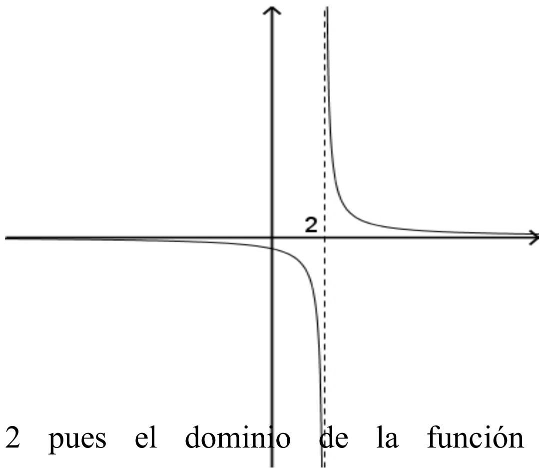
Práctica 4 – Parte 2

Continuidad

1. Idea de continuidad

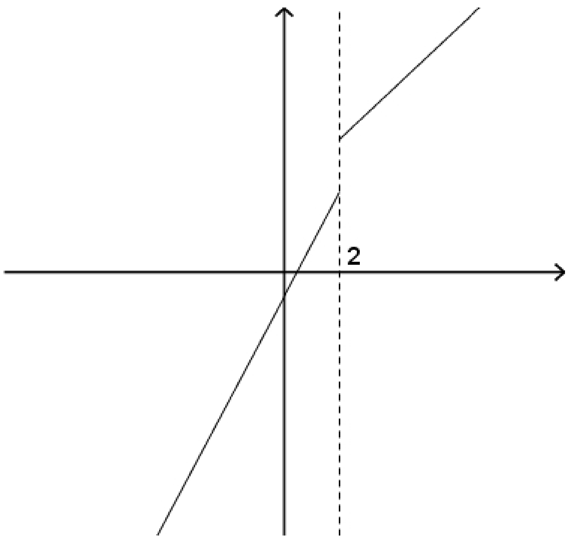
Intuitivamente una función es continua en un punto $x = a$ si está definida en dicho punto y su gráfico puede dibujarse sin tener que levantar el lápiz del papel. Para visualizar este concepto, consideremos las siguientes funciones reales en $x = 2$:

$$f_1(x) = \frac{3}{x-2}$$



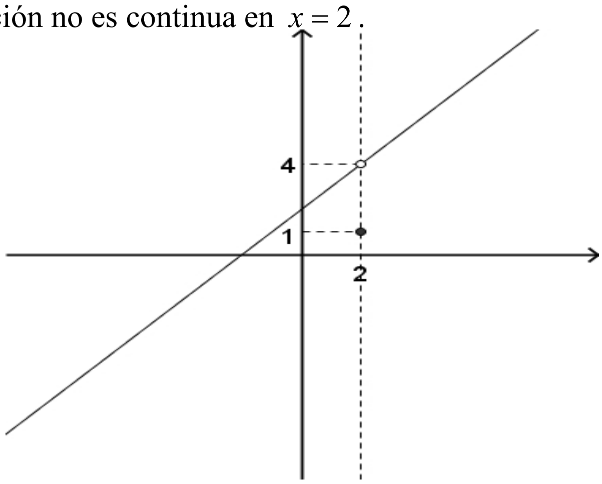
La función $f_1(x) = \dfrac{3}{x-2}$ no está definida en 2 pues el dominio de la función es $Dom f(x) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Por lo visto al estudiar límite de funciones, sabemos que $\lim_{x \to 2} f_1(x) = \infty$ y observamos que al dibujarla hay que levantar el lápiz del papel, con lo cual intuimos que esta función no es continua en $x = 2$.

$$f_2(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x > 2 \\ 2x-1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$



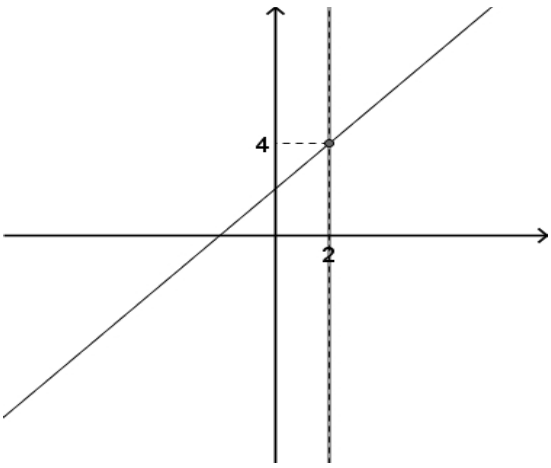
La función $f_2(x)$ está definida en 2 y $f_2(2)=5$, o sea, el punto $(2,5)$ está en el gráfico de $f_2(x)$, pero para dibujarla hay que levantar el lápiz, la función da un salto. Al aproximarse a 2 por la izquierda, la función se acerca a 3, es decir, $\lim\limits_{x\to 2^-} f_2(x)=3$; sin embargo al acercarnos por la derecha se acerca a 5: $\lim\limits_{x\to 2^+} f_2(x)=5$. Los límites laterales no coinciden, entonces $\lim\limits_{x\to 2} f_2(x)$ no existe, sospechamos que la función no es continua en $x=2$.

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 1 & \text{si } x=2\end{cases}$$



La función $f_3(x)$ está definida en 2 y $f_3(2)=1$, es decir, el punto $(2;1)$ está en el gráfico de la función pero al acercarnos al 2 la función se acerca a 4, es decir, $\lim\limits_{x\to 2} f_3(x)=4$. El valor de la función no coincide con el límite. Acá, también vemos que la función no es continua.

$$f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 4 & \text{si } x=2\end{cases}$$



La función $f_4(x)$ está definida en 2 y $f_4(2)=4$,o sea, el punto $(2;4)$ está en el gráfico de la función, y al aproximarse a 2 la función se acerca a 4, es decir, $\lim\limits_{x\to 2} f_4(x)=4$. Los valores de la función y del límite en $x=2$ coinciden. Se puede dibujar la función sin levantar el lápiz del papel.

Conclusión: la función $f_4(x)$ es continua, las otras no lo son.

Esto nos hace notar que el concepto de *continuidad* está estrechamente ligado al concepto de *límite*. Empecemos definiendo la continuidad de una función en un punto y, después, veremos continuidad en un intervalo y sus consecuencias.

Definición. Una función f es ***continua*** en $x = a$**,** si :

1) Existe $f(a)$, es decir, $a \in Dom(f)$**.**
2) Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$, es decir, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \in \mathbb{R}$.
3) El límite y el valor de la función coinciden, es decir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Al volver a los ejemplos, podemos afirmar que $x = 2$:

La función $f_1(x)$ es discontinua porque no cumple la condición 1).

La función $f_2(x)$ es discontinua porque no cumple la condición 2).

La función $f_3(x)$ es discontinua porque no cumple la condición 3), esta se conoce como discontinuidad ***evitable.***

La función $f_4(x)$ resulta continua.

2. Funciones continuas

Una función es ***continua*** si lo es en cada punto de su dominio.

Ejemplo. $f(x) = x$ es continua para todo punto de su dominio. $Domf = \mathbb{R}$.

Una función es continua en un intervalo, si lo es en cada punto de dicho intervalo.

Ejemplo. $g(x) = \sqrt{2x - 8}$ definida en el intervalo $4 \le x \le 12$ es continua.

La suma de funciones continuas es continua, así como también, el producto y el cociente donde el denominador es no nulo.

Ejemplos. $h(x)=f(x)+g(x)=x+\sqrt{2x-8}$ para $x\geq 4$ porque el dominio de $g(x)$
$k(x)=f(x).g(x)=x.\sqrt{2x-8}$ también resulta continua.

Como la función $f(x)=x$ es continua y una función polinómica es una combinación de productos y sumas de estas, todas las funciones polinómicas son continuas.

Ejemplo. $f(x)=x^3-3x^2+2x-4$ es una función polinómica, por lo cual es continua.

Las funciones $\operatorname{sen}(x), \cos(x), e^x$ y $\ln(x)$ son continuas en su dominio.

A las funciones que no son continuas, se las llama ***discontinuas***. Hay discontinuidades como las del ejemplo $f_1(x)=\dfrac{3}{x-2}$ donde no se puede redefinir la función y no se puede evitar pero otras si son evitables.

2.1 Discontinuidades evitables

La función $f(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$ no está definida en $x=5$ (se anula el denominador).

Con esto alcanza (condición 2) de la definición) para decir que f no es continua en ese punto (es decir, $f(x)$ es *discontinua* en $x=5$).

Sin embargo:

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}\,\frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3}=\lim_{x\to 5}(\sqrt{x+4}+3)=6$$

(La situación es similar a $f_3(x)$, ver su gráfico)

Como existe el límite de la función en $x=5$ y es igual a 6, "redefinimos" la función f "agregando" de esta manera el valor del límite en $x=5$ (obtenemos una función continua).

La nueva función $g(x)$ definida así:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} & \text{si} \quad -4\leq x \,,\; x\neq 5\\ 6 & \text{si} \quad x=5\end{cases}$$ es continua en $x=5$.

Ejercicio 1. Decidir si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 4 & \text{si } x=2\end{cases}$ es continua en $x=2$.

Solución

Para ver si la función es continua, debemos calcular el límite en $x=2$, reemplazando $x^2-4=(x-2)(x+2)$ y simplificando $x-2$, obtenemos $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}x+2=4$.

Como el límite coincide con el valor de la función en el punto, podemos afirmar que $f(x)$ es continua en $x=2$.

Ejercicio 2. Decidir si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{3x-3} & \text{si} \quad x>1\\ \dfrac{x}{6} & \text{si} \quad x\leq 1\end{cases}$ es continua en $x=1$.

Solución

Para ver si la función es continua debemos calcular el límite en $x=1$, pero como es una función partida debemos calcular los límites laterales en $x=1$.

Calculemos $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$, por la definición de la función, esto es igual a $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

Calculemos $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$, por la definición de la función, esto es igual a $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{3x-3}$.

Para calcular este límite, multiplicamos y dividimos por el conjugado de $\sqrt{x}-1$ o sea, $\sqrt{x}+1$, el producto da $x-1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{3(x-1)}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ y queda así $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{3(x-1)\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{6}$.

Entonces como los límites laterales coinciden, decimos que $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{6}$ y coincide con el valor de la función en el punto. Podemos afirmar que $f(x)$ es continua en $x=1$.

Ejercicio 3. Decidir si $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{si } x>0\\ x+3 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$ es continua en $x=0$.

Solución

Para ver si la función es continua, debemos calcular el límite en $x=0$ y ver si coincide con el valor de la función en dicho punto.

Al ser una función partida, tenemos que calcular los límites laterales y ver que coinciden.

Calculemos $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{sen(3x)}{x}$.

Recordemos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{ax} = 1$, lo utilizamos para calcular este límite, y al multiplicar numerador y denominador por 3 queda $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{sen(3x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3sen(3x)}{3x} = 3$.

Luego, calculemos $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+3 = 3$.

Como $f(0)=3$ y como los límites laterales coinciden con el valor de la función, podemos afirmar que la función $f(x)$ es continua en $x=0$.

Ejercicio 4. Hallar a para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4} & \text{si} \quad x>9 \\ 3a^2 & \text{si} \quad x\le 9 \end{cases}$

sea continua en $x=9$.

Solución

Por la condición 3), es necesario que $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = f(9) = 3a^2$.

Evaluamos el límite lateral de la función en $x=9$, o sea, $\lim\limits_{x\to 9^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 9^+} \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}$

multiplicando por los conjugados del numerador y del denominador obtenemos

$$\lim_{x\to 9^+} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}\right)\left(\frac{\sqrt{x+7}+4}{\sqrt{x+7}+4}\right)$$

y como $\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)=x-9$ y $\left(\sqrt{x+7}-4\right)\left(\sqrt{x+7}+4\right)=x-9$

obtenemos $\lim\limits_{x\to 9^+} \dfrac{(x-9)}{(x-9)}\left(\dfrac{\sqrt{x+7}+4}{\sqrt{x}+3}\right) = \lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{\sqrt{x+7}+4}{\sqrt{x}+3}\right) = \dfrac{4}{3}$.

Para que f sea continua, el límite debe coincidir con el valor de la función que es $3a^2$, es decir que $\dfrac{4}{3}=3a^2$, por lo tanto, $a^2=\dfrac{4}{9}$,o sea, $|a|=\dfrac{2}{3}$.

La función resulta continua para $\boxed{a=\frac{2}{3}, a=-\frac{2}{3}}$.

2.2 Propiedades de las funciones continuas

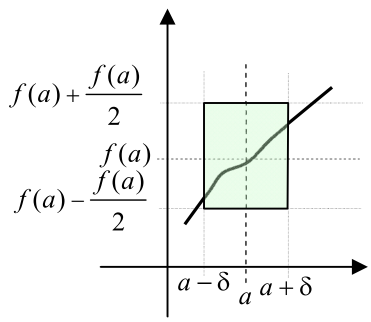
Como consecuencia directa de la definición, las funciones continuas tienen las siguientes propiedades:

Conservación de signo. Si una función f es continua en $x=a$ y $f(a)>0$, entonces, f permanece positiva "cerca de *a*" (o negativa si $f(a)<0$).

Acotación en un entorno. Si una función f es continua en $x=a$, entonces, $f(x)$ está acotada superior e inferiormente "cerca de *a*" (ver gráfico).

Demostración:

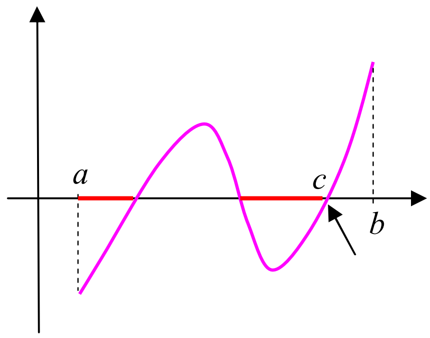
En la definición de límite de una función en un punto, como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, si $\varepsilon=\frac{f(a)}{2}$, mirar "fijo" el gráfico, se obtienen los dos resultados:



1) $f(x)>0$ si $a-\delta<x<a+\delta$.

2) $f(x)$ está acotada en $a-\delta<x<a+\delta$.

Teorema de Bolzano. Si $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ es una función continua, tal que $f(a)<0$ y $f(b)>0$ (o al revés) entonces existe $c\in(a;b)$ tal que $f(c)=0$



Demostración :

Consideremos el conjunto

$$A=\{x\in[a,b]:f(x)<0\}$$ (en el gráfico es el pintado de rojo).

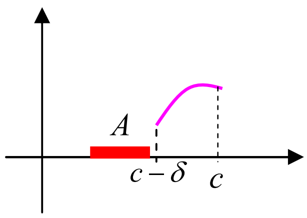
Observemos que A está acotado ($A\subset[a;b]$), $A\neq\varnothing$ ($a\in A$)

Entonces, existe el supremo $A = c$, probaremos que $f(c)=0$.

Para ello, descartamos las otras dos posibilidades.

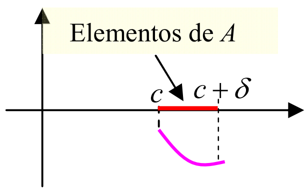
Si fuera $f(c)>0$:

Entonces $a<c\leq b$. Por la conservación del signo, $f(x)>0$ en $(c-\delta;c]$ para algún δ suficientemente chico. Luego, el conjunto A está “a la izquierda” de $c-\delta$. En otras palabras, $c-\delta$ es una cota superior (menor que c) del conjunto A. Pero esto <u>contradice</u> que c es la menor de las cotas superiores de A.



Si fuera $f(c)<0$:

Entonces $a\leq c<b$. Por la conservación del signo, $f(x)<0$ en $[c;c+\delta)$. Por lo tanto el intervalo $(c;c+\delta)\subset A$. Es decir, hay elementos de A “a la derecha” de c. Pero, esto <u>contradice</u> que c es cota superior de A.



Luego $f(c)=0$.

Ejercicio 5. Dada la ecuación $x^3-4x+1=0$ demostrar que tiene una solución en el intervalo $[0;1]$.

Solució:

La función $f(x)=x^3-4x+1$ es continua.

Además, $f(0)=1>0$ y $f(1)=1-4+1=-2<0$.

El Teorema de Bolzano asegura que existe $c\in(0;1)$ tal que $f(c)=0$.

Es decir, en el intervalo $(0,1)$ tenemos una solución de $x^3-4x+1=0$.

Ejercicio 6. Hallar el conjunto de positividad de la función $f(x)=x^3-x^2-2x$.

Solución

La función $f(x)=x^3-x^2-2x$ es continua.

Al sacar factor x común $f(x)=x\left(x^2-x-2\right)$ y resolver la cuadrática, obtenemos **todos** los ceros de $f(x)=x(x+1)(x-2)$ que son $x=0, x=-1, x=2$.

El teorema de Bolzano nos asegura que: entre 2 ceros de la función ella se mantiene toda positiva o toda negativa con lo que basta estudiar el signo de f en los intervalos

$$(-\infty;-1),(-1;0),(0;2),(2;+\infty)$$

Como $f(-2)=-8<0$ entonces $f<0$ en el intervalo $(-\infty;-1)$.

Como $f(-0,5)=\dfrac{5}{8}>0$ entonces $f>0$ en el intervalo $(-1;0)$.

Como $f(1)=-2<0$ entonces $f<0$ en el intervalo $(0;2)$.

Como $f(3)=12>0$ entonces $f>0$ en el intervalo $(2;+\infty)$.

$f(-2)$	$f(-0,5)$	$f(1)$	$f(3)$
negativo	positivo	negativo	positivo

Luego, el conjunto de positividad de f es $A=\{x\,/\,f(x)>0\}=(-1;0)\ \cup\ (2;+\infty)$.

Ejercicio 7. Demostrar que la ecuación $x^2=\sqrt{x+1}$ tiene una solución en el intervalo $(1;2)$.

Solución

Llamemos $f(x)=x^2-\sqrt{x+1}$ .Es fácil ver que la función f es continua en el intervalo $[1;2]$.

Al evaluar la función en los extremos del intervalo, obtenemos que $f(1)=-1<0$ y que $f(2)=4-\sqrt{3}>0$.

El teorema de Bolzano nos asegura que hay un punto $c \in (1;2)$ donde $f(c) = 0$, con lo cual $x^2 - \sqrt{x+1} = 0$ para algún $x \in (1;2)$,es decir, la ecuación $x^2 = \sqrt{x+1}$ tiene una solución en el intervalo $(1,2)$.

Ejercicio 8. Hallar en forma aproximada, con un decimal exacto, una solución de la ecuación: $x^5 + 5x^2 - 2 = 0$.

Solución

Consideremos la función $f(x) = x^5 + 5x^2 - 2$, que es continua.

Además $f(0) = -2 < 0$ y $f(1) = 1 + 5 - 2 = 4 > 0$.

El teorema de Bolzano asegura que existe $c \in (0;1)$ tal que $f(c) = 0$. Es decir, en el intervalo $(0;1)$ tenemos una solución de $x^5 + 5x^2 - 2 = 0$. En consecuencia, la parte entera de c es 0 (porque está entre 0 y 1). Para encontrar el primer decimal, estudiamos el signo de $f(0,1); f(0,2)$...etc. hasta $f(0,8)$ y vemos en qué intervalo cambia de signo. Haciendo esto se obtiene

$f(0,1)$	$f(0,2)$	$f(0,3)$	$f(0,4)$	$f(0,5)$	$f(0,6)$	$f(0,7)$	$f(0,8)$
negativo	negativo	negativo	negativo	negativo	**negativo**	**positivo**	positivo

Usamos el teorema de Bolzano en el intervalo $[0,6;0,7]$. En este intervalo, la función f pasa de negativo a positivo, entonces existe un c en ese intervalo tal que $f(c) = 0$. Por estar allí, se tiene que $c \simeq 0,6...$

El teorema de Bolzano es un teorema de existencia. Vemos en este ejemplo, que con solo saber que existe, tenemos una “receta” (*algoritmo*) que permite encontrar la solución con la precisión que se quiera.

El teorema de Bolzano se generaliza fácilmente al teorema de valores intermedios.

Teorema de los valores intermedios. Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, si y es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe $c \in (a;b)$ tal que $f(c) = y$.

Para ilustrar la potencia de este resultado, planteamos un curioso problema.

Problema. Un automovilista sale de la ciudad A a las 12 hs y llega a la ciudad B a las 16 hs tardando exactamente 4 horas en recorrer los 400 kilómetros que separa una ciudad de la otra. En esas cuatro horas se pudo haber detenido un rato, ir muy despacio o ir muy rápido.
Demostrar que, cualquiera haya sido el caso, existe un intervalo de una hora comprendida entre las 12 hs y las 16 hs donde recorrió exactamente 100 kilómetros.

Solución

Llamemos $f(t)$ a la cantidad de kilómetros que lleva recorridos a la hora t. Así $f(12)=0$ y $f(16)=400$. Asumimos que la función f es continua.

Consideremos, ahora, la función continua $g(t)=f(t+1)-f(t)$ definida para $12\le t\le 15$. La función g mide la cantidad de kilómetros recorridos entre la hora t y la hora $t+1$. Para resolver el problema, bastaría saber que existe un instante $t_0\in(12,15)$ tal que $g(t_0)=100$. Veamos que el Teorema de los Valores Intermedios puede venir en nuestra ayuda. Se tiene que

$$g(12)=f(13)-f(12)$$

$$g(13)=f(14)-f(13)$$

$$g(14)=f(15)-f(14)$$

$$g(15)=f(16)-f(15)$$

Si se suman estos cuatro números, se obtiene:

$$g(12)+g(13)+g(14)+g(15)=f(16)-f(12)=400$$

En consecuencia los cuatro números no pueden ser todos menores que 100 porque, si así fuera, su suma no llegaría a 400. De la misma manera, no pueden ser todos mayores que 100 porque, en tal caso, su suma sería mayor que 400. Entonces alguno de los cuatro tiene que ser menor o igual que 100 y algún otro tiene que ser mayor o igual que 100. (por ejemplo $g(13)\le 100$ y $g(15)\ge 100$ o cualquier otro).

El teorema de los valores intermedios nos asegura que entre esos dos instantes (entre las 13 hs y las 15 hs) hay un instante t_0 tal que $g(t_0)=100$.

No sabemos cuál es ese instante, pero sí sabemos que existe tal instante.

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Continuidad, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.