Práctica 10 – Parte 2

Ecuaciones Diferenciales

Si un fenómeno está representado por una función *f*, la derivada de *f* representa la *variación* de tal fenómeno. Así por ejemplo, si $y = f(t)$ representa la posición de un móvil en función del tiempo *t*, la función derivada $f'(t)$ representa la *velocidad* del móvil en cada instante *t*.

Cuando se estudia un fenómeno, es habitual analizar la variación del mismo y establecer leyes o regularidades observables en tales variaciones. Estas leyes o regularidades devienen en ecuaciones donde naturalmente, aparece la función *f* que describe el fenómeno y su derivada que describe la variación del fenómeno. A estas ecuaciones donde la incógnita es la función f y en la que aparece ella y sus derivadas, se las llama ***ecuaciones diferenciales***.

Fenómenos generales tales como el calor, el sonido, la luz y la electricidad, son descriptos por ecuaciones diferenciales. Obtener la solución de tales ecuaciones o por lo menos, propiedades cualitativas de la solución, es objeto de estudio en todas las disciplinas científicas.

El desarrollo de técnicas y métodos para resolver ecuaciones diferenciales es un capítulo importante de la matemática y aparecerá con frecuencia en diferentes materias de la carrera. En todos ellos el Teorema Fundamental del Cálculo juega un papel esencial.

En este curso sólo damos algunos ejemplos que se pueden resolver sin necesidad de desarrollar técnicas especiales de cálculo.

1. La integral como herramienta de cálculo

La idea básica que usamos para resolver ecuaciones diferenciales se apoya en el siguiente hecho elemental:

Si dos funciones son iguales, $g(x) = h(x)$ en $[a,b]$ entonces

$$\int_a^x g(t)dt = \int_a^x h(t)dt \ , \ a \le x \le b \qquad \text{(A)}$$

También es cierto, evidente y útil que primitivas de *g* y de *h* difieren a lo sumo en una constante. Es decir, si $G(x)$ y $H(x)$ son primitivas de de g y de h respectivamente, vale

$$G(x) = H(x) + C \qquad \text{(B)}$$

Usaremos (A) o (B) indistintamente, según convenga.

Ejemplo. Hallar una función f que satisfaga satisfaga la ecuación diferencial

$$f^2(x) f'(x) - \sqrt{2x-1} = 0$$

con la ***condición inicial*** $f(1) = 2$

Que nos permitirá determinar la constante C

Solución

Por las limitaciones del dominio de la raíz cuadrada, a priori, podemos decir que la igualdad

$$f^2(x) f'(x) = \sqrt{2x-1}$$

vale para $x \geq \frac{1}{2}$. En este rango de valores, el conjunto de primitivas de cada miembro de la igualdad, coinciden (ver (A)). Es decir

$$\int f^2(x) f'(x) dx = \int \sqrt{2x-1} dx$$

Calculamos cada integral por separado.

Por un lado:

$$\int \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} t^{3/2} + C_1 = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-1)^3} + C_1$$

$$t = 2x - 1$$
$$dt = 2dx$$
$$dx = \frac{1}{2} dt$$

Por otro lado

$$\int f^2(x)f'(x)dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C_2 = \frac{1}{3}f^3(x) + C_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= f(x) \\ du &= f'(x)dx \end{aligned}}$$

Igualamos ambas primitivas y unificamos en una sola constante

$$\frac{1}{3}f^3(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3} + C_3$$

o bien

$$f^3(x) = \sqrt{(2x-1)^3} + 3C_3 = \sqrt{(2x-1)^3} + C$$

Es un buen momento para calcular el valor de la constante C usando la condición inicial:

$$2^3 = f^3(1) = 1 + C$$

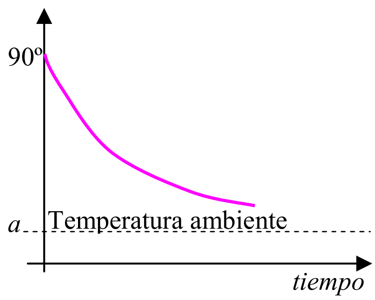
de donde $C = 7$. Despejamos f para obtener su fórmula

$$\boxed{f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{(2x-1)^3} + 7}} \;,\; \boxed{f : [\tfrac{1}{2}, +\infty) \to \mathbb{R}}$$

2. ¿Cómo se deduce una ecuación diferencial?

2.1 La ley de enfriamiento de Newton

Todos sabemos por experiencia, que si calentamos el agua para el mate a unos 90º aproximadamente y la dejamos reposar, ésta se va enfriando hasta llegar a la temperatura ambiente.



Newton, que no tomaba mate, observó que este hecho era general y que la ve*locidad* o *variación* de la temperatura es proporcional al tiempo transcurrido y también proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto que se está enfriando (el agua en este caso) y la temperatura ambiente.

Si $f(t)$ es la temperatura del objeto en el instante t y a es la temperatura ambiente, la observación de Newton se traduce en la ecuación

$$f(t+h)-f(t)=-Kh(f(t)-a)$$

El signo menos es porque el miembro izquierdo es negativo

La constante de proporcionalidad $K>0$ tiene que ver con la capacidad de conducir el calor (conductividad) del objeto.

Si dividimos por h y tomamos límite cuando $h\to 0$ obtenemos la ecuación de enfriamiento de Newton

$$f'(t)=-K(f(t)-a)$$

Hemos supuesto que la temperatura ambiente es constante para que la ecuación resultante esté a nuestro alcance de poder ser resuelta. Pero a puede ser una función del tiempo.

Resolución de la ecuación de enfriamiento de Newton. Supongamos que un cuerpo que estaba a 37º se está enfriando en una habitación que se encuentra a 22º. A las 4 AM el cuerpo tiene una temperatura de 32º y a las 5 AM la temperatura es de 30º. Determinar a qué hora estaba a 37º.

Solución

Llamaremos $f(t)$ a la temperatura del cuerpo en el instante t y tomaremos como tiempo cero a las 4 AM. Si el tiempo se mide en horas los datos del problema se traducen en:

$$f(0)=32 \ , \ f(1)=30 \ , \ a=22$$

El problema pregunta: ¿para qué instante t_0 resulta $f(t_0)=37$?

Notar que el dato $f(0)=32$ juega el papel de **condición inicial**. Como desconocemos el valor de la constante K de la ecuación de Newton, el dato en $t=1$ servirá para calcular su valor.

Esta es la técnica que usaremos en el curso

Para resolver la ecuación la escribimos agrupando todo lo que involucra a f en un mismo miembro:

$$\frac{f'(t)}{f(t)-a}=-K$$

Usaremos la estrategia que llamamos (A) para integrar esta igualdad.

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)-a}\,dt = \int_0^x (-K)\,dt$$

El 0 no es un capricho, es el de la condición inicial.

El segundo miembro es una constante fácil de integrar:

$$\int_0^x (-K)\,dt = -Kx$$

Para calcular la integral del primer miembro usamos el método de sustitución

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)-22}\,dt = \int_{10}^{f(x)-22} \frac{du}{u} = \ln|u|\Big|_{10}^{f(x)-22} = \ln\left(\frac{f(x)-22}{10}\right)$$

$$\begin{aligned} &u = f(t)-22 \\ &du = f'(t)dt \\ &t = 0 \Rightarrow u = f(0)-22 = 10 \\ &t = x \Rightarrow u = f(x)-22 \end{aligned}$$

Cuando cambiamos variables y límites de integración, no hay que volver a la variable anterior

Entonces

$$\ln\left(\frac{f(x)-22}{10}\right) = -Kx \qquad (*)$$

Es un buen momento para determinar el valor de K usando el dato $f(1)=30$. Cuando hacemos $x=1$ en (*) tenemos

$$\ln\left(\frac{f(1)-22}{10}\right) = -K$$

es decir

$$K = -\ln(0,8) \simeq 0,223$$

Con este valor de K podemos resolver el problema: para qué valor de x resulta $f(x)=37$.

Reemplazando en (*) nos queda

$$x = -\frac{1}{K}\ln\left(\frac{37-22}{10}\right) \simeq -\frac{1}{0,223}\ln(1,5) \simeq -1,818$$

Es razonable que el valor de x sea negativo porque adoptamos como hora cero las 4 AM y el cuerpo a esa hora ya se estaba por debajo de 37º. Pasado a horas y minutos el valor de x es equivalente en forma aproximada a 1 hora 49 minutos. Es decir que a las

2 horas 11 minutos AM el cuerpo estaba a 37º

Podemos despejar f de la ecuación (*) y obtener $f(x)$

$$\boxed{f(x) = 22 + 10e^{-Kx}}$$

Vemos que la temperatura va decreciendo asintóticamente al valor de la temperatura ambiente. Es decir

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(22 + 10e^{-Kx}) = 22$$

2.2 Desintegración radiactiva

Los átomos de ciertos elementos "radiactivos" son inestables. Es decir: en un intervalo de tiempo dado una fracción de los átomos se desintegra espontáneamente para formar un nuevo elemento. La cantidad de átomos que se desintegra es directamente proporcional al número de átomos presentes en la misma. De modo que si llamamos $N(t)$ a la cantidad de átomos existentes en el tiempo t, entonces $-N'(t)$, es el número de átomos que se desintegran por unidad de tiempo y es proporcional a $N(t)$. Es decir

$$N'(t) = -\lambda N(t) \quad , \quad N(0) = N_0$$

La constante $\lambda > 0$, se conoce como constante de decaimiento o decrecimiento de la sustancia. Cuando mayor sea λ, la sustancia decaerá más rápidamente. El valor en $t = 0$ es la condición inicial de la ecuación, en este caso la cantidad de átomos existentes en $t = 0$.

La semivida de una sustancia radiactiva. La ***semivida*** de una sustancia radiactiva se define como el tiempo necesario para que se desintegre la mitad de átomos iniciales. Sabiendo que la semivida del carbono 14 es de 5730 años (con un error de más o menos 40 años), calcule su constante de decaimiento.

Solución

Resolvemos la ecuación diferencial, agrupando en un mismo miembro todos los factores que involucren a la incógnita *N*. Así

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$$

Calculamos una primitiva de cada miembro, sin olvidar que difieren en una constante.

$$\int \frac{N'(t)}{N(t)}\,dt = \ln N(t) \qquad , \qquad \int (-\lambda)\,dt = -\lambda t$$

Entonces

$$\ln N(t) = -\lambda t + C$$

De donde

$$N(t) = k e^{-\lambda t}$$

$k = e^{C}$ es otra constante

Haciendo $t = 0$ y usando la condición inicial obtenemos la solución de la ecuación

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}} \qquad (*)$$

El problema nos pide hallar el valor de λ sabiendo que para $t = 5730$ años $N(5730) = \frac{N_0}{2}$. Notar que las unidades de λ son el inverso del tiempo.

El valor de λ se despeja de la ecuación (*):

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t} \simeq \frac{0,6931}{5730} \simeq 1,2096 \cdot 10^{-4}$$

La constante de decaimiento del carbono 14 es

$$\boxed{\lambda \simeq 1,2096 \cdot 10^{-4}\, \frac{1}{años}}$$

La semivida

$$N(t) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\lambda t$$

Entonces

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

3. Ejercicios resueltos

Ejercicio. Hallar la función f que satisface $f'(x)e^{-x+5} = \dfrac{x+2}{\sqrt{f(x)}}$; $f(5) = 4$

Solución

Como en los ejemplos anteriores, agrupamos todo lo que tenga a la incógnita f en un mismo miembro:

$$\sqrt{f(x)}\,f'(x) = \frac{x+2}{e^{-x+5}} = (x+2)e^{x-5}$$

Esta última versión es más fácil de integrar

Integramos cada miembro por separado.

Por un lado

$$\int \sqrt{f(x)}\,f'(x)dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(f(x))^{3/2} + C$$

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$

Por otro lado, el segundo miembro se puede integrar usando el método de integración por partes

$$\int (x+2)e^{x-5}dx = (x+2)e^{x-5} - \int e^{x-5}dx = (x+2)e^{x-5} - e^{x-5} + C'$$

$u = x+2 \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{x-5}dx \Rightarrow v = e^{x-5}$

Igualando y unificando en una sola constante queda

$$\frac{2}{3}f^{3/2}(x) = (x+1)e^{x-5} + C \qquad (*)$$

Para obtener la contante C hacemos uso de la condición inicial $f(5) = 4$. Haciendo $x = 5$ en (*) se tiene

$$\frac{2}{3}4^{3/2} = 6 + C \iff \frac{16}{3} = 6 + C \iff C = -\frac{2}{3}$$

Podemos ahora despejar f en (*) con el valor de C obtenido:

$$f^{3/2}(x)=\frac{3}{2}(x+1)e^{x-5}-1$$

Entonces

$$\boxed{f(x)=\sqrt[3]{(\frac{3}{2}(x+1)e^{x-5}-1)^2}}$$

Ejercicio. Hallar la función $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua satisface la ecuación

$$xf(x)+\int_1^x t^2 f(t)dt=2$$

Solución

Esta *ecuación integral*, esconde una ecuación diferencial. La condición inicial se obtiene de reemplazar en la ecuación $x=1$ ya que allí se anula la integral. Entonces

$$1f(1)+\int_1^1 t^2 f(t)dt=2$$

Entonces $\boxed{f(1)=2}$

Como f es continua, puedo aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo y derivar la ecuación para obtener:

$$(xf(x)'+(\int_1^x t^2 f(t)dt)'=(2)'$$

De donde

$$f(x)+xf'(x)+x^2 f(x)=0$$

Aquí ya tenemos una ecuación diferencial de las que sabemos resolver.

Agrupando todo lo que tiene a la incógnita f en un mismo miembro queda

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x^2+1}{x} = -x - \frac{1}{x}$$

Integramos cada miembro de la igualdad por separado:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C$$

$$\boxed{u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx}$$

y el segundo miembro

$$\int (-x - \frac{1}{x})dx = -\int x dx - \int \frac{dx}{x} = -\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C'$$

Igualando y unificando constantes, obtenemos

$$\ln|f(x)| = -\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C \qquad (*)$$

La condición inicial que obtuvimos al principio nos permite obtener C.

$$\ln|f(1)| = -\frac{1^2}{2} - \ln|1| + C \Rightarrow C = \frac{1}{2} + \ln 2$$

Con el valor de C estamos en condiciones de despejar f en (*)

$$|f(x)| = e^{-x^2/2 + 1/2 - \ln|x| + \ln 2} = \frac{2}{|x|} e^{\frac{1-x^2}{2}}$$

$$\boxed{-\ln|x| + \ln 2 = \ln\left|\frac{2}{x}\right|}$$

Como f debe ser continua y es positiva en $x = 1$, podemos sacar el módulo en el primer miembro y como $x \geq 1$ lo podemos sacar en el segundo. En definitiva nos queda

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{x} e^{\frac{1-x^2}{2}}}$$

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Ecuaciones Diferenciales, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.