

1. Sea $\mathbb{L}$ la recta que pasa por $P = (1, -3)$ y $Q = (2, -4)$. Hallar b tal que la recta que es paralela a $\mathbb{L}$ y pasa por $(b, 5)$ también pase por $(2, 2)$.

2. Un móvil se desplaza por el plano en línea recta a velocidad constante de forma tal que en tiempo $t = 0$ se encuentra en el punto $(3, 2)$ y en tiempo $t = 2$ se encuentra en el punto $(2, 5)$. Calcular en qué momento cruza la recta $x = -2$ y en qué momento cruza la recta $y = 17$.

3. Un móvil se desplaza por el plano de forma tal que en tiempo t, para $t \geq 0$, se encuentra en el punto $t.(3, -1) + (-13, 31)$. Otro móvil se desplaza por otra recta, partiendo en el instante $t = 0$ del punto $(1, 3)$ a velocidad constante. Si los móviles se encuentran en tiempo $t = 7$, calcular la ecuación de movimiento del segundo. Considerando las direcciones en que se desplazan, ¿cómo son sus trayectorias?

4. Dada la recta $\mathbb{L} : X = \alpha.(1, 2, -1) + (0, 3, 2)$, hallar todos los valores de k para los cuales la recta que pasa por los puntos $(1, -1, 1)$ y $(4, k, -2)$ es:

a) paralela a la recta $\mathbb{L}$.

b) perpendicular a la recta $\mathbb{L}$.

5. Encontrar el valor de a para que la recta que pasa por $(1, a, 2)$ y $(1, 5, 4)$ sea paralela a la recta dada por $\mathbb{L} : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 5 \end{cases}$.

6. Sean $\mathbb{L} : X = \alpha.(1, -1, 3) + (0, 2, 1)$ y $P = (1, 2, -3)$.

a) Hallar una ecuación implícita del plano Π que contiene a $\mathbb{L}$ y al punto P.

b) Hallar ecuaciones implícitas de la recta $\mathbb{L}'$ perpendicular a Π que pasa por P.

c) Calcular $\mathbb{L} \cap \Pi$ y $\mathbb{L}' \cap \Pi$.

7. Si $\mathbb{L} : X = \alpha.(k^2 + 1, k, k + 7) + (0, 2, 1)$ y $\Pi : x + 2y - 3z = 2$, determinar todos los valores de k para los que $\mathbb{L}$ y Π son paralelos.

8. Sean $P = (-1, 2, 0)$, $Q = (-2, 1, 1)$ y $\mathbb{L} : X = \alpha.(0, -1, 3) + (1, 1, -1)$. Dar una ecuación del plano Π que contiene a la recta paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por P y a la recta paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por Q.

9. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1,-2,2) + (0,1,-1)$, $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(0,1,-1) + (-2,1,-1)$ y $\mathbb{L}_3 : X = \alpha.(1,3,-1) + (0,-5,0)$. Encontrar, si es posible, una recta $\mathbb{L}$ tal que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L} \neq \emptyset$, $\mathbb{L}_3 \cap \mathbb{L} \neq \emptyset$ y $\mathbb{L}$ es perpendicular a $\mathbb{L}_3$.

10. Dar una ecuación paramétrica y ecuaciones implícitas de la recta en $\mathbb{R}^3$ que está incluida en el plano coordenado xy y es perpendicular y transversal a la recta $\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1,-2,1) + (-2,0,1)$.