Práctica 7 - Parte 1

Estudio de funciones

En lo que sigue vamos a usar todas las herramientas que desarrollamos hasta ahora (cálculo de dominio, límites y asíntotas, derivadas y crecimiento, por ejemplo) para estudiar el comportamiento de una función f dada por una fórmula. También introduciremos nuevas herramientas con el objetivo de hacer un estudio detallado y un gráfico aproximado de f. A partir del gráfico, como ya aclaramos en la Unidad 1, será posible deducir información útil adicional sobre la función o sobre ecuaciones que la involucran.

1. Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

Como vimos al estudiar el teorema del valor medio y sus consecuencias, es posible analizar el crecimiento y decrecimiento de una función a partir del signo de su derivada. Más precisamente,

Si $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a; b]$ y derivable en $(a; b)$:

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a; b)$, entonces f es estrictamente creciente en $[a; b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a; b)$, entonces f es estrictamente decreciente en $[a; b]$.

Por otra parte, con respecto a los extremos relativos (también llamados extremos locales) vimos la siguiente propiedad:

Si f tiene un extremo relativo o local en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, por el teorema de Fermat, deberá ocurrir alguna de las dos situaciones siguientes:

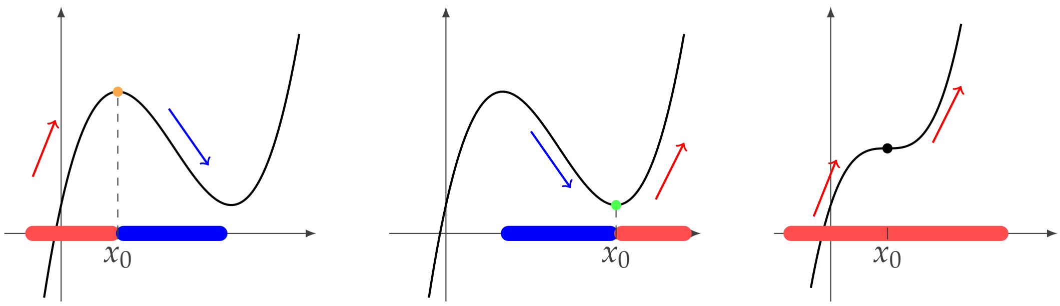
- $f'(x_0) = 0$.
- f no es derivable en x_0.

Por esta razón vamos a distinguir a estos puntos:

Se llaman *puntos críticos de f* a todos los $x_0 \in \text{Dom}(f)$ que cumplen alguna de las dos condiciones: $f'(x_0) = 0$ o f no es derivable en x_0.

Estos puntos críticos son los *candidatos* donde f puede alcanzar valores máximos o mínimos relativos pero, como ya vimos, *no todo punto crítico da un máximo o mínimo local de f.*

¿Cómo podemos determinar si en un punto crítico x_0, la función f tiene un máximo o un mínimo local (o no tiene un extremo relativo)? La presencia de un extremo relativo en x_0 está determinada por un cambio en el crecimiento de la función a la izquierda y a la derecha de x_0, como ilustran los gráficos siguientes:



Miramos lo que ocurre cerca de x_0:

- Si f es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a su derecha, entonces f tiene un máximo local en x_0.
- Si f es decreciente a la izquierda de x_0 y creciente a su derecha, entonces f tiene un mínimo local en x_0.
- Si f es estrictamente creciente (o estrictamente decreciente), tanto a la derecha como a la izquierda de x_0, entonces f no tiene un extremo local en x_0.

Si tenemos en cuenta la relación entre crecimiento y decrecimiento de f y el signo de su derivada f', podemos dar el siguiente criterio:

Criterio de la primera derivada. Sea f una función continua en x_0 y derivable a izquierda y derecha de x_0:

- Si, cerca de x_0, $f'(x) < 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) > 0$ para $x > x_0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.
- Si, cerca de x_0, $f'(x) > 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) < 0$ para $x > x_0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.
- Si, cerca de x_0, $f'(x)$ tiene el mismo signo para todo $x \neq x_0$, entonces f no tiene un máximo ni un mínimo relativo en x_0.

Ejercicio 1. Sea $f(x) = x^2e^{-x}$. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y los extremos relativos de f. Estudiar el comportamiento de f en $+\infty$ y en $-\infty$ y, con la información obtenida, realizar un gráfico aproximado de f.

Solución

Como f está definida y es derivable en todo $\mathbb{R}$, para hallar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, estudiamos los conjuntos de positividad y negatividad de f'. Para esto, en primer lugar, hallamos los ceros de f'. Estos valores son los puntos críticos de f, que serán nuestros candidatos a extremos relativos.

Derivamos, usando la regla de la derivada del producto y la regla de la cadena, y obtenemos que

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2e^{-x}(-1) = (2x - x^2)e^{-x}.$$

Como $e^{-x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta que

$$f'(x) = 0 \iff 2x - x^2 = 0 \iff x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 2.$$

A continuación, determinamos los conjuntos de positividad y de negatividad de f' por medio del corolario del teorema de Bolzano: consideramos cada uno de los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ y $(2; +\infty)$ determinados por los puntos críticos. En cada uno de estos intervalos, f' es continua y no se anula, por lo que tendrá signo constante.

Finalmente, con la información del crecimiento y decrecimiento de f obtenida de este modo, determinamos para cada uno de los puntos críticos, $x = 0$ y $x = 2$, si son máximos o mínimos locales, o bien si f no tiene un extremo local en dicho punto.

Paso a paso, vamos a construir una tabla que incluya la información necesaria. Primero marcamos los puntos críticos y los intervalos que determinan:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

En un segundo paso, vemos el signo de la derivada en los intervalos determinados y deducimos el crecimiento de f a partir de dichos signos:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	$f'(-1)<0$ $-$	0	$f'(1)>0$ $+$	0	$f'(3)<0$ $-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Finalmente, teniendo en cuenta el crecimiento, decidimos si los puntos críticos son extremos o no y los clasificamos. Como f es decreciente a la izquierda de 0 y creciente a su derecha, entonces tiene un mínimo local en $x=0$. Análogamente, siendo creciente a la izquierda y decreciente a la derecha de 2, f alcanza un máximo local en $x=2$.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	$f'(-1)<0$ $-$	0	$f'(1)>0$ $+$	0	$f'(3)<0$ $-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(0)=0$ min	$\nearrow$	$f(2)=4e^{-2}$ max	$\searrow$

En definitiva, concluimos que los intervalos de crecimiento ($I^{\uparrow}(f)$) y de decrecimiento ($I_{\downarrow}(f)$) de f son

$$\boxed{I^{\uparrow}(f):[0;2] \quad \text{y} \quad I_{\downarrow}(f):(-\infty,0];[2,+\infty)}$$

y, en cuanto a los extremos locales, tenemos que:

$$\boxed{\text{Extremos locales de } f\text{: mínimo local en } x=0 \text{ y máximo local en } x=2.}$$

La información obtenida hasta ahora no es suficiente para hacer un gráfico aproximado de f. Por ejemplo, sabemos que en el intervalo $(-\infty;0]$ la función es decreciente, pero, ¿cómo es este decrecimiento? ¿Será que en $-\infty$ hay una asíntota horizontal y entonces los valores de f no superan el valor correspondiente a la asíntota? ¿Será que f no está acotada en $-\infty$? Analicemos el comportamiento de f en $-\infty$ y en $+\infty$, mediante el cálculo de los límites correspondientes:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \underset{\text{L'H: indet. } \frac{\infty}{\infty}}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} \underset{\text{L'H: indet. } \frac{\infty}{\infty}}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Estos cálculos nos dicen que el gráfico de f no tiene asíntota horizontal en $-\infty$ ya que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty}$$

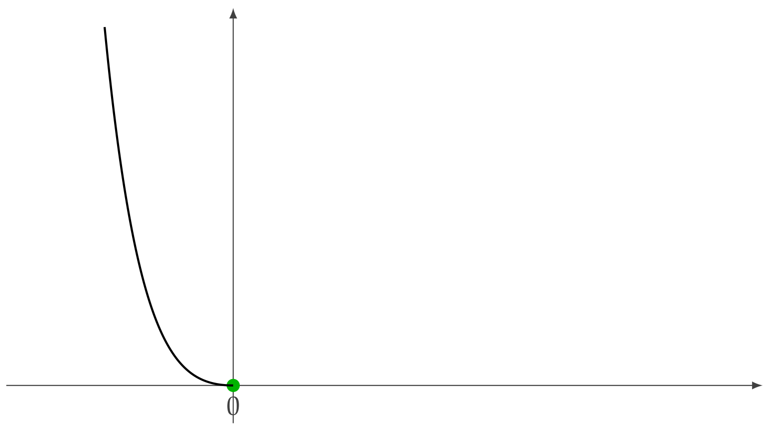
y que

$$\boxed{\text{la recta de ecuación } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal en } +\infty.}$$

A esta altura sí estamos en condiciones de hacer un gráfico aproximado de f. Para esto, leemos la información sobre crecimiento y decrecimiento en la tabla anterior y tenemos en cuenta cómo se comporta la función en los infinitos. Puede ser útil ir leyendo estos datos de izquierda a derecha. Por ejemplo, la función en $-\infty$ viene de $+\infty$, decreciendo hasta llegar al punto $(0,0)$ donde hay un mínimo local:

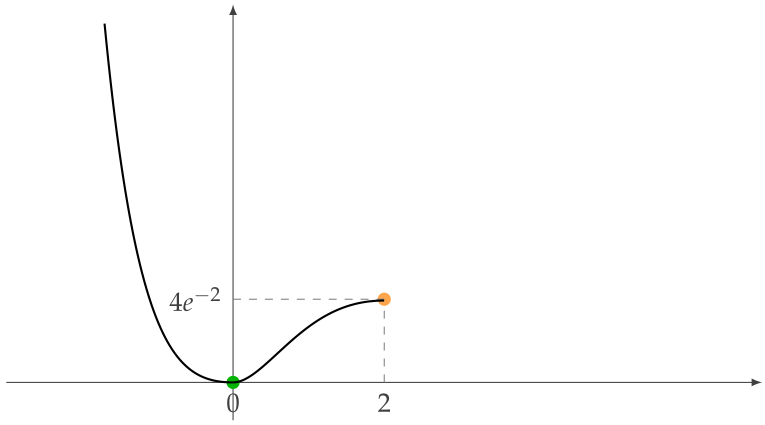
$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$$

x	$(-\infty;0)$	0
$f(x)$	$\searrow$	$f(0)=0$ min



A partir del $(0,0)$, la función crece hasta el punto $(2, 4e^{-2})$ donde alcanza un máximo:

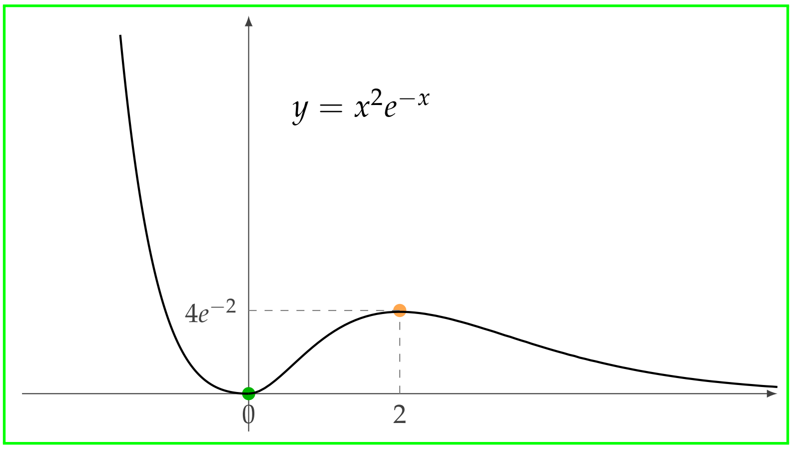
x	0	$(0;2)$	2
$f(x)$	$f(0) = 0$ min	$\nearrow$	$f(2) = 4e^{-2}$ max



A partir de ese punto, la función decrece y, en $+\infty$, el eje x es una asíntota horizontal:

x	2	$(2;+\infty)$
$f(x)$	$f(2) = 4e^{-2}$ max	$\searrow$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$$



con lo que completamos el gráfico aproximado de la función. $\square$

Ejercicio 2. Sea $f(x) = \dfrac{4x+1}{-x^2+2x}$. Hallar el dominio de f, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas verticales y horizontales de f. Usar la información obtenida para realizar un gráfico aproximado de f.

Solución

El único inconveniente que puede surgir cuando evaluamos f es que su denominador valga cero. Por lo tanto, su dominio es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ que no lo anulan. Ahora, los valores de x tales que $-x^2 + 2x = 0$ son $x = 0$ y $x = 2$; luego,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 2\}.}$$

Como antes, para estudiar el crecimiento y los extremos relativos de f calculamos su derivada, usando la regla de derivación de una división:

$$f'(x) = \frac{4.(-x^2+2x) - (4x+1)(-2x+2)}{(-x^2+2x)^2} = \frac{4x^2+2x-2}{(-x^2+2x)^2}.$$

A continuación, buscamos los puntos críticos de f. Como el denominador de f' es el denominador de f al cuadrado, resulta que no aparece ninguna nueva restricción para evaluar f' y, por lo tanto, $\mathrm{Dom}(f') = \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 2\}$. Por esta razón, f es derivable en todo su dominio y los puntos críticos son los ceros de f', es decir, los $x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$ tales que se anula el numerador de f':

$$4x^2 + 2x - 2 = 0 \iff x = -1 \text{ o } x = \frac{1}{2}.$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, buscamos los conjuntos de positividad y negatividad de f'. Usando el corolario del teorema de Bolzano, los extremos de los intervalos a considerar, en cada uno de los cuales f' tendrá signo constante, son los *x que no pertenecen al dominio de f* (y que, por lo tanto, tampoco están en el dominio de f') y los *puntos críticos de f*. Como antes, construimos la siguiente tabla paso a paso. El resultado final es (recordar que el símbolo $\nexists$ se lee "no existe" y significa que la función no está definida en el punto en cuestión):

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2};2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	$f'(-2) > 0$ $+$	0	$f'(-\frac{1}{2}) < 0$ $-$	$\nexists$	$f'(\frac{1}{4}) < 0$ $-$	0	$f'(1) > 0$ $+$	$\nexists$	$f'(3) > 0$ $+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1) = 1$ max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$f(\frac{1}{2}) = 4$ min	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$

A partir de esta tabla, obtenemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f:

$$\boxed{I^{\uparrow}: (-\infty;-1],\ [\frac{1}{2};2),\ (2,+\infty), \quad I_{\downarrow}: [-1;0),\ (0;\frac{1}{2}].}$$

Observamos que, como $x = 0$ y $x = 2$ no pertenecen al dominio de f, no los incluimos en los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

Obtenemos también de la tabla, los extremos locales de f:

$$\boxed{f \text{ tiene un máximo local en } x = -1 \text{ y un mínimo local en } x = \frac{1}{2}.}$$

Calculemos ahora las asíntotas verticales y horizontales de f. Como f es continua en todo su dominio, para determinar las asíntotas verticales, hallamos el límite de f en los puntos que no pertenecen al dominio. Como, además, vamos a usar esta información para hacer un gráfico aproximado de f, calcularemos los límites laterales para determinar el signo del límite:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{4x+1}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0^-}\underbrace{(-x+2)}_{\to 2}} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \frac{\overbrace{4x+1}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}\underbrace{(-x+2)}_{\to 2}} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{4x+1}^{\to 9}}{\underbrace{x}_{\to 2}\underbrace{(-x+2)}_{\to 0^+}} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\overbrace{4x+1}^{\to 9}}{\underbrace{x}_{\to 2}\underbrace{(-x+2)}_{\to 0^-}} = -\infty.$$

Para determinar si tiene asíntotas horizontales y sus ecuaciones, calculamos los límites en los infinitos:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x}(4+\frac{1}{x})}{x^{\cancel{2}}(-1+\frac{2}{x})} = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}(4+\frac{1}{x})}{x^{\cancel{2}}(-1+\frac{2}{x})} = 0.$$

Concluimos, entonces, que las asíntotas verticales y horizontales al gráfico de f son las siguientes rectas:

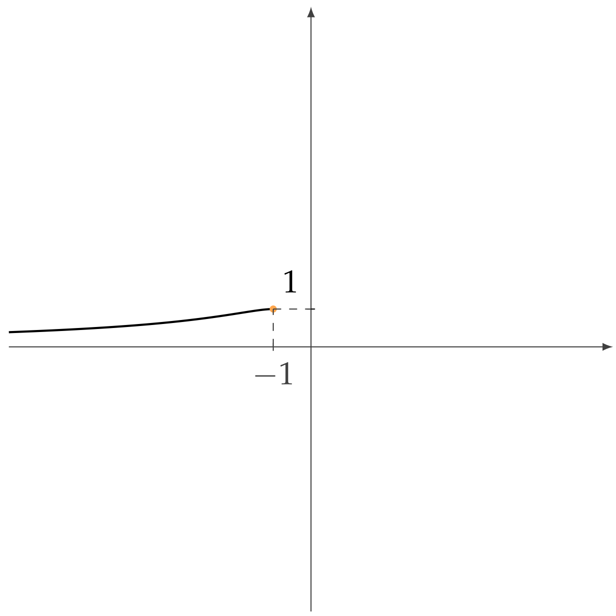
$$\boxed{\text{Asíntotas verticales: } x = 0 \text{ y } x = 2. \quad \text{Asíntota horizontal: } y = 0.}$$

Con toda la información anterior, podemos construir un gráfico aproximado de f. Como antes, vamos a ir leyendo la información de izquierda a derecha, teniendo en cuenta el dominio, el crecimiento y las asíntotas.

En $-\infty$ la función tiene una asíntota horizontal en el eje x y crece hasta llegar al punto $(-1, 1)$ donde tiene un máximo local:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x + 1}{-x^2 + 2x} = 0$$

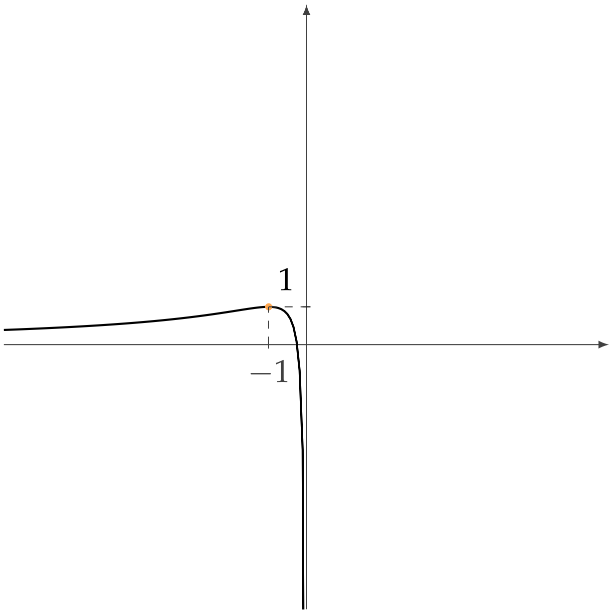
x	$(-\infty; -1)$	-1
$f(x)$	$\nearrow$	max



A partir del punto $(-1, 1)$, la función comienza a decrecer hasta el valor $x = 0$ donde tiene una asíntota vertical:

x	-1	$(-1; 0)$	0
$f(x)$	max	$\searrow$	$\nexists$

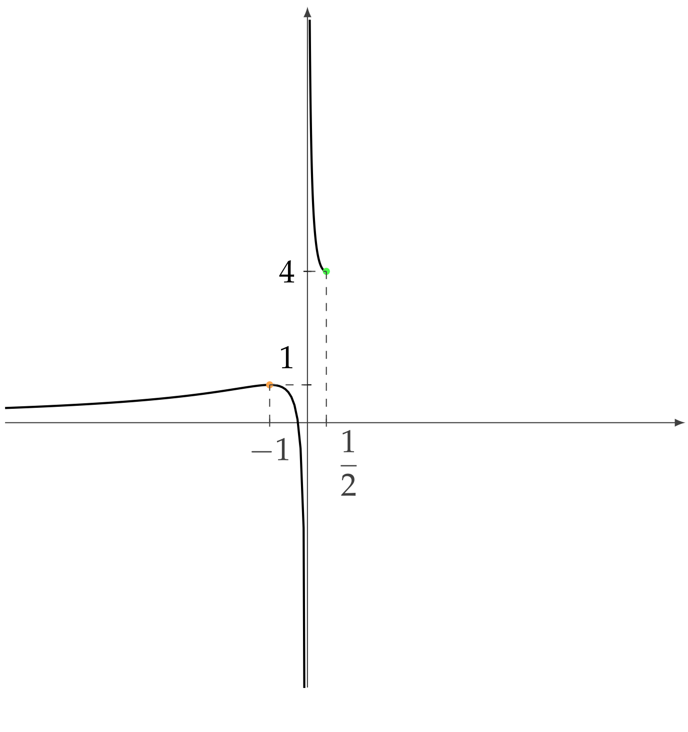
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{4x + 1}{-x^2 + 2x} = -\infty$$



Del otro lado de la recta $x = 0$ la función viene de $+\infty$ y decrece hasta llegar al punto $(\frac{1}{2}, 4)$, donde alcanza un mínimo local:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = -\infty$$

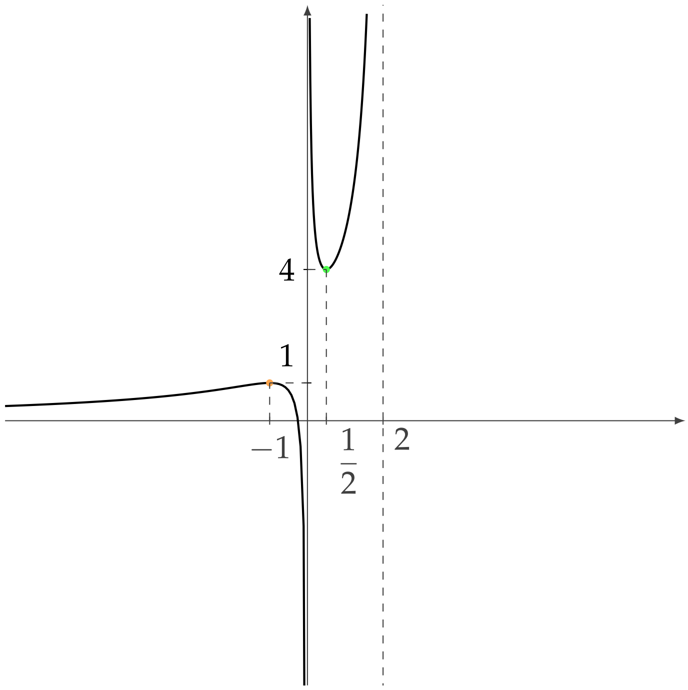
x	0	$(0; \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	$\nexists$	$\searrow$	min



A partir del punto $(\frac{1}{2}, 4)$ la función crece hasta $x = 2$, donde tiene otra asíntota vertical:

x	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2};2)$	2
$f(x)$	min	$\nearrow$	$\nexists$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = +\infty$$

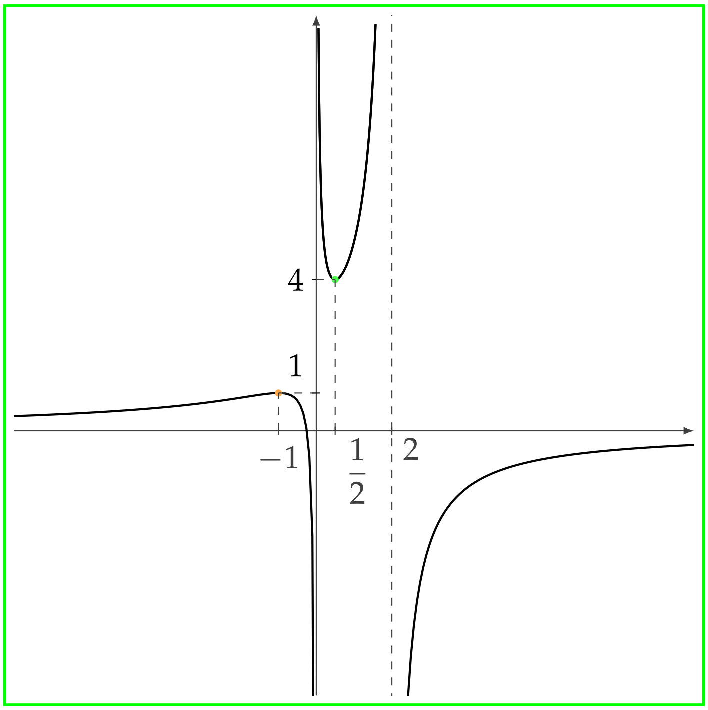


Finalmente, a la derecha de la recta $x = 2$, la función viene de $-\infty$ creciendo para acercarse a su asíntota horizontal $x = 0$:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = -\infty$$

x	2	$(2;+\infty)$
$f(x)$	$\nexists$	$\nearrow$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = 0$$



con lo que concluimos el gráfico aproximado de f. □

Ejercicio 3. Sea $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y los extremos relativos de f.

Solución

Como antes, vamos a analizar el dominio de f, sus puntos críticos y los signos de su derivada para poder determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

La función f está definida para cualquier número real, por lo que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

La derivada de f es $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ para $x \neq 0$ y f no es derivable en $x = 0$, es decir $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{0\}$.
Como $f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$, el único punto crítico de f es $x = 0$, por ser el único punto del dominio de f donde no es derivable.

Analizamos la positividad y la negatividad de f' en los dos intervalos $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$ determinados por este punto crítico (notemos que en cada uno de estos intervalos f' es continua y, por lo tanto, podemos utilizar el corolario del teorema de Bolzano) para obtener los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y determinar si en $x = 0$ hay un extremo local:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
	$f'(-1) < 0$		$f'(1) > 0$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

En consecuencia,

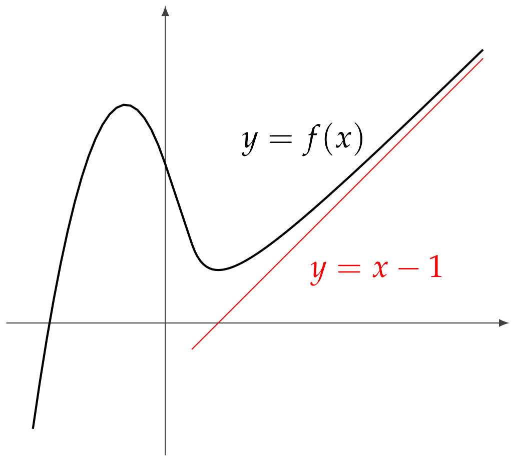
$$\boxed{I^{\uparrow}(f) = [0; +\infty),\ I_{\downarrow}(f) = (-\infty, 0] \text{ y } f \text{ tiene un mínimo local en } x = 0.}$$

□

2. Asíntotas

Al introducir la noción de límite de funciones, estudiamos también las nociones de asíntota horizontal y asíntota vertical al gráfico de una función. Esencialmente, una *asíntota* al gráfico de f es una recta a la que dicho gráfico se acerca arbitrariamente (ya sea tocándola o no).

Observemos el siguiente gráfico:



En este caso, tenemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Sin embargo, podemos decir algo más sobre el comportamiento de f a medida que x crece hacia $+\infty$: el gráfico de f se aproxima cada vez más a la recta de ecuación $y = x - 1$ (o sea, los valores de $f(x)$ se parecen cada vez más a $x - 1$). Esta recta no es horizontal ni vertical; decimos entonces que es oblicua.

Dada una función f, la recta de ecuación $y = mx + b$ con $m \neq 0$ es una *asíntota oblicua en* $+\infty$ para el gráfico de f si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$. Análogamente, la recta $y = mx + b$ es una *asíntota oblicua en* $-\infty$ para el gráfico de f si $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$.

Veamos cómo determinar si existen y, en caso afirmativo, cómo hallar las ecuaciones de las asíntotas oblicuas al gráfico de una función f.

De acuerdo a la definición, si la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua en $+\infty$, se tiene que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (mx + b) = 0$; entonces también vale que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (mx + b)}{x} = 0$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{m\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{b}{x} = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0$, se deduce que

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Es decir, si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

es un número m, este número es la posible pendiente de una asíntota oblicua.
Una vez conocida esta posible pendiente m, podemos determinar la ordenada al origen a partir de la definición:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (mx + b)) = 0 \iff \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx - b) = 0$$

$$\iff b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx).$$

Entonces:

Para determinar si hay una asíntota oblicua en $+\infty$, el primer paso consiste en ver si hay un candidato m a pendiente, calculando el límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si este límite existe y da un número $m \neq 0$, hay que ver si hay un candidato b a ordenada al origen, es decir, si el límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx)$ existe y es finito. En caso afirmativo, la recta $y = mx + b$ resulta ser una asíntota oblicua en $+\infty$. De manera análoga, pero considerando los límites con $x \to -\infty$, se puede determinar, si existe, una asíntota oblicua al gráfico de f en $-\infty$.

Ejercicio 4. Para cada una de las siguientes funciones f, hallar, si las hay, las ecuaciones de las asíntotas oblicuas de f:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 6}{2x + 1}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

c) $f(x) = 3x + \ln(x)$.

Solución

a) $f(x) = \dfrac{x^2+6}{2x+1}$.

En primer lugar, veamos si hay algún valor posible m para la pendiente de una asíntota oblicua. Por lo anterior, tenemos que calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+6}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+6}{2x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\frac{6}{x^2})}{\cancel{x^2}(2+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{2}.$$

Notemos que, con la misma cuenta, se puede calcular el límite cuando $x \to -\infty$ y también se obtiene como resultado $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, las posibles asíntotas oblicuas tienen pendiente $m = \frac{1}{2}$ tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

A continuación, para decidir si existen asíntotas oblicuas, calculamos el límite que nos da la ordenada al origen (si este límite no existe o da infinito, no hay asíntota oblicua):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+6}{2x+1} - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+12-2x^2-x}{4x+2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{12-x}{4x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(\frac{12}{x}-1)}{\cancel{x}(4+\frac{2}{x})} = -\frac{1}{4}.$$

Nuevamente, el mismo cálculo sirve para ver que $\lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = -\frac{1}{4}$. Luego,

$$\boxed{\text{La recta } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \text{ es asíntota oblicua de la función tanto en } +\infty \text{ como en } -\infty.}$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Como antes, calculemos primero el límite que, de existir, nos da una posible pendiente para la asíntota oblicua en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} \underset{x>0 \text{ cuando } x\to+\infty}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 1.$$

En este caso, el límite en $-\infty$ da distinto: reproduciendo las cuentas del caso anterior, la diferencia radica en que cuando $x \to -\infty$, tenemos que $|x| = -x$ pues $x < 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} \underset{x<0 \text{ cuando } x\to-\infty}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = -1.$$

Entonces tenemos que la posible pendiente de una asíntota oblicua en $+\infty$ es $m = 1$, mientras que la posible pendiente de una asíntota oblicua en $-\infty$ es $m = -1$.

En ambos casos, calculamos los límites que nos dan las posibles ordenadas al origen. En $+\infty$ tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-1)}{\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\cdot(x+\sqrt{x^2+1})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\cdot(x+\sqrt{x^2+1})} = 0.$$

Por esto, resulta que:

$$\boxed{\text{La recta } y = x \text{ es asíntota oblicua al gráfico de la función en } +\infty.}$$

En $-\infty$ tenemos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x(\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 1)}{(-x)\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot (x - \sqrt{x^2+1})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot (x - \sqrt{x^2+1})} = 0.$$

Luego,

$$\boxed{\text{La recta } y = -x \text{ es una asíntota oblicua al gráfico de la función en } -\infty.}$$

c) $f(x) = 3x + \ln(x)$.

En este caso, como $\mathrm{Dom}(f) = (0; +\infty)$ (recordar que el logaritmo está definido únicamente para argumentos positivos), sólo hay que analizar posibles asíntotas oblicuas en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \ln(x)}{x} \underset{\text{indet. } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'H}}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{1} = 3.$$

De existir una asíntota oblicua, su ordenada al origen sería:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \cancel{3x} + \ln(x) - \cancel{3x} = +\infty.$$

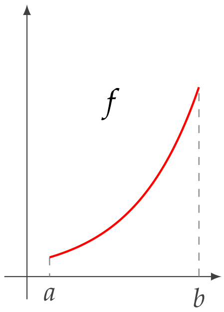
Como este límite no nos da como resultado un número, podemos afirmar que, en este caso,

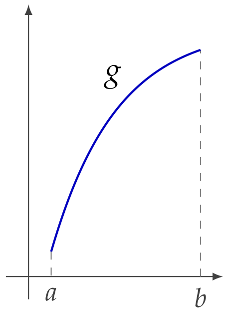
$$\boxed{\text{No existe una asíntota oblicua al gráfico de } f.}$$

$\square$

3. Concavidad y puntos de inflexión

Consideremos las siguientes funciones definidas en el intervalo $[a;b]$:

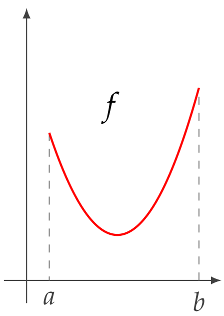


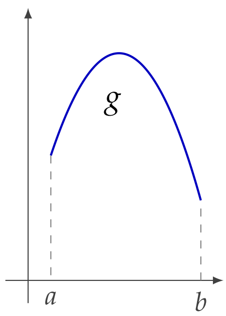


Ambas funciones son crecientes en el intervalo $[a;b]$. Sin embargo, los gráficos son distintos y a esta diferencia es a lo que llamamos *concavidad*.

Intuitivamente, una función en un intervalo se dirá *cóncava hacia arriba* (o *cóncava*) si su gráfico en dicho intervalo es similar al de la función f anterior, en el sentido que el dibujo se parece a (parte de) una ”sonrisa” ($\cup$), y se dirá *cóncava hacia abajo* (o *convexa*) si su gráfico en el intervalo es similar al de la función g anterior, en el sentido que el dibujo se parece a (parte de) una ”sonrisa invertida” ($\cap$).

Por ejemplo, en los siguientes gráficos, la función f es cóncava hacia arriba, mientras que la función g es cóncava hacia abajo en todo el intervalo $[a;b]$.

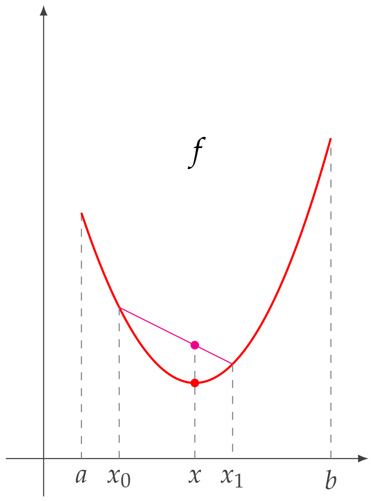




Las definiciones formales de las dos concavidades distintas son las que siguen:

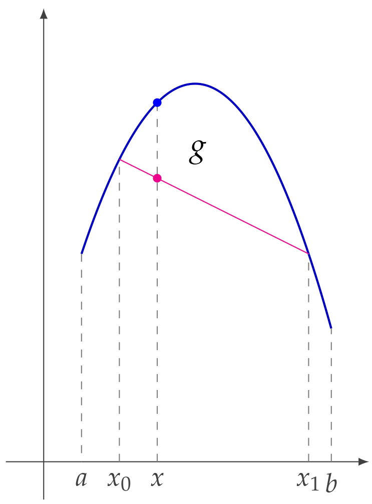
Dada una función f continua en un intervalo $(a;b)$ se dice que su gráfico es *cóncavo hacia arriba* (o *cóncavo*) en el intervalo $(a;b)$ si para todo par de valores x_0 y x_1 en $(a;b)$ con $x_0 < x_1$, vale que la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ queda por encima del gráfico de la función entre x_0 y x_1, es decir,

$$f(x) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \qquad \text{para todo } x \in [x_0; x_1].$$

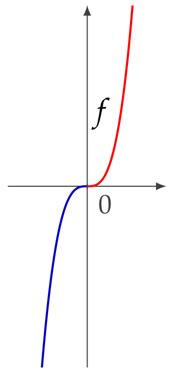


De forma similar, dada una función g continua en un intervalo $(a; b)$ se dice que su gráfico es *cóncavo hacia abajo* (o *convexo*) en el intervalo $(a; b)$ si para todo par de valores x_0 y x_1 en $(a; b)$ con $x_0 < x_1$, vale que la recta que une los puntos $(x_0, g(x_0))$ y $(x_1, g(x_1))$ queda por debajo del gráfico de la función entre x_0 y x_1, es decir:

$$g(x) \geq \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + g(x_0) \quad \text{para todo } x \in [x_0; x_1].$$



Consideremos la función $f(x) = x^3$:

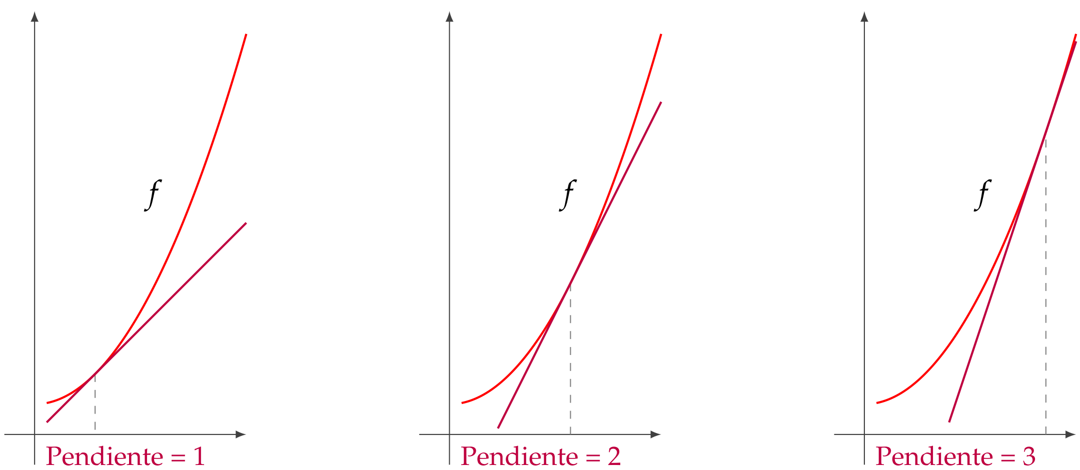


Notemos que, en el intervalo $(-\infty; 0)$, la función es cóncava hacia abajo ($\cap$) y en el intervalo $(0; +\infty)$ es cóncava hacia arriba ($\cup$). Entonces, en el valor $x_0 = 0$, la función f cambia la concavidad.

> A los valores $x_0 \in \text{Dom}(f)$ donde una función cambia de concavidad (es decir, el gráfico tiene distinta concavidad a derecha y a izquierda de x_0) los llamaremos *puntos de inflexión*.

En el caso de $f(x) = x^3$, resulta que $x_0 = 0$ es un punto de inflexión para f.

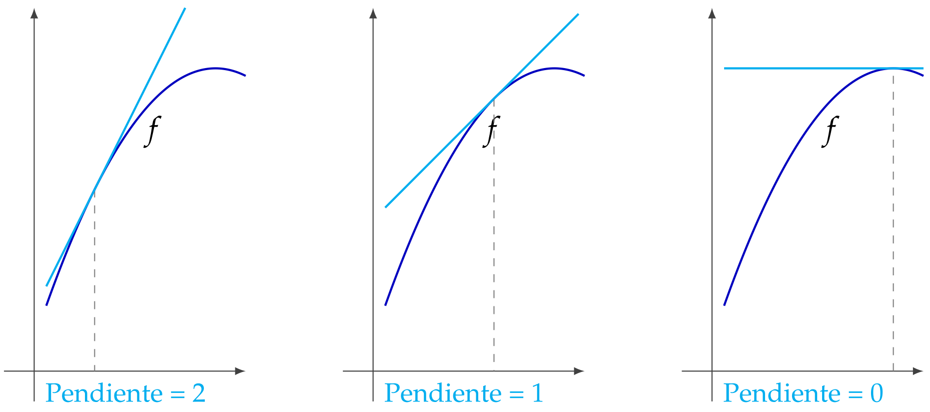
La siguiente es una idea intuitiva de cómo se relacionan los distintos tipos de concavidad con el signo de la derivada segunda de una función. Consideremos una función f, cóncava hacia arriba en un intervalo y que, además, se pueda derivar dos veces. Veamos qué pasa gráficamente con las rectas tangentes al gráfico:



A medida que x crece, las pendientes de las rectas tangentes crecen y, como esta pendiente está dada por la derivada de la función, podemos afirmar que la función derivada es creciente. El crecimiento de la derivada primera (f') está dado por el signo de su derivada, es decir, por el signo de la derivada segunda (f''). Recíprocamente, si f'' es positiva en un intervalo, entonces f' es creciente y estamos en la situación anterior. Esta idea gráfica motiva el siguiente criterio:

> Si f es una función dos veces derivable y $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a;b)$, entonces f es cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(a;b)$.

Se puede hacer un razonamiento similar en el caso en que una función sea cóncava hacia abajo en un intervalo, pero ahora las pendientes irán decreciendo:



En este caso, el criterio que vale es el siguiente:

> Si f es una función dos veces derivable y $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a;b)$, entonces f es cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(a;b)$.

En la entrada "Criterio de concavidad" puede encontrarse una demostración de la validez de los criterios anteriores.

Si x_0 es un punto de inflexión de una función f con derivada segunda, la función tiene distinta concavidad a la izquierda y a la derecha de x_0; por lo tanto, la derivada segunda f'' cambia de signo en x_0. Si f'' es continua, esto implica que $f''(x_0)$ debe valer 0:

> Si f es una función dos veces derivable y f'' es continua, para todo x_0 punto de inflexión debe valer $f''(x_0) = 0$.

Veamos en un ejemplo cómo podemos usar los criterios anteriores para determinar la concavidad de una función f:

Ejercicio 5. Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 2$.

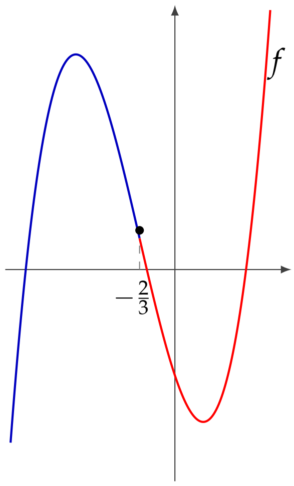
Solución
La función f es polinómica, por lo tanto es dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$. Los intervalos de concavidad ($\cup$) están dados por el conjunto de positivad de f'' y los de convexidad ($\cap$) por el conjunto de negatividad de f''.
En este caso, como $f''(x) = 6x + 4$ es lineal, podría hacerse fácilmente la cuenta, pero en general podemos usar el corolario del teorema de Bolzano. La derivada segunda es continua y $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$. Por lo tanto, podemos construir una tabla similar a las anteriores pero usando la derivada segunda y tenemos que:

x	$(-\infty; -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}; +\infty)$
$f''(x)$	$f''(-1) < 0$ $-$	0	$f''(0) > 0$ $+$
$f(x)$	$\cap$	$x = -\frac{2}{3}$ es punto de inflexión	$\cup$

Entonces,

La función f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty; -\dfrac{2}{3})$, es cóncava hacia arriba en $(-\dfrac{2}{3}; +\infty)$ y $x_0 = -\dfrac{2}{3}$ resulta ser un punto de inflexión (ya que en este punto cambia la concavidad) y es el único.

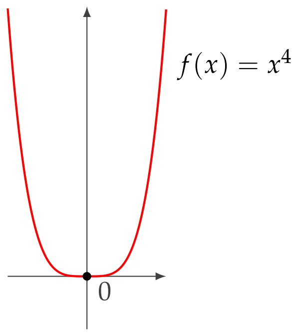
En un gráfico de f, podemos visualizar lo obtenido analíticamente:



□

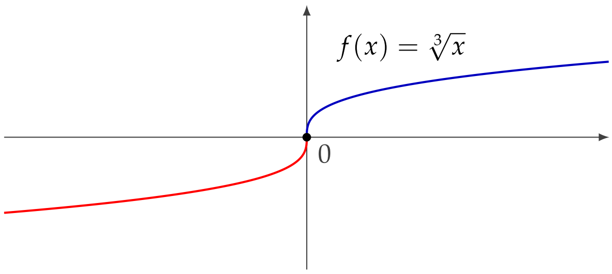
> Para afirmar que x_0 es punto de inflexión no alcanza con que $f''(x_0) = 0$.

Por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = x^4$, se tiene que $f''(x) = 12x^2$ y, por lo tanto, $f''(0) = 0$. Sin embargo, como puede verse en el siguiente gráfico, en $x_0 = 0$ esta función no cambia su concavidad y, entonces, $x_0 = 0$ no es punto de inflexión:



> Para hallar todos los puntos de inflexión, no alcanza con analizar los puntos donde la derivada segunda se anula. También hay que analizar el comportamiento de la función en los puntos en que la función está definida pero no es derivable dos veces.

Por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, esta función no es derivable en $x_0 = 0$ y, sin embargo, como puede verse en el siguiente gráfico, $x_0 = 0$ es un punto de inflexión:



4. Construcción de curvas

Para la construcción del gráfico de una función f, esencialmente nos valdremos de la siguiente información:

- Dominio de f.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y extremos locales.
- Intervalos de concavidad positiva y negativa, y puntos de inflexión.
- Existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

Ejercicio 6. Sea $f(x) = 2x + x^{\frac{2}{3}}$. Construir un gráfico aproximado de f.

Solución
La función f está definida para todo los números reales, así que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Para estudiar su crecimiento y sus extremos relativos, consideramos su derivada. Tenemos que

$$f'(x) = 2 + 2x^{-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}, \qquad \text{para } x \neq 0$$

y que f no es derivable en $x = 0$. Así, $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{0\}$.

Buscamos ahora los puntos críticos de f, es decir, los valores de x tales que $f'(x) = 0$ o donde f no es derivable. Como

$$f'(x) = 0 \iff 2 + 2x^{-\frac{1}{3}} = 0 \iff x = -1,$$

resulta que los puntos críticos de f son $x = -1$ (donde f' se anula) y $x = 0$ (donde no existe f').

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f estudiamos el signo de f': los puntos críticos de f parten al dominio de f' en intervalos en cada uno de los cuales f' es continua y no se anula: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$; luego, en cada uno de estos intervalos f' tiene signo constante. La siguiente tabla sintetiza el análisis de los signos de f', del crecimiento de f y de los extremos relativos de f:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
	$f'(-8) > 0$		$f'(-\frac{1}{8}) < 0$		$f'(1) > 0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1) = 1$ max	$\searrow$	$f(0) = 0$ min	$\nearrow$

Concluimos que los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f son

$$I^{\uparrow} : (-\infty; -1],\ [0; +\infty) \quad \text{y} \quad I_{\downarrow} : [-1; 0]$$

y, en cuanto a extremos locales,

$$f \text{ tiene un máximo local en } x = -1 \text{ y un mínimo local en } x = 0.$$

Analicemos ahora la concavidad y los puntos de inflexión del gráfico de f. Para esto, consideremos su derivada segunda:

$$f''(x) = (2 + 2x^{-\frac{1}{3}})' = 2(-\frac{1}{3})x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}} \quad \text{para } x \neq 0$$

y no existe $f''(0)$. Los candidatos a puntos de inflexión están dados por los valores de x donde f'' se anula o donde no existe f''. En este caso, $f''(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$ y no existe f'' para $x = 0$ (éste es nuestro único candidato). En los intervalos que quedan determinados, f'' es continua y no se anula; luego, tiene signo constante, lo que nos permite determinar la concavidad del gráfico de f. Resumiendo esta información, tenemos:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
	$f''(-8) < 0$		$f''(1) > 0$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\cap$	no es pto. de infl.	$\cap$

En consecuencia,

$$f \text{ es cóncava hacia abajo en } (-\infty; 0) \text{ y en } (0; +\infty).$$

Finalmente, veamos si el gráfico de f tiene asíntotas. Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y f es continua, no hay asíntotas verticales.

Para determinar si hay asíntotas horizontales, calculamos los límites en los infinitos:

$$\lim_{x \to +\infty} 2x + 3x^{\frac{2}{3}} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} 2x + 3x^{\frac{2}{3}} = x(2 + \underbrace{3x^{-\frac{1}{3}}}_{\to 0}) = -\infty.$$

Como ambos son infinitos, concluimos que no hay asíntotas horizontales.

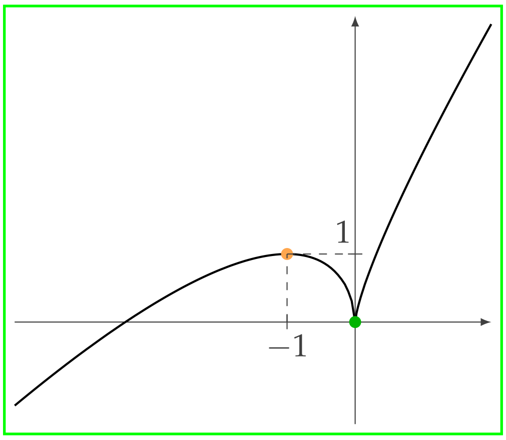
Para concluir nuestro análisis, vemos si hay asíntotas oblicuas. Tenemos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 3x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2 + 3x^{-\frac{1}{3}} = 2 \qquad \text{y}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to +\infty} 3x^{\frac{2}{3}} = +\infty.$$

Como este límite no es finito, resulta que no hay asíntota oblicua en $+\infty$. De la misma forma, se ve que tampoco hay asíntota oblicua en $-\infty$.

Con toda la información hallada sobre f, hagamos ahora un gráfico aproximado, usando como siempre la información de las tablas y los límites calculados:



□

Ejercicio 7. Hacer un gráfico aproximado de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 6}{2x + 1}$.

Solución

El dominio de f es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, ya que $x = -\frac{1}{2}$ es el único cero de su denominador. Más aún, la recta de ecuación $x = -\frac{1}{2}$ es asíntota vertical:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{x^2+6}{2x+1} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{x^2+6}{2x+1} = -\infty.$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(2x+1)-(x^2+6)2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-12}{(2x+1)^2}.$$

El dominio de f' coincide con el de f; luego, los puntos críticos son los ceros de f', que obtenemos igualando a cero su numerador y resolviendo la ecuación cuadrática que resulta:

$$2x^2+2x-12 = 0 \iff x = -3 \text{ ó } x = 2.$$

Analizamos el signo de f' en cada uno de los intervalos en los que los puntos críticos parten a $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$:

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2};2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-3)=-3$ max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$f(2)=2$ min	$\nearrow$

Entonces, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f son

$$I^{\uparrow} : (-\infty;-3],\ [2;+\infty) \quad \text{y} \quad I_{\downarrow} : [-3;-\frac{1}{2});(-\frac{1}{2};2]$$

y, en cuanto a sus extremos locales, podemos afirmar que

$$f \text{ tiene un máximo local en } x = -3 \text{ y un mínimo local en } x = 2.$$

A continuación, analizamos la concavidad del gráfico de f. Para esto, trabajamos con la derivada segunda de f:

$$f''(x) = \frac{(4x+2)(2x+1)^2-(2x^2+2x-12)4(2x+1)}{(2x+1)^4} =$$

$$= \frac{(4x+2)(2x+1)-4(2x^2+2x-12)}{(2x+1)^3} =$$

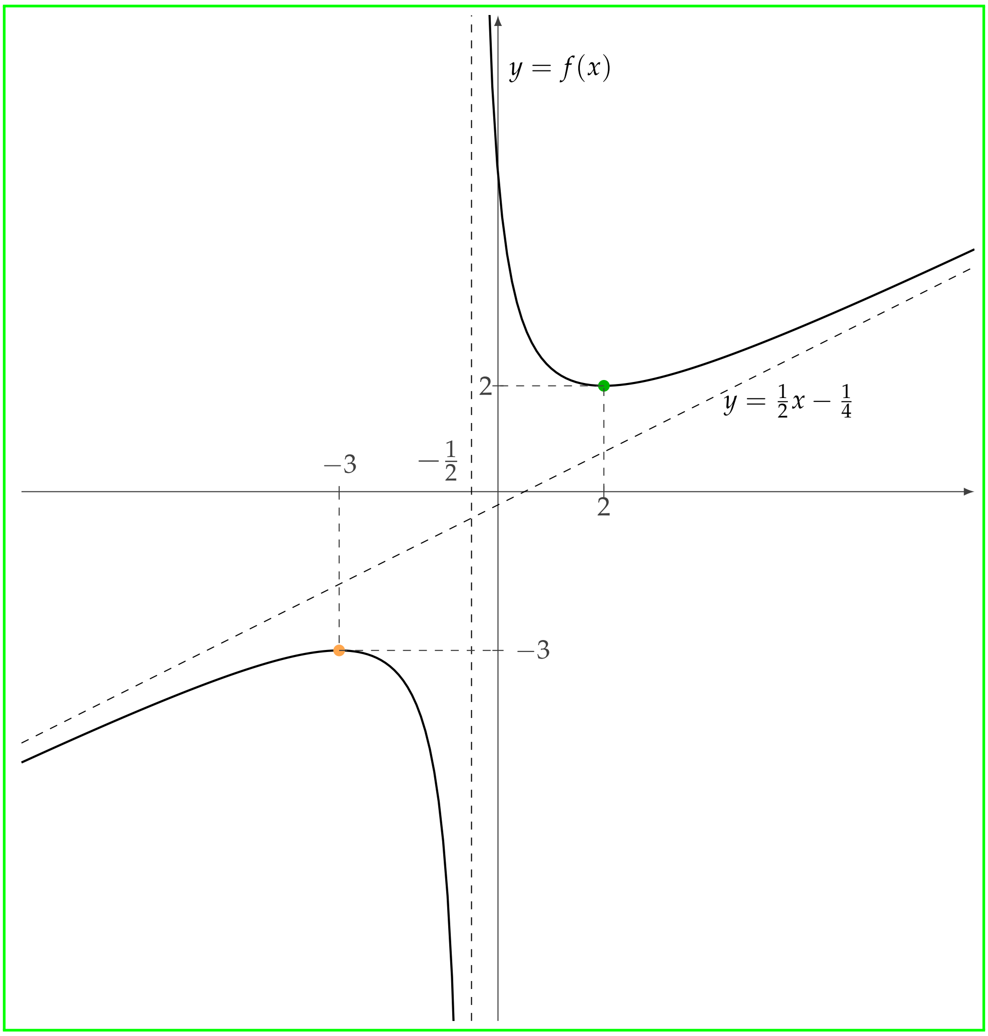
$$= \frac{8x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 48}{(2x+1)^3} = \frac{50}{(2x+1)^3}.$$

Esta derivada segunda no tiene ceros, $f''(x) < 0$ si $x < -\frac{1}{2}$ y $f''(x) > 0$ si $x > -\frac{1}{2}$ (notemos que el signo de $f''(x)$ es el signo de su denominador). Entonces,

$$f \text{ es cóncava hacia abajo en } (-\infty, -\frac{1}{2}) \text{ y cóncava hacia arriba en } (-\frac{1}{2}; +\infty).$$

Finalmente, estudiamos el comportamiento de f en $+\infty$ y en $-\infty$: como vimos más arriba en el primer ítem del ejercicio 4 sobre cálculo de asíntotas oblicuas, la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ es asíntota oblicua del gráfico de f, tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

Con toda la información obtenida, podemos hacer un gráfico aproximado de f:



□

5. Aplicación: cantidad de soluciones de una ecuación

Como vimos al introducir funciones, el gráfico aproximado de una función f nos permite hallar $\mathrm{Im}(f)$ y calcular la cantidad de soluciones que tiene la ecuación $f(x) = k$ para distintos valores de k. En la entrada "Un ejemplo sobre cantidad de soluciones de una ecuación" se incluye un ejemplo analizado previamente que ilustra cómo puede hacerse esto.
A continuación vamos a usar este hecho.

Ejercicio 8. Sea $f(x) = \dfrac{6\ln(4x) - 9}{x^2}$. Hallar $\mathrm{Im}(f)$ y, para cada $k \in \mathrm{Im}(f)$, determinar la cantidad de soluciones de la ecuación $f(x) = k$.

Solución
Para resolver el problema, comenzaremos haciendo un estudio de la función f de manera de construir un gráfico aproximado.
Como f involucra un logaritmo y una división, para calcular el dominio de f tenemos que pedir que $4x > 0$ y $x^2 \neq 0$, con lo que resulta $\mathrm{Dom}(f) = (0; +\infty)$.

Analizamos el crecimiento y los extremos locales de f a partir de su derivada:

$$f'(x) = \frac{6.\frac{4}{4x}x^2 - (6\ln(4x) - 9)2x}{x^4} = \frac{6x - 12x\ln(4x) + 18x}{x^4} = \frac{24 - 12\ln(4x)}{x^3}.$$

El dominio de f' es $\mathrm{Dom}(f') = (0; +\infty) = \mathrm{Dom}(f)$. Entonces, los puntos críticos de f son exactamente los ceros de f':

$$f'(x) = 0 \iff \frac{24 - 12\ln(4x)}{x^3} = 0 \iff \ln(4x) = 2 \iff x = \frac{1}{4}e^2.$$

Para hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, basta determinar el signo de f' en cada uno de los dos intervalos en que este punto crítico parte al dominio:

x	$(0;\frac{1}{4}e^2)$	$\frac{1}{4}e^2$	$(\frac{1}{4}e^2;+\infty)$
$f'(x)$	$f'(1)>0$ $+$	0	$f'(3)<0$ $-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\frac{1}{4}e^2)=48e^{-4}$ max	$\searrow$

Concluimos entonces que f es estrictamente creciente en $(0;\frac{1}{4}e^2]$ y estrictamente decreciente en $[\frac{1}{4}e^2;+\infty)$ y, por lo tanto, f alcanza un máximo local en $x=\frac{1}{4}e^2$. Observemos que, más aún, se trata de un máximo absoluto.

No haremos en este caso un estudio de la concavidad del gráfico de f, ya que, como veremos, esa información no será necesaria a los efectos de resolver el problema planteado.

Pasamos entonces al cálculo de asíntotas, para lo cual estudiamos el comportamiento de f en los "bordes" de su dominio. Dado que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{6\ln(4x)-12}^{\to -\infty}}{\underbrace{x^2}_{\to 0^+}} = -\infty$$

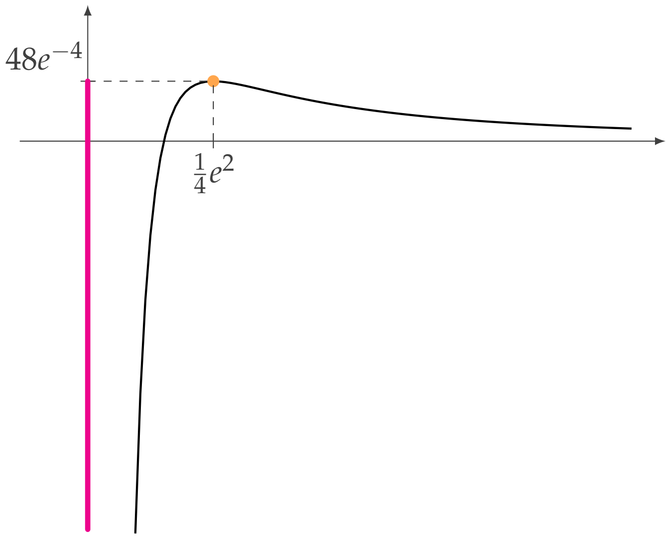
concluimos que la recta de ecuación $x=0$ es una asíntota vertical del gráfico de f.

Por otra parte,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{6\ln(4x)-12}^{\to +\infty}}{\underbrace{x^2}_{\to +\infty}} \underset{L'H:\ \text{indet. } \frac{\infty}{\infty}}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{6.\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}x}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$$

con lo cual, la recta de ecuación $y=0$ es asíntota horizontal del gráfico de f en $+\infty$.

Con esta información podemos construir un gráfico aproximado de la función:

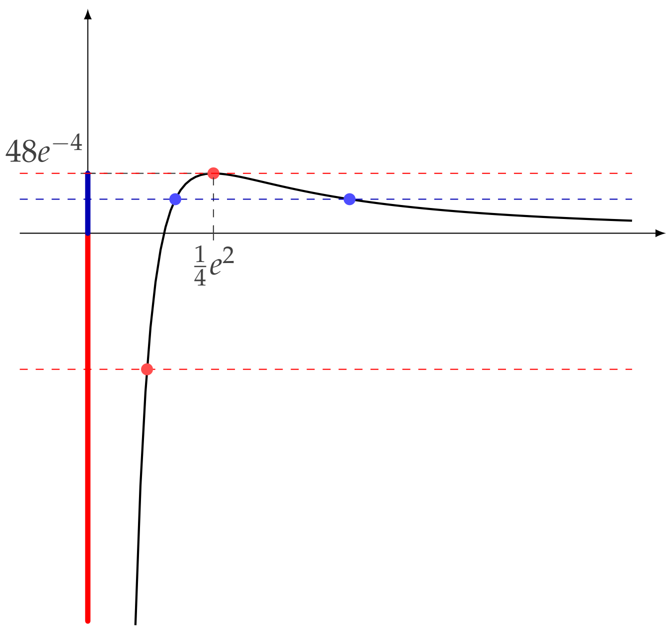


Volvamos ahora al problema original. Tenemos que f alcanza un máximo absoluto $M = 48e^{-4}$ en $x = \dfrac{1}{4}e^2$ y, además, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. Como f es continua, entonces toma todos los valores intermedios; luego,

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = (-\infty; 48e^{-4}].}$$

Gráficamente, vemos que las rectas horizontales que intersecan al gráfico de f son aquéllas que cortan al eje y en valores del intervalo $(-\infty; 48e^{-4}]$.

Observando el gráfico de f, podemos determinar también cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = k$ para cada $k \in \mathrm{Im}(f)$. Gráficamente, una solución de la ecuación $f(x) = k$ se corresponde con un punto de intersección de la recta $y = k$ con el gráfico de f.



Entonces, tenemos que:

- Para $k \in (-\infty; 0]$, la recta $y = k$ interseca al gráfico de f en un único punto; luego, la ecuación $f(x) = k$ tiene una única solución.
- Para $k \in (0; 48e^{-4})$, la recta $y = k$ interseca al gráfico de f en dos puntos; luego, la ecuación $f(x) = k$ tiene dos soluciones.
- Para $k = 48e^{-4}$, la recta $y = k$ interseca al gráfico de f en un único punto (donde f alcanza su máximo); luego, la ecuación $f(x) = k$ tiene una única solución.

$\square$

Ejercicio 9. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la ecuación $\dfrac{e^{2x+1}}{5x^2 - 8x - 4} = k$ tiene exactamente dos soluciones.

Solución

Si podemos estudiar la función $f(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{5x^2 - 8x - 4}$ y hacer un gráfico aproximado, podremos contestar la pregunta sobre la cantidad de soluciones como en el ejercicio anterior.

En primera instancia, calculamos el dominio de f. El único problema que surge es la imposibilidad de dividir por 0, por lo cual,

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \iff 5x^2 - 8x - 4 \neq 0.$$

Si usamos la fórmula de la resolvente para ecuaciones cuadráticas tenemos que:

$$5x^2 - 8x - 4 = 0 \iff x = 2 \quad \text{o} \quad x = -\frac{2}{5}$$

luego,

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-\frac{2}{5}, 2\}.$$

A continuación, para estudiar el crecimiento de la función f, calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{e^{2x+1}.2.(5x^2 - 8x - 4) - e^{2x+1}(10x - 8)}{(5x^2 - 8x - 4)^2} = \frac{e^{2x+1}(10x^2 - 26x)}{(5x^2 - 8x - 4)^2}.$$

El dominio de la derivada coincide con el de f (nuevamente, la única imposibilidad es dividir por 0 y el denominador de la derivada es igual al de f al cuadrado). Entonces, los puntos críticos de f son únicamente los ceros de f':

$$f'(x) = 0 \iff \frac{e^{2x+1}(10x^2 - 26x)}{(5x^2 - 8x - 4)^2} = 0$$

es decir, los elementos del dominio de f' tales que

$$e^{2x+1}(10x^2 - 26x) = 0 \underset{\substack{\downarrow \\ e^{2x+1}>0\ \forall x}}{\iff} 10x^2 - 26x = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = \frac{13}{5}.$$

Para hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, basta determinar el signo de f' en cada uno de los intervalos que quedan determinados por los valores fuera del dominio de f y por los puntos críticos. Como f' es continua en todo su dominio, podemos utilizar el corolario del teorema de Bolzano:

x	$(-\infty; -\frac{2}{5})$	$-\frac{2}{5}$	$(-\frac{2}{5}; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; \frac{13}{5})$	$\frac{13}{5}$	$(\frac{13}{5}; +\infty)$
$f'(x)$	$f'(-1) > 0$ $+$	$\nexists$	$f'(-\frac{1}{5}) > 0$ $+$	0	$f'(1) < 0$ $-$	$\nexists$	$f'(\frac{12}{5}) < 0$ $-$	0	$f'(2) > 0$ $+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	$-\frac{e}{4}$ max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$\frac{e^{\frac{31}{5}}}{9}$ min	$\nearrow$

Además de esta información, necesitaremos conocer posibles asíntotas verticales. Por esta causa, calculamos los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\frac{2}{5}^-} \frac{e^{2x+1}}{5x^2 - 8x - 4} = \lim_{x \to -\frac{2}{5}^-} \frac{e^{2x+1}}{5(x-2)(x+\dfrac{2}{5})} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\frac{2}{5}^+} \frac{e^{2x+1}}{5x^2 - 8x - 4} = \lim_{x \to -\frac{2}{5}^+} \frac{e^{2x+1}}{5(x-2)(x+\dfrac{2}{5})} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{e^{2x+1}}{5x^2 - 8x - 4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{e^{2x+1}}{5(x-2)(x+\dfrac{2}{5})} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{e^{2x+1}}{5x^2 - 8x - 4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{e^{2x+1}}{5(x-2)(x+\dfrac{2}{5})} = +\infty,$$

por lo que ya sabemos que las rectas $x = -\dfrac{2}{5}$ y $x = 2$ son asíntotas verticales al gráfico de f y cómo dicho gráfico se aproxima a cada recta por izquierda y por derecha.

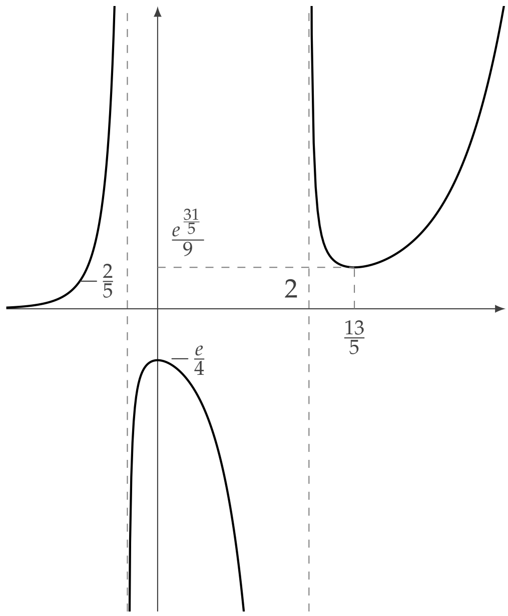
Para determinar cómo se comporta la función en los infinitos para poder hacer el gráfico aproximado, calculamos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^{2x+1}}^{\to 0}}{\underbrace{5x^2-8x-4}_{\to+\infty}} = 0 \qquad \text{y}$$

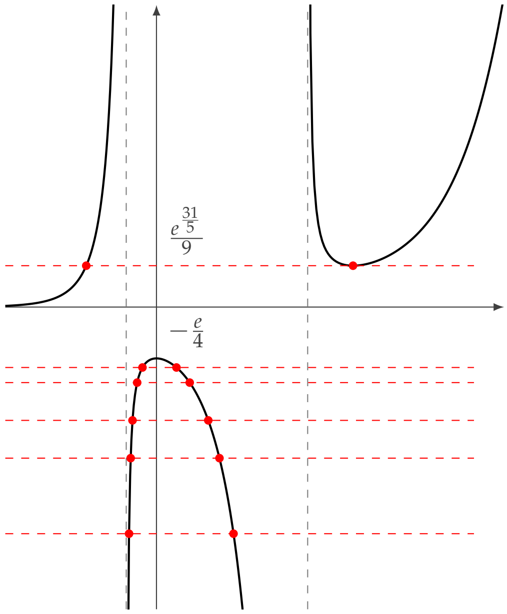
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{e^{2x+1}}^{\to+\infty}}{\underbrace{5x^2-8x-4}_{\to+\infty}} \underset{\text{L'H}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{2.e^{2x+1}}^{\to+\infty}}{\underbrace{10x-8}_{\to+\infty}} \underset{\text{L'H}}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{4.e^{2x+1}}^{\to+\infty}}{\underbrace{10}_{\to 10}} = +\infty.$$

Entonces, sabemos que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal al gráfico de f en $-\infty$ y que no hay asíntota horizontal en $+\infty$. Podríamos buscar asíntotas oblicuas en $+\infty$ pero esta información no es necesaria para poder contestar la pregunta sobre cantidad de soluciones de la ecuación. Igualmente, no es necesario calcular concavidad y convexidad porque con la información de la que ya disponemos nos alcanza para hacer un gráfico aproximado.

A partir de la información de la tabla y los límites calculados, podemos deducir que la función tiene un gráfico de la forma siguiente (sin respetar la escala, ya que los números involucrados son de distinta magnitud):



La ecuación $\dfrac{e^{2x+1}}{5x^2-8x-4} = k$ tiene exactamente dos soluciones para los valores de k tales que la recta horizontal de ecuación $y = k$ corta al gráfico de f en dos puntos. Analicemos en el siguiente dibujo lo que ocurre para los distintos valores de k:



Observamos que para $k \in (-\infty; -\frac{e}{4})$, la recta $y = k$ corta al gráfico de f en exactamente dos puntos. Para $k = -\frac{e}{4}$, la intersección está formada únicamente por el punto $(0, -\frac{e}{4})$. Para $k \in (-\frac{e}{4}; 0]$, la recta $y = k$ no corta al gráfico de f. Para $k \in (0; \frac{e^{\frac{31}{5}}}{9})$ hay un único punto en la intersección, para $k = \frac{e^{\frac{31}{5}}}{9}$ encontramos nuevamente dos puntos, y, finalmente, para $k > \frac{e^{\frac{31}{5}}}{9}$, vemos que la intersección consta de tres puntos.
Por lo tanto:

Todos los valores de k tales que la ecuación tiene exactamente dos soluciones son todos los $k \in (-\infty; -\frac{e}{4}) \cup \{\frac{e^{\frac{31}{5}}}{9}\}$.

$\square$

ANEXO

A. Criterio de concavidad

Daremos aquí una demostración del criterio de la derivada segunda para determinar concavidad.

Teorema. Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a;b]$ y derivable dos veces en $(a;b)$ tal que la derivada segunda f'' es positiva en el intervalo $(a;b)$. Entonces, f resulta cóncava hacia arriba en el intervalo $(a;b)$.

Demostración

Dados $x_0 < x_1$ dos valores fijos en el intervalo $(a;b)$, queremos mostrar que, para todo $x \in [x_0;x_1]$,

$$f(x) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Consideremos la función auxiliar $g : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) - f(x).$$

Vamos a hacer un análisis de la función g en el intervalo $[x_0;x_1]$.
Primero notemos que, evaluando g en x_0 y en x_1, resulta que $g(x_0) = 0$ y $g(x_1) = 0$.
Si derivamos, tenemos que

$$g'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - f'(x).$$

Por el teorema del valor medio de Lagrange, existe un punto $\xi \in (x_0;x_1)$ tal que

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi).$$

Luego, se tiene que

$$g'(x) = f'(\xi) - f'(x).$$

Nuevamente, usando el teorema de valor medio de Lagrange, pero ahora para f' en el intervalo $[\xi; x]$ (o $[x; \xi]$, dependiendo de cuál valor sea más chico), resulta que

$$g'(x) = f''(\eta)(\xi - x)$$

para algún valor intermedio η entre ξ y x.
Como por hipótesis sabemos que $f''(\eta)$ es positiva, resulta que $g'(x)$ será negativa cada vez que $\xi < x$ y $g'(x)$ será positiva cada vez que $\xi > x$. Además, el único punto donde vale cero es en ξ.
Luego, tenemos que nuestra función g satisface lo siguiente:

x	x_0	$(x_0; \xi)$	ξ	$(\xi; x_1)$	x_1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

Entonces, la función g es mayor o igual que cero en todo el intervalo en cuestión, con lo cual

$$g(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) - f(x) \geq 0 \qquad \text{para todo } x \in [x_0; x_1]$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \geq f(x) \qquad \text{para todo } x \in [x_0; x_1]$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Observación. Una demostración similar sirve para probar que si la derivada segunda de f es negativa en un intervalo, entonces f es cóncava hacia abajo en dicho intervalo.

Volver al texto principal

B. Un ejemplo sobre cantidad de soluciones de una ecuación

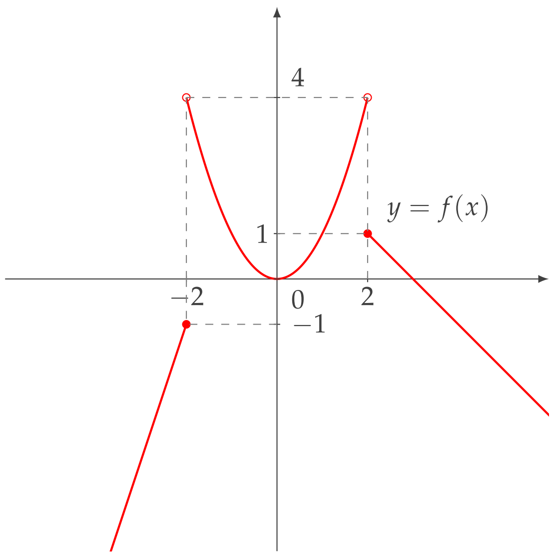
Recordemos el siguiente ejercicio de la unidad 1:

Ejercicio. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

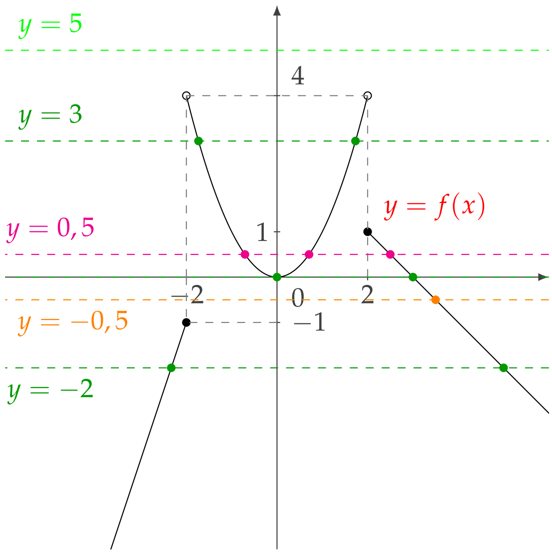
$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ -x+3 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Calcular la imagen de f y determinar la cantidad de soluciones de la ecuación $y = f(x)$ dependiendo del valor de y.

Solución
El gráfico de f es, aproximadamente, el siguiente:



A partir del gráfico puede verse que la *imagen* de f es $\boxed{\text{Im}(f) = (-\infty; 4)}$ (o lo que es lo mismo, los valores de y tales que la ecuación $y = f(x)$ tiene solución son los y estrictamente menores que 4).
Dependiendo de los valores de y, podemos ver la cantidad de soluciones x de la ecuación $y = f(x)$ en el gráfico siguiente:



Luego, la ecuación $y = f(x)$

- no tiene solución si $y \geq 4$;
- tiene solución única si $-1 < y < 0$;
- tiene dos soluciones si $y \leq -1$, $y = 0$ o $1 < y < 4$;
- tiene tres soluciones si $0 < y \leq 1$.

$\square$

Volver al texto principal

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Estudio de funciones, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.