Práctica 5

Álgebra vectorial - Segunda parte

Versión gratuita de cortesía

Definiciones y propiedades

Norma, ángulo y producto mixto

La *norma* de un vector $\mathbf{v}$, que notaremos $\|\mathbf{v}\|$, es la longitud del vector.
Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es un vector en $\mathbb{R}^2$, su norma es la distancia entre el punto (v_1, v_2) y el origen de coordenadas $O = (0, 0)$. Por el teorema de Pitágoras, resulta ser $\|(v_1, v_2)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.
De manera análoga, la norma de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$ es $\|(v_1, v_2, v_3)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
La norma puede expresarse en función del producto escalar: $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.
A partir de esta definición, se puede calcular la *distancia entre dos puntos* P y Q (de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$): es la norma de la diferencia $P - Q$; en símbolos, $d(P, Q) = \|P - Q\|$.

Propiedades. Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son dos vectores, entonces

- $\|k\,\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (*desigualdad triangular o de Minkowski*).
- $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\|$ (*desigualdad de Cauchy-Schwarz*).

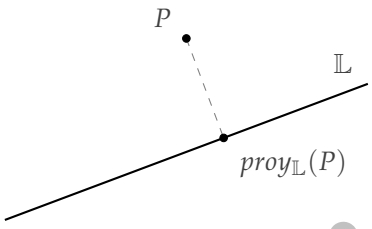
El *ángulo* entre dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es el menor de los dos ángulos determinados por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Es el único ángulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ que verifica $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{w}\|}$.

Si los puntos O, P y Q en $\mathbb{R}^3$ no están alineados, los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ determinan un paralelogramo. El área de este paralelogramo es la norma del producto vectorial $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$.

Dados tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^3$, su *producto mixto* es el número real que se obtiene al hacer el producto vectorial de los dos primeros y al resultado multiplicarlo escalarmente por el último vector; en símbolos, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.
Si los puntos O, P, Q y R en $\mathbb{R}^3$ no son coplanares, los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ determinan un paralelepípedo. El volumen de este paralelepípedo es el módulo del producto mixto entre los vectores. Este producto mixto es cero si y solo si O, P, Q y R son coplanares.

Proyección ortogonal y distancia

Dados un punto P y una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^2$, la *proyección ortogonal de P sobre $\mathbb{L}$* es el punto $proy_{\mathbb{L}}(P)$ que resulta de intersecar a la recta $\mathbb{L}$ con la recta perpendicular que pasa por P.



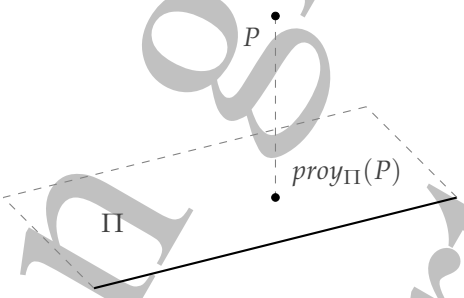
Si $\mathbb{L} : ax + by = c$, la proyección ortogonal de P se puede calcular como

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{c - P \cdot (a,b)}{\|(a,b)\|^2}\,(a,b) + P$$

y, si $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} + Q \;\; (\lambda \in \mathbb{R})$, entonces

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{(P - Q) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v} + Q.$$

Similarmente, dados un punto P y un plano Π en $\mathbb{R}^3$, la *proyección ortogonal de P sobre* Π es el punto $proy_{\Pi}(P)$ que resulta de intersecar a Π con la recta perpendicular que pasa por P.



Si $\Pi : ax + by + cz = d$, llamando $\mathbf{N} = (a,b,c)$ (vector normal a Π), se tiene que

$$proy_{\Pi}(P) = \frac{d - P \cdot \mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|^2}\,\mathbf{N} + P.$$

Si P es un punto y $\mathbb{L}$ una recta en $\mathbb{R}^3$, la proyección de P sobre $\mathbb{L}$ es la intersección de la recta con el plano perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por P. Si $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} + Q \;\; (\lambda \in \mathbb{R})$, entonces

$$proy_{\mathbb{L}}(P) = \frac{(P - Q) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v} + Q.$$

Dado un vector $\mathbf{v}$ (en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$), notaremos $proy_{\mathbf{v}}(P)$ a la proyección ortogonal de P sobre la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.\mathbf{v} \;\; (\lambda \in \mathbb{R})$. Se tiene que $proy_{\mathbf{v}}(P) = \dfrac{P \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v}$.

La *distancia entre un punto P y una recta $\mathbb{L}$ o un plano* Π es la mínima de todas las distancias entre P y los puntos de la recta o del plano. Geométricamente, se observa que el punto de la recta o del plano que está a distancia mínima de un punto P es la proyección ortogonal de P; en símbolos, $d(P,\mathbb{L}) = \|P - proy_{\mathbb{L}}(P)\|$ y $d(P,\Pi) = \|P - proy_{\Pi}(P)\|$.

Versión gratuita de cortesía.

A partir de las fórmulas para proyección ortogonal se deducen fórmulas para calcular la distancia entre un punto y una recta o entre un punto y un plano. Si $P \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{L} : ax + by = c$, entonces

$$d(P, \mathbb{L}) = \frac{|c - P \cdot (a, b)|}{\|(a, b)\|}$$

y si $P \in \mathbb{R}^3$ y $\Pi : ax + by + cz = d$, llamando $\mathbf{N} = (a, b, c)$, se tiene que

$$d(P, \Pi) = \frac{|d - P \cdot \mathbf{N}|}{\|\mathbf{N}\|}.$$

Simetrías

- *Con respecto a un punto* Q: El simétrico de un punto P con respecto a Q es el único punto en la recta que pasa por P y Q que es distinto de P y cuya distancia a Q es igual a la distancia entre P y Q.
- *Con respecto a una recta* $\mathbb{L}$: El simétrico de un punto P con respecto a una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^2$ es el único punto (distinto de P) en la recta perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por P cuya distancia a $\mathbb{L}$ es igual a la distancia entre P y $\mathbb{L}$; es decir, es el simétrico de P con respecto a $proy_{\mathbb{L}}(P)$. Similarmente, el simétrico de un punto P con respecto a una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^3$ es el simétrico de P con respecto a $proy_{\mathbb{L}}(P)$.
- *Con respecto a un plano* Π: El simétrico de un punto P con respecto a un plano Π en $\mathbb{R}^3$ es el único punto (distinto de P) en la recta perpendicular a Π que pasa por P cuya distancia a Π es igual a la distancia entre P y Π; es decir, es el simétrico de P con respecto a $proy_{\Pi}(P)$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Dados $\mathbf{v} = (3, -4)$ y $\mathbf{w} = (1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$, calcular

$$\|\mathbf{v}\|, \quad \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|, \quad \|2\mathbf{v}\|, \quad \left\|\tfrac{1}{2}\mathbf{v}\right\|, \quad \left\|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\|.$$

Ejercicio 2. Graficar en el plano el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 2\}$.

Ejercicio 3. Calcular la distancia entre los puntos dados y el ángulo entre los vectores determinados por ellos.

a) $(2, 3)$ y $(5, 1)$

b) $(1, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 1)$

Versión gratuita de cortesía.

c) $(1,0,0)$ y $(-\sqrt{2},1,1)$ *d)* $(0,-1,1)$ y $(-\sqrt{2},1,1)$

Ejercicio 4. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que

a) la norma del vector $(2,-2,k)$ es igual a 3.

b) el ángulo entre los vectores $(2,1,1)$ y $(1,-1,k)$ es $\dfrac{\pi}{3}$.

Ejercicio 5. Hallar los ángulos que forman los vectores dados con los semiejes coordenados positivos.

a) $(1,-1)$, $(-1,\sqrt{3})$ y $(1,2)$ en $\mathbb{R}^2$.

b) $(1,0,-1)$, $(0,2,0)$ y $(1,-1,2)$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 6. Para cada uno de los siguientes vectores, calcular su norma ρ y el ángulo θ que forma con el semieje positivo de las x:

$$(-1,1), \quad (0,5), \quad (1,-2), \quad (-1,2,2) \quad \text{y} \quad (0,-2,-1)$$

Ejercicio 7. Dados la norma ρ y el ángulo θ que forman los vectores con el semieje positivo de las x (medido en sentido antihorario), hallar sus coordenadas en $\mathbb{R}^2$.

a) $\rho = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ *b)* $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ *c)* $\rho = 3$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Comparar con la forma polar y la forma binómica de los números complejos.

Ejercicio 8. Para cada vector $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^2$, notamos $\theta_{\mathbf{u}}$ al ángulo que forma con el semieje positivo de las x. En cada uno de los siguientes casos, dar las coordenadas del vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$:

a) $\|\mathbf{u}\| = 4$, $\theta_{\mathbf{u}} = 0$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\theta_{\mathbf{v}} = \dfrac{2\pi}{3}$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

b) $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\theta_{\mathbf{u}} = \dfrac{\pi}{4}$, $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$, $\theta_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \dfrac{\pi}{2}$, $\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Ejercicio 9. Dar todos los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ que verifican:

a) la norma de $\mathbf{v}$ es 3 y los tres ángulos que forma con los semiejes positivos son iguales.

b) $\mathbf{v}$ pertenece al plano yz, su norma es 2 y determina un ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ con el semieje positivo de las y.

c) $\mathbf{v}$ pertenece al plano xz, su norma es 5 y determina un ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ con el semieje positivo de las z.

Versión gratuita de cortesía.

Ejercicio 10. Sabiendo que el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\frac{\pi}{3}$, $\|\mathbf{w}\| = 4$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, calcular $\|\mathbf{v}\|$.

Ejercicio 11. Dados los puntos $P = (1,-1,1)$, $Q = (2,0,3)$ y $R = (0,1,2)$, calcular el perímetro, los ángulos interiores y el área de:

a) el paralelogramo de lados PQ y PR.

b) el triángulo PQR. Decidir si es un triángulo isósceles, equilátero o escaleno.

Ejercicio 12. Dados los puntos $P = (2,3,-1)$, $Q = (1,0,2)$ y $R = (3,1,1)$, hallar un punto S en la recta que pasa por P y Q de modo que PS y PR determinen un paralelogramo de área $10\sqrt{2}$.

Ejercicio 13.

a) En cada caso, calcular el producto mixto indicado de vectores en $\mathbb{R}^3$. ¿En qué casos da cero?

$$((2,0,0) \times (0,3,0)) \cdot (0,0,4) \qquad ((-1,2,1) \times (6,1,4)) \cdot (1,3,5)$$

$$((-1,2,1) \times (6,1,4)) \cdot (-a+6b, 2a+b, a+4b) \qquad ((-1,2,1) \times (-a,2a,a)) \cdot (1,3,5)$$

b) Los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,-3)$ y $(1,2,-1)$ son cuatro de los vértices de un paralelepípedo de forma tal que el $(0,0,0)$ forma aristas con los otros tres. Encontrar los otros cuatro vértices y determinar el volumen del paralelepípedo.

c) Los puntos $(1,1,0)$, $(2,1,4)$, $(5,1,2)$ y $(3,-1,0)$ son cuatro de los vértices de un paralelepípedo de forma tal que el $(1,1,0)$ forma aristas con los otros tres. Determinar el volumen del paralelepípedo.

Ejercicio 14. Dados los puntos $O = (0,0,0)$, $P = (3,2,1)$, $Q = (1,1,2)$ y $R = (1,3,3)$, calcular:

a) el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.

b) el volumen del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$.

Ejercicio 15. Dados los puntos $O = (0,0,0)$, $P = (5,0,1)$, $Q = (3,-2,0)$ y $R = (-4,1,k)$, hallar $k \in \mathbb{R}$ de modo que:

a) los tres vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ determinen un paralelepípedo de volumen 5.

b) los puntos O, P, Q y R resulten coplanares.

Versión gratuita de cortesía.

Ejercicio 16. Dado $P = (1, 3, -5)$, encontrar el punto más cercano a P que pertenece a cada uno de los siguientes conjuntos:

a) la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, -1, 3)$.

b) el plano $\Pi : -2x + y + z = 5$.

Ejercicio 17. Hallar la proyección ortogonal de

a) $P = (5, -3)$ sobre el eje de las x y sobre el eje de las y.

b) $P = (5, -3)$ sobre la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 1)$.

c) $P = (1, 0, 2)$ sobre la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, -1, 0)$.

d) $P = (-1, 1, 0)$ sobre el plano $\Pi : 2x - 3z = 0$.

Ejercicio 18. Calcular la distancia entre

a) el punto $P = (-1, 0, 3)$ y la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2, -1)$.

b) el punto $P = (-1, 0, 2)$ y la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, -2, 0) + (0, 1, 1)$.

c) el punto $P = (1, -1, 2)$ y el plano $\Pi : 5x + 2y - z = 0$.

d) el punto $P = (0, -1, 2)$ y el plano $\Pi : -2x + y - z = 3$.

e) el punto $P = (2, 2, 1)$ y el plano que contiene a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2, -1, 3) + (3, 2, 5)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(1, 2, -1) + (1, 3, 2)$.

Ejercicio 19. Calcular la distancia entre

a) las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(2, 1) + (3, -1)$.

b) la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, -2, 1) + (0, 1, 1)$ y el plano $\Pi : x + y + z = 3$.

c) los planos $\Pi_1 : 3x + 2y - z = -2$ y $\Pi_2 : 6x + 4y - 2z = 7$.

d) las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1, 2, -1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(1, -2, 0) + (0, 1, 1)$.

Ejercicio 20. Sean $\mathbb{L} : X = \lambda.(2, 3, -1)$ y $\Pi : x + 2y = 0$. Determinar:

a) todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a distancia $\sqrt{5}$ de Π.

b) todos los puntos de $\mathbb{L}$ que están a distancia $\sqrt{5}$ de Π.

Ejercicio 21.

Versión gratuita de cortesía.

a) Determinar todos los $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tales que $proy_{(1,1)}(\mathbf{v}) = (2,2)$.

b) Calcular, si es posible, un vector $\mathbf{w}$ de norma 1 tal que $proy_{\mathbf{w}}(2,3,1) = 3\mathbf{w}$.

Ejercicio 22. Dados los vectores $\mathbf{v} = (3,-5,2)$ y $\mathbf{w} = (2,-1,2)$, hallar un vector $\mathbf{u}$ paralelo al eje z tal que $\|proy_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}+\mathbf{u})\| = 5$.

Ejercicio 23. Dados los vectores $\mathbf{v} = (3,1,0)$, $\mathbf{w} = (4,2,-1)$ y $\mathbf{u} = (2,1,-2)$, hallar todos los vectores $\mathbf{z}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{z}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$ simultáneamente y $\|proy_{\mathbf{u}}(\mathbf{z})\| = 2$.

Ejercicio 24. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(0,1,-1) + (0,-1,0)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(1,1,1) + (2,3,0)$. Hallar, si es posible, un plano Π tal que $d(P,\Pi) = 2\sqrt{6}$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$ y todo $P \in \mathbb{L}_2$.

Ejercicio 25. Sean $\Pi_1 : 3x - 2y + z = 4$ y Π_2 el plano que contiene a los puntos $P = (0,1,1)$, $Q = (3,-1,-1)$ y $R = (3,0,1)$. Hallar todos los puntos del plano Π_1 que están a distancia 2 del plano Π_2.

Ejercicio 26. Sean $\Pi_1 : 7x - 5y - 2z = 0$, $\Pi_2 : 5x - 4y - z = 0$ y $\mathbb{L}$ la recta que pasa por los puntos $P = (-2,3,-3)$ y $Q = (-1,2,-1)$. Hallar todos los planos Π que verifican simultáneamente: $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$ y $d(R,\Pi) = \sqrt{14}$ para todo $R \in \mathbb{L}$.

Ejercicio 27. Sean en $\mathbb{R}^3$ el plano $\Pi : 2x - y + 2z = 4$ y los puntos $P = (2,2,2)$ y $Q = (1,0,1)$. Determinar un plano Π' que contenga a P, a Q y al punto R de Π tal que $d(P,R) = d(P,\Pi)$.

Ejercicio 28. Encontrar el simétrico de

a) $(2,1)$ con respecto a $(0,0)$.

b) $(2,-4)$ con respecto a $(-1,1)$.

c) $(3,-1,0)$ con respecto a $(0,-1,2)$.

d) $(0,-1,0)$ con respecto a $(1,1,1)$.

Ejercicio 29. Encontrar, si es posible, un punto Q tal que

a) el simétrico de $(4,1)$ con respecto a Q es $(-2,3)$.

b) el simétrico de $(3,-1,1)$ con respecto a Q es $(0,0,0)$.

Ejercicio 30. Hallar el simétrico de

Versión gratuita de cortesía.

a) $(2,-1)$ con respecto al eje x.

b) $(2,0)$ con respecto al eje y.

c) $(3,-1)$ con respecto a la recta $y = 2x - 4$.

Ejercicio 31. En cada caso, hallar, si es posible, la recta de modo que los puntos dados sean simétricos respecto de ella.

a) $(1,3),(3,1)$

b) $(-3,4),(5,0)$

c) $(3,-4),(0,5)$

Ejercicio 32. Hallar el simétrico de

a) $(1,0,-4)$ con respecto al punto $(2,-1,0)$.

b) $(0,0,0)$ con respecto a la recta $\mathbb{L} : \lambda.(0,-1,2) + (1,1,0)$.

c) $(-1,1,2)$ con respecto al plano $\Pi : 2x + y - 3z = 2$.

Ejercicio 33. Dados $P = (-1,0,3)$ y $Q = (2,-1,0)$, hallar:

a) un punto R de modo que P y Q sean simétricos respecto de R.

b) una recta $\mathbb{L}$ de modo que P y Q sean simétricos respecto de $\mathbb{L}$.

c) un plano Π de modo que P y Q sean simétricos respecto de Π.

¿En qué casos el resultado es único?

Ejercicios surtidos

1. Demostrar las siguientes propiedades e interpretarlas geométricamente.

a) $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ si y solo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

b) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$ si y solo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. (Teorema de Pitágoras.)

2. Sea $P = (2,1,-1)$.

a) Si $\Pi : x + y - z = 3$, ¿cuál es el punto de Π a menor distancia de P?

b) Si $\mathbb{L} : X = \lambda.(1,3,1) + (2,2,0)$, ¿cuál es el punto de $\mathbb{L}$ a menor distancia de P?

3. Si $\Pi_1 : 3x + 2y - 6z = 1$ y $\Pi_2 : -3y + 4z = 3$, hallar todos los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que verifican:

Versión gratuita de cortesía.

a) $d(P, \Pi_1) = d(P, \Pi_2)$

b) $d(P, \Pi_1) = d(P, \Pi_2) = 2$

4. Sean el plano $\Pi : 2x - 2y + z = 1$ y los puntos $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (3, 2 - 1)$. Hallar todos los puntos R y S pertenecientes a Π tales que $PQRS$ es un cuadrado.

5. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(k^2 + k, k, k - 1)$, $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(4, 1, -1) + (2k, 0, 2k)$ y $\Pi : x - 2y + 2z = 3$. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $d(P, \Pi) = d(Q, \Pi)$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$ y todo $Q \in \mathbb{L}_2$.

6. Dadas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1, 2, 1) + (0, 1, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(2, -1, -2) + (1, 1, 0)$, hallar todos los planos Π tales que $\Pi \cap \mathbb{L}_2 = \emptyset$ y $d(P, \Pi) = \sqrt{2}$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$.

7. Encontrar la recta $\mathbb{L}_1$ en $\mathbb{R}^2$ que es paralela a la recta $\mathbb{L}_2$ de ecuación $y = 2x - 3$ y pasa por el simétrico de $(-2, 5)$ con respecto al punto $(1, 1)$.

8. Hallar el plano Π que es perpendicular a $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1, 2, 1) + (0, 1, 1)$ y pasa por el simétrico de $(1, 0, 1)$ con respecto a la recta $\mathbb{L}_2 : X = \alpha.(2, -1, -2) + (1, 1, 0)$.

9. Sean $P = (1, 0, 2)$ y $Q = (-5, 4, 0)$. Hallar, si es posible, una recta $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que los simétricos de P y Q con respecto a $\mathbb{L}$ sean, respectivamente, $(-1, -2, 0)$ y $(1, 4, -4)$.

10. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda(1, 2, -1) + (5, 1, 0)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda(1, 1, -1) + (0, 2, 1)$. Hallar $P_1 \in \mathbb{L}_1$ y $P_2 \in \mathbb{L}_2$ tales que la distancia entre $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ sea igual a $d(P_1, P_2)$.

Versión gratuita de cortesía.