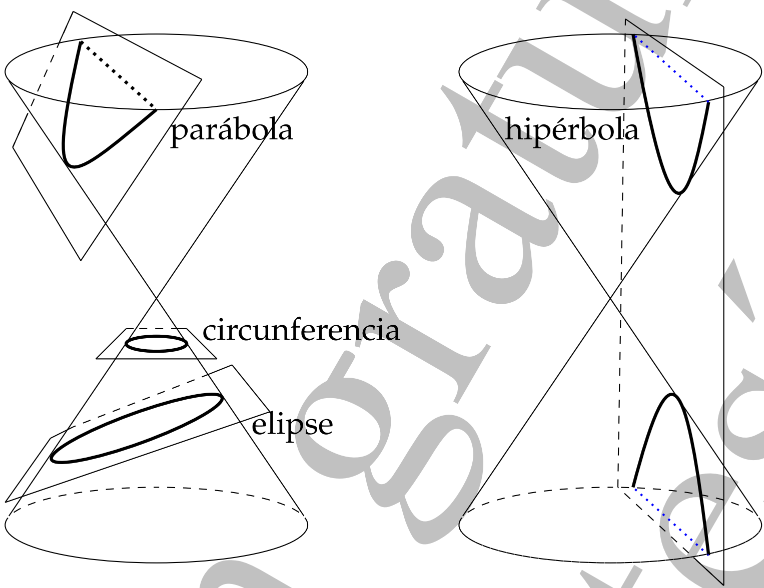
Práctica 9

Cónicas

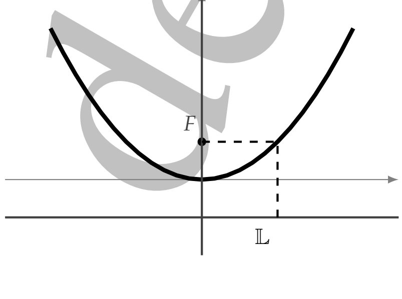
Definiciones y propiedades

Las *cónicas* son curvas planas que se obtienen intersecando un cono con un plano.



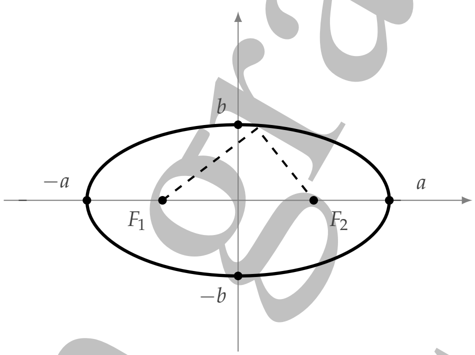
En todos los casos, pueden definirse a partir de fórmulas que involucran relaciones de distancia. Existen puntos fijos (llamados *focos*) y rectas fijas (llamadas *directrices*) tales que los puntos P de la cónica cumplen que el cociente entre la distancia de P al foco y la distancia de P a la directriz es una constante e llamada *excentricidad*.
Una *parábola* es el conjunto de todos los puntos P del plano que equidistan de un punto fijo F, el foco, y de una recta $\mathbb{L}$ que no pasa por F, la directriz.

El siguiente gráfico representa a la parábola que tiene foco $F = (0, c)$ y directriz $\mathbb{L} : y = -c$ $(c > 0)$. La ecuación es $x^2 - 4cy = 0$ (la forma canónica de la ecuación de la parábola).

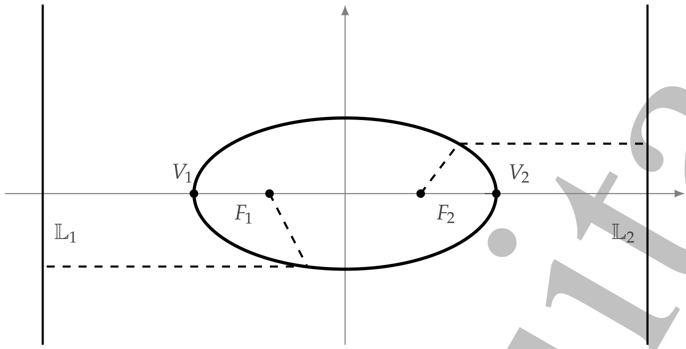


El *eje* de la parábola es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco. El *vértice* es el punto de intersección del eje con la parábola (es el punto medio entre el foco y su proyección ortogonal sobre la directriz). En la parábola del gráfico, el eje es el eje y y el vértice el $(0,0)$.
En el caso de una parábola, la relación de distancias es $\dfrac{d(P,F)}{d(P,\mathbb{L})} = 1 = e$.
La parábola es simétrica respecto de su eje.

Una *elipse* es el conjunto de todos los puntos P del plano que cumplen que la suma de las distancias de P a dos puntos F_1 y F_2, los focos, es constante $2a$, con $2a > d(F_1,F_2)$.
El siguiente gráfico representa a la elipse que tiene focos $F_1 = (-c,0)$ y $F_2 = (c,0)$ $(0 < c < a)$. La ecuación es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (la forma canónica de la ecuación de la elipse).

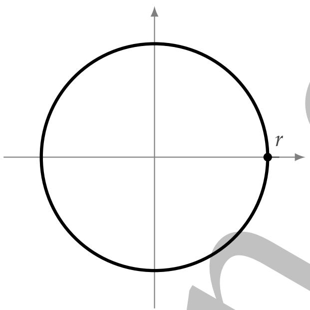


Los *vértices* de la elipse son los puntos V_1 y V_2 de intersección de la elipse con la recta que pasa por los focos. El *centro* es el punto medio entre los focos (o entre los vértices). El *eje mayor* es el segmento que une los vértices y el *eje menor* es el segmento perpendicular al eje mayor que pasa por el centro y une dos puntos de la elipse. Los *semiejes mayores* son cada uno de los segmentos que unen el centro de la elipse con los vértices y los *semiejes menores* son cada uno de los segmentos incluidos en el eje menor que unen el centro con los puntos de la elipse. En la elipse del gráfico los vértices son $V_1 = (-a,0)$ y $V_2 = (a,0)$, el centro el $(0,0)$, el eje mayor está incluido en el eje x y el eje menor en el eje y.
Si c es la distancia del centro de la elipse a uno de sus focos y a es la distancia del centro a uno de sus vértices, la excentricidad de la elipse es $e = \dfrac{c}{a}$ $(0 < e < 1)$.
Cada foco F_i $(i = 1,2)$ de la elipse tiene asociada una recta directriz $\mathbb{L}_i$ paralela al eje menor.
Cada punto P de la elipse verifica $e = \dfrac{d(P,F_i)}{d(P,\mathbb{L}_i)}$, con $i = 1,2$. En el gráfico, las directrices son $\mathbb{L}_1 : x = \dfrac{-a^2}{c}$ y $\mathbb{L}_2 : x = \dfrac{a^2}{c}$.



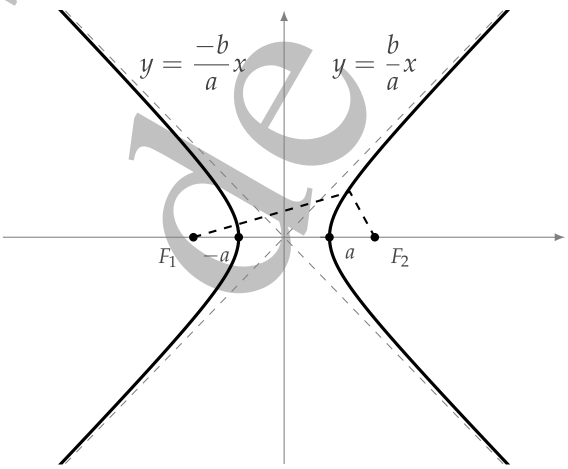
La elipse es simétrica respecto de su eje mayor y de su eje menor.

Una *circunferencia* es el conjunto de puntos P del plano que están a una distancia fija r de un punto dado C (el centro). Una circunferencia es un caso especial de elipse en el que los dos focos coinciden.
El siguiente gráfico representa una circunferencia con centro $C = (0, 0)$ y radio r.

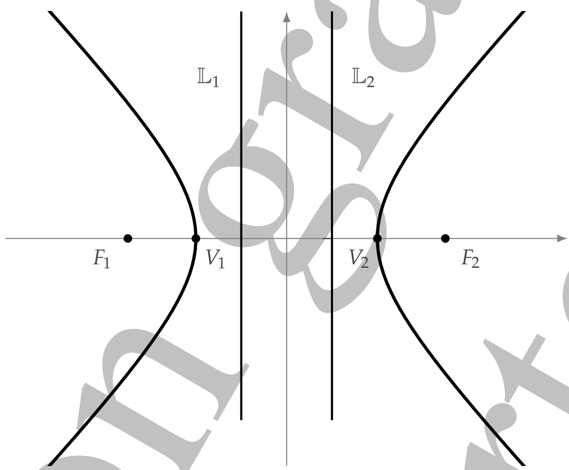


$x^2 + y^2 = r^2$, con $r > 0$.

Una *hipérbola* es el conjunto de puntos P del plano que cumplen que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos F_1 y F_2, los focos, es constante $2a$, siendo $2a < d(F_1, F_2)$.
El siguiente gráfico representa la hipérbola con focos $F_1 = (0, -c)$ y $F_2 = (0, c)$ $(c > a)$. La ecuación de esta hipérbola es $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (la forma canónica de la hipérbola).



En este gráfico, las rectas de ecuación $y = \dfrac{-b}{a}x$ e $y = \dfrac{b}{a}x$ son las *asíntotas* de la hipérbola.
Los *vértices* de una hipérbola son los puntos de intersección de la hipérbola con la recta que pasa por los focos. El *centro* es el punto medio entre los focos (o entre los vértices) y el *eje transversal o real*, el segmento que une los vértices. En el gráfico, los vértices son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$, el centro es $(0, 0)$ y el eje transversal está incluido en el eje x.
Si c es la distancia del centro de la hipérbola a uno de sus focos y a es la distancia del centro al vértice correspondiente, la excentricidad de la hipérbola es $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$.
Las directrices de la hipérbola son las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ que son perpendiculares al eje transversal y tales que cada punto P de la hipérbola verifica $e = \dfrac{d(P, F_i)}{d(P, \mathbb{L}_i)}$, con $i = 1, 2$. Si la hipérbola está dada por su ecuación canónica, las directrices son $\mathbb{L}_1 : x = \dfrac{-a^2}{c}$ y $\mathbb{L}_2 : x = \dfrac{a^2}{c}$,



La hipérbola es simétrica respecto de la recta que contiene a su eje transversal y respecto de la recta perpendicular a su eje transversal que pasa por el centro (el eje no transversal o imaginario).

Reducción a la forma canónica

La forma más general de la ecuación de segundo grado en las variables x e y es

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y + \nu = 0.$$

Para estudiar si representa una parábola, una elipse, una circunferencia o una hipérbola se aplican traslaciones o rotaciones convenientes de manera de transformar esta ecuación en otra que esté dada en forma canónica.
Si la ecuación es de la forma $\alpha x^2 + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y + \nu = 0$ $(\beta = 0)$, para eliminar los términos lineales, planteamos la traslación $(x, y) = (\overline{x} + h, \overline{y} + k)$. Si $\alpha \neq 0$, $h = \dfrac{-\lambda}{2\alpha}$, y si $\gamma \neq 0$,

$k = \dfrac{-\mu}{2\gamma}$. En el caso general de la ecuación de segundo grado, si $\beta \neq 0$, el ángulo θ que se deben rotar los ejes para eliminar el término en xy viene dado por $\operatorname{tg}(2\theta) = \dfrac{\beta}{\alpha - \gamma}$, si $\alpha \neq \gamma$, o $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, si $\alpha = \gamma$. Se plantea entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}$$

Luego de estas transformaciones se obtiene la forma canónica de la ecuación, es decir, una ecuación sin término xy, y con término lineal de una variable no nulo solo si el coeficiente del cuadrado de esa variable es cero.

En lo que sigue, llamaremos lugar geométrico al conjunto de puntos del plano que cumple con ciertas propiedades determinadas. Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos que están a distancia 1 del origen es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Hallar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas. Representarlas gráficamente.

a) $y^2 = 6x$ *b)* $x^2 = 8y$ *c)* $3y^2 = -4x$

Ejercicio 2. En cada caso, hallar la ecuación de la parábola que posee los siguientes elementos:

a) foco $(3, 0)$ y directriz $x = -3$.

b) foco $(0, 6)$ y directriz el eje x.

c) vértice $(3, 2)$ y foco $(5, 2)$.

d) vértice en el origen, eje igual al de coordenadas x y pasa por $(-3, 6)$.

e) vértice $(-2, 3)$ y foco $(1, 3)$.

Ejercicio 3. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(-2, 3)$ es igual a su distancia a la recta $x = -6$.

Ejercicio 4. Dadas las siguientes ecuaciones de parábolas, calcular las coordenadas del vértice, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

a) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$

b) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$

c) $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

Ejercicio 5. En cada caso, hallar la ecuación de una parábola que cumpla las condiciones indicadas:

a) tiene eje paralelo al eje x y pasa por los puntos $(3,3)$, $(6,5)$ y $(6,-3)$.

b) tiene eje vertical y pasa por los puntos $(4,5)$, $(-2,11)$ y $(-4,21)$.

c) su vértice está sobre la recta $2y - 3x = 0$, su eje es paralelo al eje x y pasa por los puntos $(3,5)$ y $(6,-1)$.

Ejercicio 6. El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 metros y están separados una distancia de 500 metros, quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 metros sobre la calzada del puente. Tomando como eje x la horizontal que define el puente, y como eje y el de simetría de la parábola, hallar la ecuación de ésta. Calcular la altura de un punto situado a 80 metros del centro del puente.

Ejercicio 7. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(2,-1)$ sea igual a 5. ¿Qué figura representa?

Ejercicio 8. Caracterizar la figura que se obtiene al aplicarle a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ las siguientes transformaciones:

a) la contracción en la dirección y de factor $\dfrac{1}{2}$.

b) la transformación lineal cuya matriz es $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9. Para cada una de las siguientes elipses, hallar la longitud del semieje mayor, la longitud del semieje menor, las ecuaciones de las directrices, las coordenadas de los focos y la excentricidad.

a) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ *b)* $9x^2 + 16y^2 = 576$ *c)* $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{12} = 1$

Ejercicio 10. En cada caso, hallar la ecuación de la elipse que satisface las condiciones indicadas:

a) focos $(4, 0)$ y $(-4, 0)$; vértices $(5, 0)$ y $(-5, 0)$.

b) focos $(0, 8)$ y $(0, -8)$; vértices $(0, 17)$ y $(0, -17)$.

c) focos $(0, 6)$ y $(0, -6)$; semieje menor de longitud 8.

d) focos $(5, 0)$ y $(-5, 0)$; excentricidad $\frac{5}{8}$.

Ejercicio 11.

a) Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos fijos $(3, 1)$ y $(-5, 1)$ es igual a 10.

b) Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(3, 2)$ es la mitad de la correspondiente a la recta $x = -2$.

Ejercicio 12. Hallar la ecuación de la elipse

a) de centro el origen, focos en el eje x y que pasa por los puntos $(-3, 2\sqrt{3})$ y $(4, \frac{4\sqrt{5}}{3})$.

b) de centro $(4, -1)$, uno de los focos en $(1, -1)$ y que pasa por el punto $(8, 0)$.

c) de centro $(3, 1)$, uno de los vértices en $(3, -2)$ y excentricidad $e = \frac{1}{3}$.

d) con uno de sus focos el punto $(-1, -1)$, directriz $x = 0$, y excentricidad $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio 13. Dada la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$, hallar las coordenadas del centro, la longitud del semieje mayor y del semieje menor y los focos.

Ejercicio 14. Un arco de 80 metros de luz tiene forma de media elipse (el semieje tiene longitud 80 metros). Sabiendo que su altura es de 30 metros, hallar la altura del arco en un punto situado a 15 metros del centro.

Ejercicio 15. La órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el Sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse mide $148,5$ millones de kilómetros y que la excentricidad vale $0,017$, hallar las distancias máxima y mínima de la Tierra al Sol.

Ejercicio 16.

a) Calcular el área de las elipses del ejercicio 8.

b) Calcular el área de las elipses del ejercicio 10.

Ejercicio 17. Hallar las coordenadas de los vértices y de los focos, las ecuaciones de las directrices, las ecuaciones de las asíntotas y la excentricidad de las siguientes hipérbolas:

a) $9x^2 - 16y^2 = 144$

b) $49y^2 - 16x^2 = 784$

Ejercicio 18. Hallar las ecuaciones de las hipérbolas que satisfacen las condiciones siguientes:

a) el eje transversal de longitud 8 y focos $(5, 0)$ y $(-5, 0)$.

b) centro $(0, 0)$, un foco $(8, 0)$ y un vértice $(6, 0)$.

Ejercicio 19. En cada caso, hallar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen las condiciones indicadas:

a) el valor absoluto de la diferencia de las distancias a los dos puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$ es igual a 5.

b) la distancia al punto $(0, 6)$ es igual a $\frac{3}{2}$ de la correspondiente a la recta $y = \frac{8}{3}$.

c) el valor absoluto de la diferencia de las distancias a los puntos $(-6, -4)$ y $(2, -4)$ es igual a 6.

Ejercicio 20. En cada caso, hallar la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones indicadas:

a) tiene centro el origen, ejes sobre los ejes de coordenadas y pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(9, 5)$.

b) tiene vértices $(6, 0)$ y $(-6, 0)$ y asíntotas $6y = 7x$ y $6y = -7x$.

Ejercicio 21. Hallar el centro, los vértices, los focos y las ecuaciones de las asíntotas y representar gráficamente la hipérbola de ecuación $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.

Ejercicio 22. En cada uno de los siguientes casos, por medio de una traslación, transformar la ecuación dada en otra sin términos de grado 1 y caracterizar la figura que representa.

a) $y^2 - 6y - 4x + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

c) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y - 4 = 0$

d) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y - 20 = 0$

e) $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$

f) $x^2 + 5y^2 + 2x - 20y + 25 = 0$

Ejercicio 23. Deducir la ecuación de la parábola $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ cuando se giran los ejes un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$.

Ejercicio 24. Hallar el ángulo de rotación de ejes necesario para eliminar el término en xy de la ecuación $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$. Deducir la ecuación que se obtiene al hacer esta rotación y caracterizar la cónica.

Ejercicio 25. Decidir qué tipo de cónica define cada una de las siguientes ecuaciones haciendo, si es necesario, traslaciones y rotaciones.

a) $xy - 1 = 0$

b) $2xy - x + y - 5 = 0$

c) $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$

d) $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 1 = 0$

e) $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - (14 + 6\sqrt{3})x + (26 + 6\sqrt{3})y + 4 - 6\sqrt{3} = 0$

f) $9x^2 + 4xy + 6y^2 + 12x + 36y + 44 = 0$

Ejercicio 26. En cada caso, hallar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos dados y caracterizarla.

a) $(0,3)$, $(3,0)$, $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$ y $(-3,0)$.

b) $(1,6)$, $(-3,-2)$, $(-5,0)$, $(3,4)$ y $(0,10)$.

Ejercicios surtidos

1. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

a) la cónica $x^2 - 2ky^2 + 3kx + 16y - 23 = 0$ es una hipérbola con centro en $(-3,2)$. Para el valor hallado, encontrar la forma canónica.

b) la cónica $25x^2 - 2k^3y^2 - 50k^2x + 12k^3y + 144 = 0$ es una elipse con centro en $(4,3)$.

2. Dada la cónica $kx^2 + 2xy + ky^2 + 2x + 2y + k = 0$,

a) clasificar la cónica de acuerdo a los distintos valores de k.

b) hacer un estudio completo de la cónica cuando $k = 0$.

3. Dada $\mathbb{L} : 3x - 8y = 7$, encontrar todas las rectas paralelas a $\mathbb{L}$ que intersecan a la elipse de ecuación $x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ en un solo punto.

4. Encontrar los puntos de intersección de las parábolas de ecuación $x^2 - 4y = 0$ y $x^2 - 6x + 2y - 30 = 0$.

5. Hallar los puntos de intersección de la elipse $x^2 + 3y^2 = 73$ y la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$. Graficar.

6. En cada uno de los siguientes casos, encontrar todos los puntos de intersección de las cónicas:

a) $x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0$ y $x^2 - y^2 - 9 = 0$

b) $4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 9 = 0$ y $2x^2 - 3y^2 + 4x + 18y - 43 = 0$

7. En cada uno de los siguientes casos, encontrar todos los puntos de intersección de las cónicas:

a) $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$; $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 5 = 0$ y $x^2 + y^2 - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 5 = 0$; $x^2 + y^2 - 3x - y = 0$ y $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y = 0$