Práctica 1

Funciones

Introducción

Muchos fenómenos (naturales, económicos o sociales, entre otros) pueden medirse comparando distintas magnitudes que intervienen en ellos y se interrelacionan. Por ejemplo:

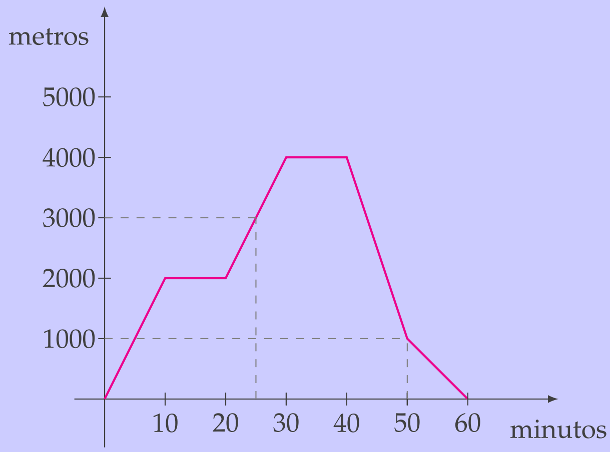
- La posición de un móvil *depende* del tiempo.
- El peso medio de los hombres *depende* de la edad.
- El impuesto a las ganancias a pagar *depende* de los ingresos de un ciudadano.

Todos sabemos que si compramos nafta, lo que pagamos cambiará en relación al volumen (cantidad de litros) de nafta que compremos. Las *funciones* son objetos matemáticos que permiten hacer explícita dicha relación expresando la *dependencia* de una magnitud respecto de otra u otras. Esta relación puede representarse de diversas formas (por medio de fórmulas, gráficos, diagramas y tablas, entre otras).

En lo que sigue, damos la noción del concepto de función desde el punto de vista matemático, observamos la importancia de sus gráficos y propiedades, y fijamos la notación necesaria para poder describirlas.
A continuación, estudiamos las funciones más usuales que son las herramientas con las que trabajamos en Análisis. Comenzamos por las funciones lineales, las cuadráticas, las polinómicas y las homográficas. El concepto de composición y de función inversa nos permite, a partir de las funciones exponenciales, definir las funciones logarítmicas. También se ven las definiciones de las funciones trigonométricas básicas y se estudian la función módulo y otras funciones que vienen dadas por una definición partida.

1. Generalidades

Ejemplo. Un avión viaja desde Buenos Aires hasta Bahía Blanca sin escalas. El siguiente gráfico describe aproximadamente la altura en metros del avión en función del tiempo desde que partió de Buenos Aires hasta que llegó a Bahía Blanca:



El gráfico anterior describe con bastante precisión la relación existente entre el tiempo y la altura. A partir del gráfico podemos, por ejemplo, afirmar lo siguiente:

- El viaje total duró 60 minutos.
- Durante los primeros 10 minutos, el avión ascendió.
- Los siguientes 10 minutos, el avión viajó a una altura constante de 2000 metros.
- Los siguientes 10 minutos, el avión siguió ascendiendo.
- Entre los 30 y 40 minutos de vuelo, el avión viajó a 4000 metros de altura, que es la altura máxima que alcanzó en este viaje.
- A los 40 minutos comenzó a descender.
- Entre los 40 y los 50 minutos el descenso fue más abrupto que entre los 50 y los 60 minutos (en los 10 minutos que pasaron entre los 40 y los 50 minutos el avión descendió 3000 metros y en los siguientes 10 minutos el avión sólo descendió 1000 metros).
- A los 50 minutos, por ejemplo, el avión estaba a 1000 metros de altura.
- Durante el viaje, la altura del avión varió desde 0 hasta 4000 metros.

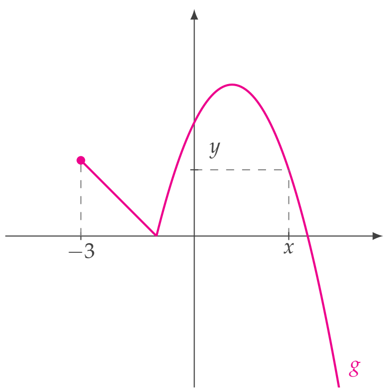
- Observando el gráfico, ¿a qué altura estaba el avión a los 25 minutos?

A partir de la situación anterior, podemos dar algunas definiciones y precisiones sobre el concepto de función. Si llamamos f a la función que relaciona la altura del avión con el tiempo, podemos decir:

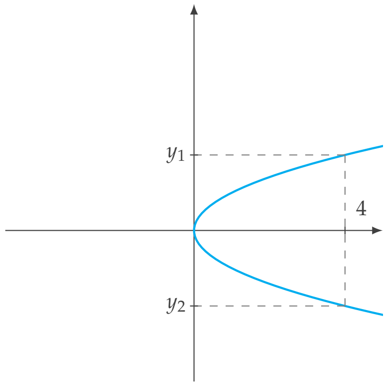
- ***Dominio:*** el lapso en el que nos interesa conocer la altura del avión es el tiempo que estuvo volando así que, en este caso, es el conjunto de números que va entre 0 y 60, lo que se indica por el intervalo $[0;60]$ (por definición, el intervalo $[a;b]$ simboliza el conjunto de números reales que son al mismo tiempo *mayores o iguales a a* y *menores o iguales a b*). Al intervalo de tiempo en que nos interesa saber la altura del avión, vamos a llamarlo el *dominio de la función* f y lo escribimos $\mathrm{Dom}(f)$. Es decir, en nuestro caso $\mathrm{Dom}(f) = [0;60]$.

- ***Noción de función:*** en cada instante en $[0;60]$ el avión estuvo a una *única* altura (claramente, un avión no puede estar a dos alturas distintas al mismo tiempo) y esto es algo que caracteriza a las funciones: para cada valor del dominio, una función f toma *únicamente un valor*. Por ejemplo, a los 20 minutos la altura era de 2000 metros y *no otra*, y a los 60 minutos la altura era de 0 metros (estaba sobre tierra) y *no otra*. Notemos, sin embargo, que en muchos momentos estuvo a la misma altura: por ejemplo, en todo instante entre los 30 y los 40 minutos el avión estuvo a 4000 metros de altura, pero insistimos en que es imposible que en un mismo instante estuviese a dos alturas distintas.

  Con esta restricción, podemos dar ejemplos de conjuntos de puntos del plano que sean gráficos de funciones y otros que no lo sean:



  El gráfico anterior corresponde a una función g con dominio el intervalo $[-3;+\infty)$ (por definición, el intervalo $[a;+\infty)$ simboliza el conjunto de números reales que son *mayores o iguales a a*): notemos que a cada elemento x de este conjunto representado sobre el eje de las abscisas (eje horizontal o eje x), g le asigna un único valor y sobre el eje de las ordenadas (eje vertical o eje y).



El gráfico anterior *no corresponde a una función*, ya que no hay un único valor asignado a cada valor de x (en el gráfico se muestra como, por ejemplo, al 4 sobre el eje x le corresponderían dos valores sobre el eje y).

- ***Imagen:*** durante el vuelo, el avión pasa por todas las alturas que van desde 0 (cuando está en el suelo) hasta 4000 metros (que es la altura máxima alcanzada). El conjunto de todos los valores que toma la segunda magnitud (la que se representa sobre el eje y) se llama *imagen de la función f* y lo escribimos $\text{Im}(f)$. Es decir, en nuestro caso $\text{Im}(f) = [0; 4000]$ (el conjunto de todos los números reales mayores o iguales a 0 y menores o iguales a 4000).

A continuación, damos la *notación* que usamos para trabajar con funciones, es decir, hacemos explícito cómo describimos a las funciones con símbolos matemáticos:

Notación: todas las funciones con las que trabajamos son funciones cuyo dominio es un conjunto A de números reales (el conjunto de todos los números reales se simboliza con la letra $\mathbb{R}$) y toman valores también reales. Esto lo escribimos de la siguiente forma

$$f : A \to \mathbb{R}$$

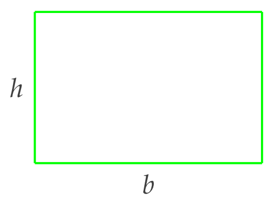
lo que se lee "*f es una función que va de A en $\mathbb{R}$*". Por ejemplo, para la función f que consideramos sobre la altura del avión del primer ejemplo, podemos escribir $f : [0; 60] \to \mathbb{R}$ y decir que f va del intervalo $[0; 60]$ en $\mathbb{R}$.
Cuando nos queremos referir al valor que toma una función f en un valor x del dominio, escribimos $f(x)$ y leemos "*f de x*". Por ejemplo, en el caso de la altura del avión, en vez de decir "a los 50 minutos el avión estaba a 1000 metros de altura" podemos escribir $f(50) = 1000$ y leer "*f de* 50 *es* 1000".

Como hemos visto en la situación anterior, el gráfico de una función nos permite dar una muy buena descripción del fenómeno que estamos estudiando. Por esta razón, uno de los objetivos del curso es poder graficar funciones a partir de la información que se disponga.

Ejercicio 1. Entre todos los rectángulos de perímetro 10, se quiere describir cómo varía el área A del rectángulo en función de la longitud de la base b.

Solución
Aquí tenemos dos magnitudes que se relacionan: el área del rectángulo y la longitud de la base. Podemos intentar escribir al área como función de la longitud de la base y hacer un gráfico.

Si el rectángulo a considerar es



tenemos que el dato sobre el perímetro se puede escribir como

$$2b + 2h = 10.$$

Por otro lado, sabemos que su área es

$$A = b.h.$$

Como queremos escribir el área en función de la longitud de la base, de la primera ecuación podemos obtener, despejando, que

$$h = \frac{10 - 2b}{2} = 5 - b.$$

Si reemplazamos el valor de h obtenido en la otra ecuación, resulta que

$$A = b.(5 - b) = 5b - b^2.$$

Para distintos valores de b obtenemos distintas áreas y, para notar esta dependencia, podemos escribir al área A del rectángulo como función de la longitud de la base b:

$$A(b) = 5b - b^2.$$

Notemos que esta fórmula nos dice que el área *es efectivamente una función* de la longitud de la base ya que, para cada valor de b, $A(b)$ toma un único valor. Por ejemplo, si la base mide 3 ($b = 3$), resulta que el área vale $A(3) = 5.3 - 3^2 = 6$.

Analicemos ahora el dominio de la función A:

- Los valores que puede tomar b son medidas de un lado de un rectángulo, con lo que seguro son números positivos (es decir, $b > 0$).
- Como el perímetro es 10, la base b no puede ser tan grande como se quiera, porque esta condición sobre el perímetro da una restricción para la longitud de la base. Por muy pequeña que sea la altura, siempre en el perímetro tenemos que sumar dos veces la longitud de la base, así que $2b < 10$ o, lo que es equivalente, $b < 5$.

Por las dos consideraciones previas, podemos afirmar que, para que la situación geométrica planteada tenga sentido, b debe satisfacer la condición $0 < b < 5$ (lo que puede escribirse $b \in (0; 5)$ y se lee "b pertenece al intervalo $(0; 5)$"). Esto nos da el dominio natural de la función área A en este caso: $\text{Dom}(A) = (0; 5)$.

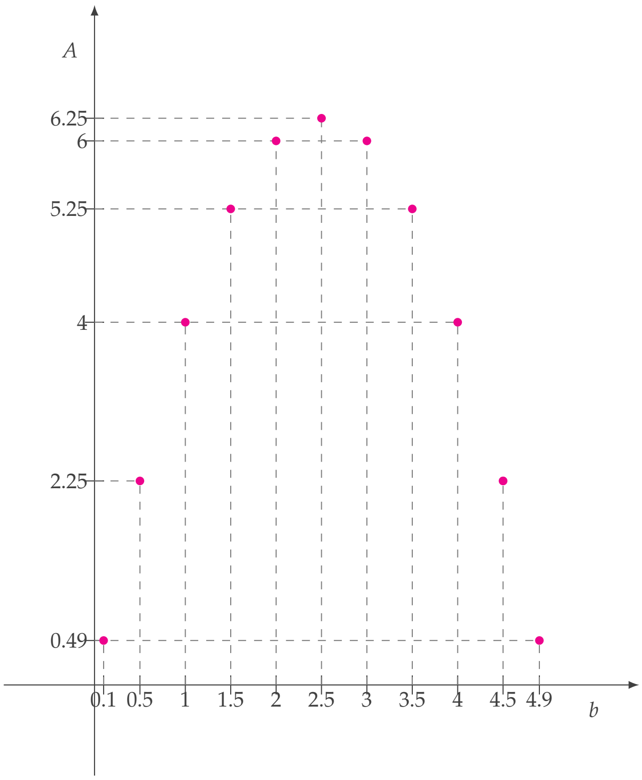
Podemos resumir lo obtenido hasta ahora para la función área A con la notación de funciones introducida anteriormente:

$$A : (0; 5) \to \mathbb{R}, \qquad A(b) = 5b - b^2.$$

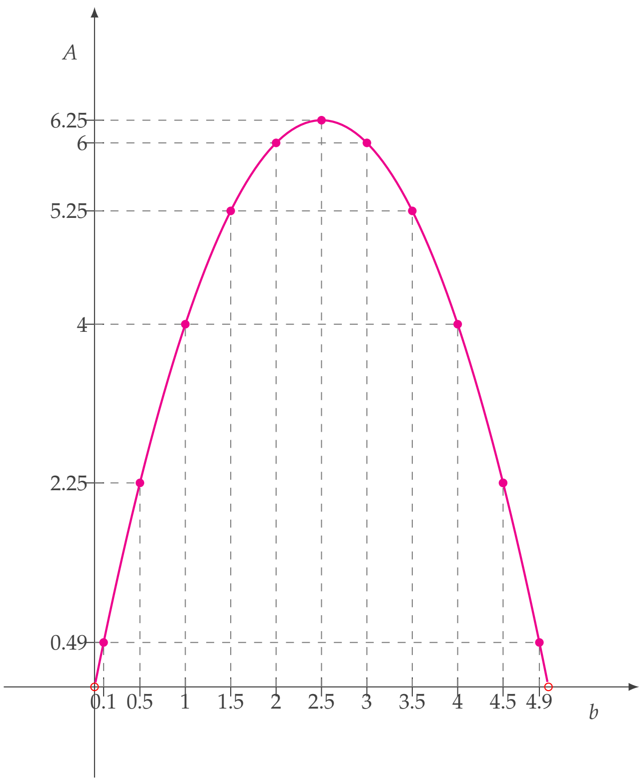
Notemos que este caso es diferente a la situación del avión: ahora tenemos a la función A dada por una fórmula y no por un gráfico. Vamos a hacer un gráfico aproximado de esta función por medio de una tabla de valores para estudiar cómo se comporta. Para la tabla de valores, debemos tener en cuenta que los valores de b deben estar en el intervalo $(0; 5)$ (los paréntesis en el intervalo significan que los extremos no se consideran, los corchetes, que sí):

b	$A(b) = 5b - b^2$
$0,1$	$0,49$
$0,5$	$2,25$
1	4
$1,5$	$5,25$
2	6
$2,5$	$6,25$
3	6
$3,5$	$5,25$
4	4
$4,5$	$2,25$
$4,9$	$0,49$

Graficamos en un sistema de ejes cartesianos los puntos obtenidos:



Si completamos el gráfico, nos da una idea de cómo es la función área A en función de la base b:



A partir de este gráfico podemos determinar varias propiedades de la función A:

Crecimiento: La función A es *creciente* en el intervalo $(0; 2,5)$: a medida que tomamos valores más grandes de b en este intervalo, los valores de $A(b)$ crecen cada vez más.

Decrecimiento: La función A es *decreciente* en el intervalo $(2,5; 5)$: a medida que tomamos valores más grandes de b en este intervalo, los valores de $A(b)$ se hacen cada vez más pequeños.

Máximo: La función A *toma su valor máximo en* $b = 2,5$ y *el valor máximo que alcanza es* $A(2,5) = 6,25$.

Notemos que, cuando la base tiene longitud $b = 2,5$, la altura mide $h = 5 - b = 2,5$, con lo que podemos afirmar que:

El área máxima entre todos los rectángulos de perímetro 10 la tiene el rectángulo que cumple $b = h = 2,5$ (que por tener igual medida de base y de altura resulta ser un *cuadrado*) y dicha área máxima es igual a $6,25$.

$\square$

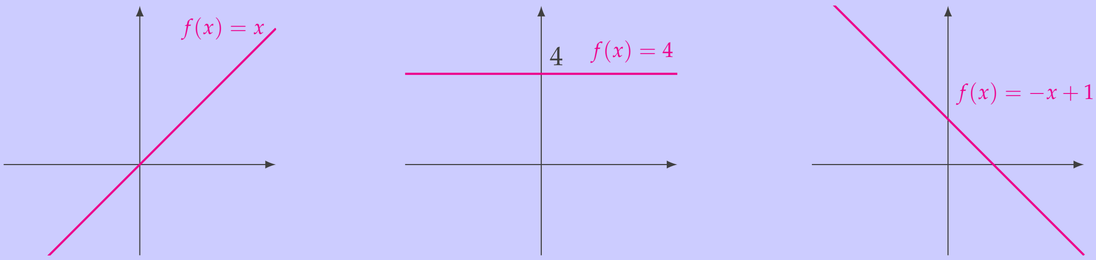
(El cuadradito blanco al final de un renglón denota que la resolución de un ejercicio o la demostración de una propiedad que se estaba desarrollando ha finalizado.)

2. Funciones usuales

En lo que sigue, vamos a repasar algunas familias de funciones conocidas que son las herramientas básicas de la materia.

2.1. Funciones lineales

Las *funciones lineales* son las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico es una recta:



Toda función lineal tiene una expresión de la forma

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son números reales fijos. El gráfico de esta función es la recta de ecuación

$$y = mx + b.$$

Al número m se lo llama la *pendiente* de la recta y a b, la *ordenada al origen* (notemos que $b = f(0)$ es el valor en el que la recta corta al eje y o eje de las ordenadas, de allí su nombre). Por ejemplo, la función $f(x) = 5x + 1$ tiene como gráfico una recta de pendiente $m = 5$ y ordenada al origen $b = 1$.

Ejercicio 2. Hallar la fórmula de una función lineal f que cumpla $f(2) = 1$ y $f(4) = 5$ y graficarla.

Solución
Resumamos en un cuadro la información que nos dan y qué nos piden:

DATOS
▪ f función lineal
▪ $f(2) = 1$
▪ $f(4) = 5$

$\rightsquigarrow$

OBJETIVO
▪ fórmula de f.
▪ gráfico de f.

Como f es una función lineal, tiene una expresión de la forma

$$f(x) = mx + b,$$

donde m y b son números fijos que queremos encontrar.
Sabemos que $f(2) = 1$ y, reemplazando $x = 2$ en la fórmula de f, obtenemos que

$$f(2) = m.2 + b.$$

En consecuencia, debe ser

$$2m + b = 1.$$

De la misma manera, como $f(4) = 5$, al reemplazar $x = 4$ en la ecuación de f se obtiene que

$$4m + b = 5.$$

Entonces m y b deben cumplir simultáneamente las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2m + b = 1 \\ 4m + b = 5 \end{cases}$$

Para hallar m y b podemos restar la primera ecuación menos la segunda y obtenemos así el valor de m:

$$\begin{aligned} (2m + b) - (4m + b) &= 1 - 5 \\ 2m + \cancel{b} - 4m - \cancel{b} &= -4 \\ -2m &= -4 \\ m &= \frac{-4}{-2} \\ m &= 2. \end{aligned}$$

Para obtener el valor de b, reemplazamos el valor de m en cualquiera de las dos ecuaciones originales y despejamos:

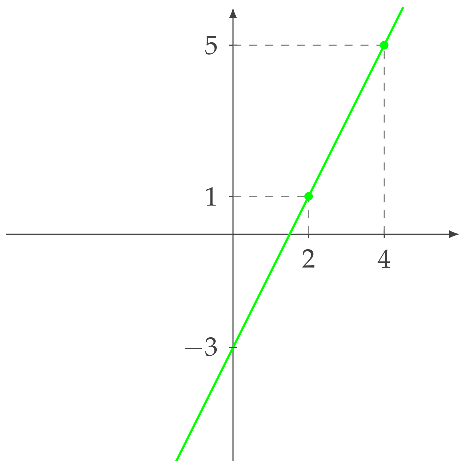
$$2m + b = 1 \iff 2.2 + b = 1 \iff b = 1 - 4 \iff b = -3.$$

(Noten que si reemplazamos en la otra ecuación, obtenemos el mismo resultado:

$$4m + b = 5 \iff 4.\,2 + b = 5 \iff b = 5 - 8 \iff b = -3.)$$

Al reemplazar los valores hallados, $m = 2$ y $b = -3$, en la expresión de $f(x)$ obtenemos la fórmula pedida $\boxed{f(x) = 2x - 3.}$

Todavía nos falta hacer el gráfico. Como sabemos que la función obtenida tiene por gráfico una recta, bastará dibujar dos puntos para poder determinarla. Por ejemplo, podemos usar los puntos $(2, f(2)) = (2, 1)$ y $(4, f(4)) = (4, 5)$ que nos dieron originalmente:



Con esto, obtuvimos todo lo requerido. □

Observaciones:

- El valor donde el gráfico corta al eje y es $f(0) = -3$ que es el valor de la ordenada al origen b, como ya observamos.

- Como al pedir $f(2) = 1$ y $f(4) = 5$, nos dieron *dos puntos* por donde tenía que pasar el gráfico de f y como *dos puntos determinan una recta en el plano*, la solución a nuestro problema es *única*.

- La función f es *creciente* (a medida que crece x, el valor de $f(x)$ crece). Todas las rectas con *pendiente positiva* son gráficos de funciones *crecientes* y las de *pendiente negativa* son gráficos de funciones *decrecientes*. Las rectas de pendiente 0 corresponden a funciones *constantes* (es decir, funciones para las que $f(x)$ vale siempre lo mismo independientemente del valor de x).

Ejercicio 3. Hallar la fórmula de la función f tal que su gráfico es una recta de pendiente $m = -\frac{1}{2}$ que pasa por el punto $P = (4, 3)$ y, luego, graficarla.

Solución

Sabemos que:

DATOS

- gráfico de f es una recta
- pendiente $m = -\frac{1}{2}$
- pasa por $P = (4, 3)$

$\rightsquigarrow$

OBJETIVO

- fórmula de f.
- gráfico de f.

Como el gráfico de f es una recta, tenemos que f resulta ser una función lineal. Como la pendiente de la recta es $m = -\frac{1}{2}$, la fórmula de f será

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + b,$$

para algún número real b.

Como sabemos que el punto $P = (4, 3)$ está en el gráfico de f,

$$f(4) = 3.$$

Evaluando en $x = 4$, tenemos

$$f(4) = -\frac{1}{2}.4 + b = -2 + b.$$

Entonces

$$-2 + b = 3,$$

con lo cual

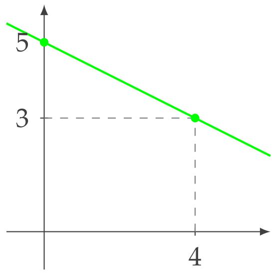
$$b = 5.$$

La función buscada es, entonces, $\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x + 5.}$

Para graficarla, basta dar un par de puntos que estén en el gráfico. El punto $(4, 3)$ ya nos fue dado como dato. Evaluando x en cualquier valor distinto de 4, obtenemos otro punto. Por ejemplo,

$$f(0) = -\frac{1}{2}.\,0 + 5 = 5,$$

es decir, el punto $(0, 5)$ será otro punto del gráfico de f (notemos que, como se mencionó antes, $5 = f(0)$ es la ordenada al origen, y por lo tanto, el valor donde la recta corta al eje y). Graficando, obtenemos



con lo que se concluye el ejercicio. □

Podemos observar que, en este caso, en el gráfico se ve que la función f es *decreciente* (lo que concuerda con el hecho de que su pendiente sea negativa).

Cuando modelamos una situación, las funciones lineales son las más sencillas para trabajar (aunque, lamentablemente, no toda situación satisface una relación lineal). En el siguiente ejercicio vemos un caso donde un modelo lineal describe exactamente la situación que queremos estudiar:

Ejercicio 4. La boleta mensual de consumo de electricidad tiene un cargo fijo de \$25 y \$0,02 por cada KWH consumido.

1. Dar la función lineal f que dice cuánto se debe pagar (en \$) en función de los KWH consumidos.
2. Si Pedro consume en un mes 300 KWH, ¿cuánto debe pagar?
3. Si Pedro debe pagar \$40, ¿cuánto consumió?
4. Representar gráficamente la situación.

Solución

Resolvamos cada ítem:

1. Primero, vamos a intentar encontrar la fórmula de la función f.

   La ordenada al origen b de la función f corresponde al gasto que se hace cuando no se consume electricidad, es decir, $b = 25$ (el cargo fijo).

   Por cada KWH consumido, el precio aumenta en \$0, 02, con lo que el gasto por x KWH consumidos será de $0,02x$.

   Entonces, el costo *total* en \$ cuando se consumen x KWH estará dado por la función

$$\boxed{f(x) = 0,02\,x + 25.}$$

   Una salvedad a tener en cuenta en este caso es que, como la cantidad de KWH consumida siempre es un número positivo o cero, la función f que nos interesa es una función lineal pero su dominio es $\text{Dom}(f) = [0; +\infty)$, es decir todos los números reales *mayores o iguales que* 0.

2. Si Pedro consume 300 KWH en un mes, debe pagar $f(300)$, es decir:

$$f(300) = 0,02\,.\,300 + 25 = \boxed{\$31.}$$

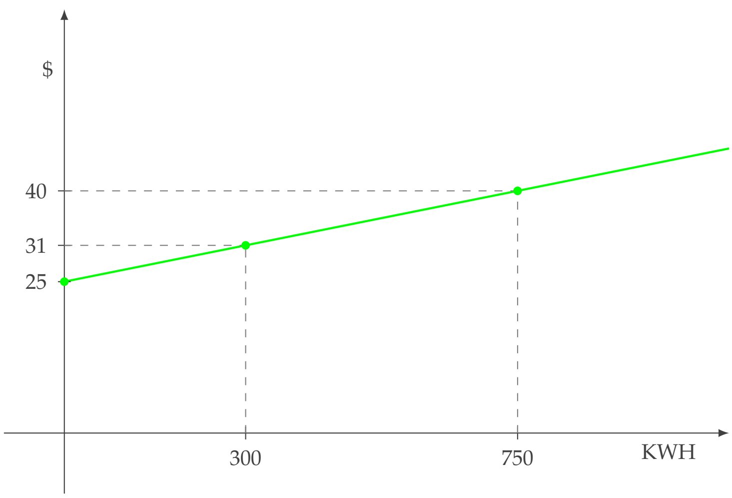
3. Si Pedro paga \$40, buscamos la cantidad x de KWH tal que $f(x) = 40$, es decir

$$0,02\,x + 25 = 40 \Leftrightarrow 0,02\,x = 40 - 25 \Leftrightarrow x = \frac{15}{0,02} = 750.$$

   Entonces

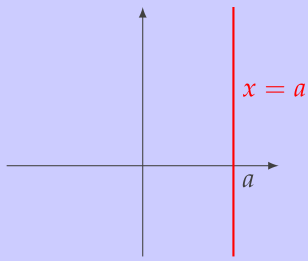
$$\boxed{x = 750 \text{ KWH.}}$$

4. Representamos lo anterior en el siguiente gráfico (en este caso usamos distintas escalas para el eje x y el eje y porque las cantidades involucradas son de distinta magnitud). Para esto podemos usar los puntos que obtuvimos en los otros ítems:



Con esto terminamos de resolver el ejercicio. □

Hay otro tipo de rectas en el plano que **no** son gráficos de funciones (ya que a un mismo valor de x le corresponden distintos valores de y): *las rectas verticales*. Estas rectas tienen una ecuación del tipo $x = a$ para un número real a fijo y están formadas por todos los puntos del plano cuya primera coordenada es a.



2.2. Funciones cuadráticas

Las *funciones cuadráticas* son las de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ fijos y $a \neq 0$.

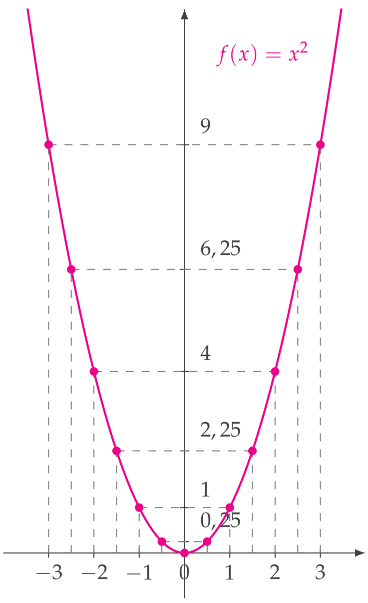
Ya estudiamos una de estas funciones en el ejercicio donde se describe cómo varía el área de un rectángulo de perímetro 10 en función de la base.

Ejemplo. Empecemos estudiando la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ (es decir, cuando $a = 1$, $b = 0$ y $c = 0$).

Para hacer un gráfico aproximado confeccionamos una tabla de valores:

x	$f(x) = x^2$
-3	9
$-2,5$	$6,25$
-2	4
$-1,5$	$2,25$
-1	1
$-0,5$	$0,25$
0	0
$0,5$	$0,25$
1	1
$1,5$	$2,25$
2	4
2.5	6.25
3	9

Un gráfico aproximado de esta función es



Algunas observaciones:

- La *imagen* de la función f, como se ve en el gráfico, es $\text{Im}(f) = [0; +\infty)$.
- La función f es *decreciente* en el intervalo $(-\infty; 0)$ y *creciente* en el intervalo $(0; +\infty)$.

- La función f sólo se anula en $x = 0$. En el resto de su dominio, es decir en $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, es *positiva* (es decir, para cualquier $x < 0$ ó $x > 0$, $f(x)$ toma valores positivos).

- La función alcanza un *mínimo* en $x = 0$ y el valor mínimo que toma es $f(0) = 0$.

- La curva obtenida se llama *parábola*. De hecho, el gráfico de cualquier función cuadrática es una parábola y todas las parábolas que son gráficos de funciones resultan ser gráficos de funciones cuadráticas. Otras funciones pueden tener gráficos parecidos pero *no* son parábolas.

  Todas las parábolas tienen un *eje de simetría* (en este caso, la recta $x = 0$) y el punto donde se corta este eje de simetría con el gráfico se llama *vértice de la parábola* (en este caso, el vértice es el punto $(0, 0)$).

El siguiente cálculo auxiliar (sacar a factor común y luego completar cuadrados) nos permite escribir a las funciones cuadráticas de una forma útil para describir sus propiedades:

$$ax^2 + bx + c \underset{\substack{\downarrow \\ a \neq 0 \text{ factor común}}}{=} a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{b}{a} = 2\frac{b}{2a}}}{=} a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sumar y restar } \frac{b^2}{4a^2}}}{=}$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}}{=} a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{sumando fracciones}}}{=} a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{distribuyendo } a}}{=} a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Con esto obtuvimos otra escritura para una función cuadrática. Es decir, para constantes x_v e y_v (más precisamente, para $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$), podemos escribir cualquier función cuadrática como

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\,(x - x_v)^2 + y_v.$$

Esta escritura nos permitirá hacer un análisis detallado de la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Para poder obtener las propiedades de f, separaremos el análisis en dos casos: cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$.

Primer caso: Analicemos primero qué pasa con

$$f(x) = a\,(x - x_v)^2 + y_v \quad \text{para} \quad a > 0 :$$

Una expresión al cuadrado siempre es mayor o igual que cero (nunca es negativa). Por lo tanto, tenemos que

$$(x - x_v)^2 \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ (es un cuadrado) y vale 0 si y sólo si $x = x_v$.

Como $a > 0$,

$$a\,(x - x_v)^2 \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ (es un producto de números no negativos) y vale 0 si y sólo si $x = x_v$.

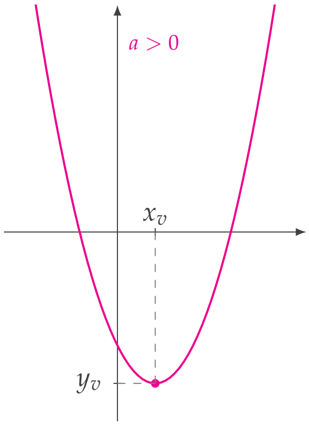
Luego, sumando y_v de ambos miembros,

$$f(x) = a\,(x - x_v)^2 + y_v \geq y_v$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y vale la igualdad si y sólo si $x = x_v$.

Por lo tanto, la función cuadrática f toma valores siempre mayores o iguales que y_v. Esto quiere decir que el valor *mínimo* que alcanza es y_v y lo alcanza en $x = x_v$. Es decir, el punto (x_v, y_v) es el *vértice* de la parábola que es gráfico de f.

Como la función f tiene un mínimo, las ramas de la parábola deben "ir hacia arriba" y la *imagen* de f es $\mathrm{Im}(f) = [y_v; +\infty)$.
Todo esto se puede ver en el siguiente gráfico:



Resumamos toda la información obtenida en este caso:

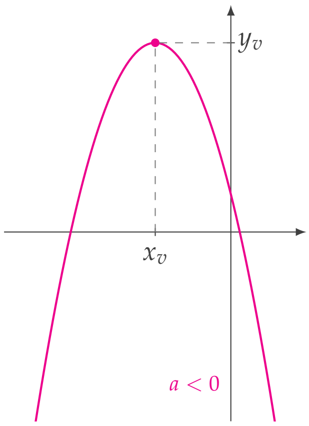
Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ **con** $a > 0$

- El *vértice de la parábola* es $(x_v, y_v) = \left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.
- El *eje de simetría de la parábola* es la recta vertical de ecuación $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- f puede escribirse como $f(x) = a\,(x - x_v)^2 + y_v$.
- El *mínimo* de f se alcanza en $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ y el valor mínimo que toma f es $f(x_v) = y_v = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.
- La *imagen* de f es $\operatorname{Im}(f) = \left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}; +\infty\right)$.
- f es *decreciente* en $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$.
- f es *creciente* en $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Segundo caso: En forma análoga, se puede analizar ahora qué pasa con

$$f(x) = a\,(x - x_v)^2 + y_v \quad \text{para} \quad a < 0$$

y su gráfico resulta



La información que se obtiene en este segundo caso es:

Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ **con** $a < 0$

- El *vértice de la parábola* es $(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.
- El *eje de simetría de la parábola* es la recta vertical de ecuación $x = -\frac{b}{2a}$.
- f puede escribirse como $f(x) = a\,(x - x_v)^2 + y_v$.
- El *máximo* de f se alcanza en $x_v = -\frac{b}{2a}$ y el valor máximo que toma f es $f(x_v) = y_v = \frac{4ac - b^2}{4a}$.
- La *imagen* de f es $\mathrm{Im}(f) = \left(-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$.
- f es *creciente* en $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.
- f es *decreciente* en $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Por último, podemos encontrar (cuando existan) los ceros o raíces de la función f, es decir, los valores de x tales que $f(x) = 0$. Si utilizamos la escritura anterior, tenemos que

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

y esta ecuación tiene solución cuando el miembro de la derecha es mayor o igual que cero, porque el miembro de la izquierda es un cuadrado. Como el denominador siempre es positivo, basta pedir que $b^2 - 4ac \geq 0$ (si no, la función no tiene ceros y el gráfico no toca el eje x). En este caso puede haber dos valores que sirven,

$$x_1 + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

con lo cual se deduce la siguiente afirmación:

Si $b^2 - 4ac \geq 0$, los valores donde $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale cero son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que son las fórmulas bien conocidas para calcular los *ceros o raíces* de una función cuadrática. Si $b^2 - 4ac < 0$, la función cuadrática no tiene raíces, es decir, nunca vale 0.

Ejercicio 5. Dada la función cuadrática $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, determinar su imagen, en qué intervalo crece, en qué intervalo decrece, en qué valor alcanza su extremo, en qué valores se anula, dónde es positiva y dónde es negativa.

Solución

Podemos resumir lo requerido por el ejercicio en un cuadro:

DATOS

- Fórmula $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

$\rightsquigarrow$

OBJETIVO

- Imagen.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Extremo.
- Ceros.
- Conjuntos de positividad y de negatividad.

Un método que nos va a resultar muy útil a lo largo de todo el curso es obtener información de una función a partir de su gráfico aproximado. En este caso, ya sabemos que, como f es una función cuadrática, su gráfico será una parábola, así que, en vez de dar una tabla de valores, usamos algunas de las propiedades que ya conocemos de estas funciones (observen que, para todas las cuentas $a = 2$, $b = -4$ y $c = -6$ pues $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$).

Primero, podemos calcular las coordenadas del vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.2} = 1$$

y, entonces,

$$y_v = f(x_v) = f(1) = -8,$$

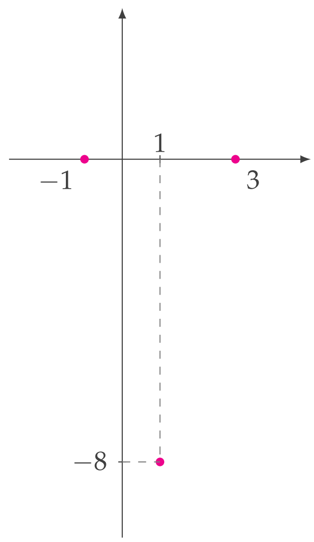
con lo que resulta que el vértice es el punto $(1, -8)$.

También podemos calcular, si existen, las raíces (notemos además, que estos valores forman parte de lo que nos piden):

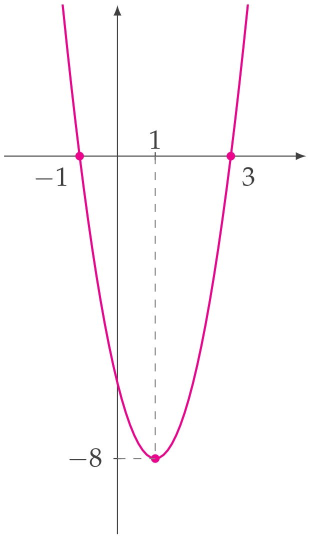
$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{16 - 4.2.(-6)}}{2.2} = 3 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{4 - \sqrt{16 - 4.2.(-6)}}{2.2} = -1,$$

es decir $f(-1) = 0$ y $f(3) = 0$.

Por lo anterior, el gráfico de la función f dada pasa por los siguientes tres puntos:



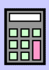
Con estos tres puntos, y sabiendo que el gráfico es una parábola de vértice $(1, -8)$, podemos hacer un gráfico aproximado de f:



(notemos que el valor de $a = 2 > 0$ y las ramas de la parábola van "hacia arriba" como dijimos anteriormente.)
Al estudiar el gráfico, sin necesidad de memorizar una larga lista de fórmulas para funciones cuadráticas (sólo calculamos el vértice y las raíces), podemos obtener toda la información pedida de la función f:

- La imagen de la función es $\text{Im}(f) = [-8; +\infty)$.
- La función decrece en $(-\infty; 1)$ y crece en $(1; +\infty)$.
- El extremo de la función es un mínimo que alcanza en $x = 1$. El valor mínimo que toma la función es $y = f(1) = -8$.
- Los ceros de la función son $x = -1$ y $x = 3$.
- La función toma valores positivos para los x en $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ y toma valores negativos para los x en $(-1; 3)$.

$\square$



2.3. Funciones polinómicas

En las funciones lineales, la variable x aparece elevada a 0 ó 1, en la cuadráticas, a 0, 1 ó 2. Si generalizamos esta situación, permitiendo que las potencias de la variable x que aparecen en la fórmula de una función sean números naturales o cero y que a estas potencias sólo se las pueda multiplicar por números fijos y sumar o restar, las funciones que se obtienen se llaman *funciones polinómicas*. Por ejemplo,

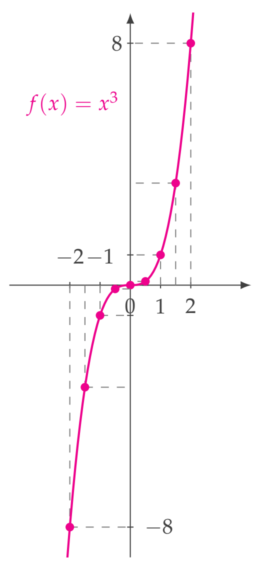
$$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x, \quad g(x) = 3x^4 - 7x + 1 \quad \text{y} \quad h(x) = x^5 + 3$$

son funciones polinómicas.

El estudio de una función polinómica puede ser muy complicado y, en algunos casos, se podrá hacer con herramientas que veamos a lo largo de la materia. Por ahora, como ejemplo, graficamos algunas funciones polinómicas básicas por medio de tablas de valores:

Ejemplo. Función $f(x) = x^3$

x	$f(x) = x^3$
-2	-8
$-1,5$	-3.375
-1	-1
$-0,5$	$-0,125$
0	0
$0,5$	$0,125$
1	1
$1,5$	$3,375$
2	8



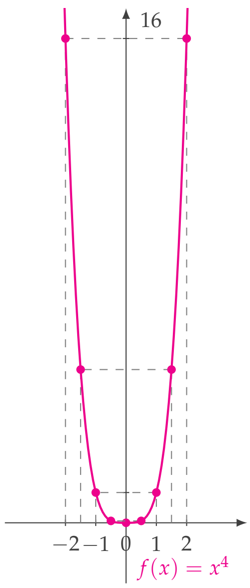
A partir del gráfico de $f(x) = x^3$ podemos dar algunas propiedades de esta función:

- La *imagen* de f es $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.
- La función *crece* en $\mathbb{R}$.

- El único *cero* de la función es $x = 0$.
- La función toma valores negativos para los x en $(-\infty; 0)$ y toma valores positivos para los x en $(0; +\infty)$.
- La función *no* tiene extremos.

Ejemplo. Función $f(x) = x^4$

x	$f(x) = x^4$
-2	16
$-1,5$	$5,0625$
-1	1
$-0,5$	$0,0625$
0	0
$0,5$	$0,0625$
1	1
$1,5$	$5,0625$
2	16



Nuevamente, a partir del gráfico de $f(x) = x^4$ podemos deducir algunas propiedades de esta función:

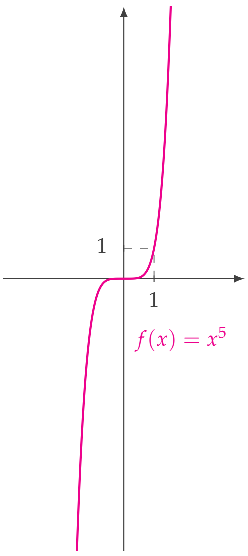
- La *imagen* de f es $\text{Im}(f) = [0; +\infty)$.
- La función *decrece* en $(-\infty; 0)$ y *crece* en $(0; +\infty)$.
- El único *cero* de la función es $x = 0$.
- La función toma valores positivos para los x en $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ y nunca toma valores negativos.
- La función alcanza un *mínimo* para $x = 0$ y el valor mínimo que alcanza es $f(0) = 0$.

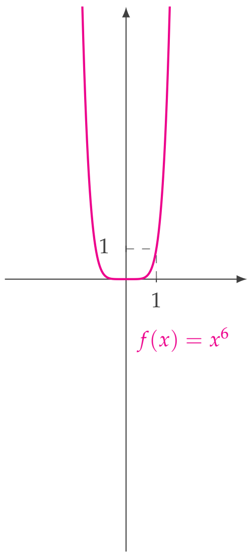
Observación

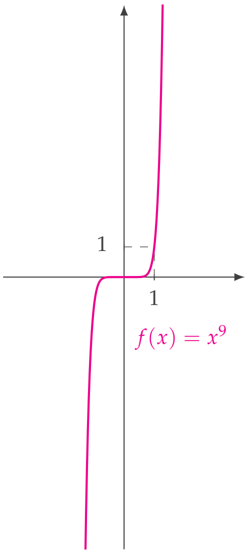
Las funciones de la forma $f(x) = x^n$ tendrán un comportamiento similar dependiendo de la *paridad* de n:

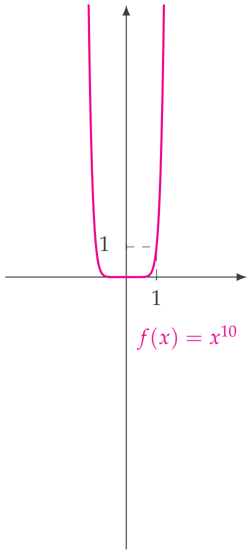
- Si n es par, la función f tiene propiedades similares a las funciones $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^4$ (la misma imagen, los mismos intervalos de crecimiento y decrecimiento y conjuntos de positividad y negatividad, el mismo cero, el mismo extremo y un gráfico similar). Esto sucede porque al elevar un número negativo a un exponente par el resultado da positivo.
- Si n es impar, la función f tiene propiedades similares a la función $j(x) = x^3$ (la misma imagen, crecimiento en todo $\mathbb{R}$, el mismo cero, los mismos conjuntos de positividad y de negatividad, no tendrá extremos y su gráfico será similar). Esto sucede porque al elevar un número a un exponente impar se mantiene el signo del número.

Veamos, por ejemplo, los gráficos de las siguientes funciones:









Analizar la monotonía de una función es decidir para qué valores de x la función crece y para qué valores decrece.

2.4. Funciones homográficas

Las *funciones homográficas* son las de la forma

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ fijos y tales que $c \neq 0$ y $ad - bc \neq 0$ (estas condiciones aseguran que la función no sea lineal).

Estas funciones tienen una restricción natural en su dominio, ya que **NO SE PUEDE DIVIDIR POR CERO**. Por esta causa,

$$cx + d \neq 0 \Leftrightarrow cx \neq -d \Leftrightarrow x \neq -\frac{d}{c}$$

y la función resulta no estar definida cuando $x = -\dfrac{d}{c}$. Por esto, tenemos que:

El *dominio* de $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ es $\mathrm{Dom}(f) = \left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

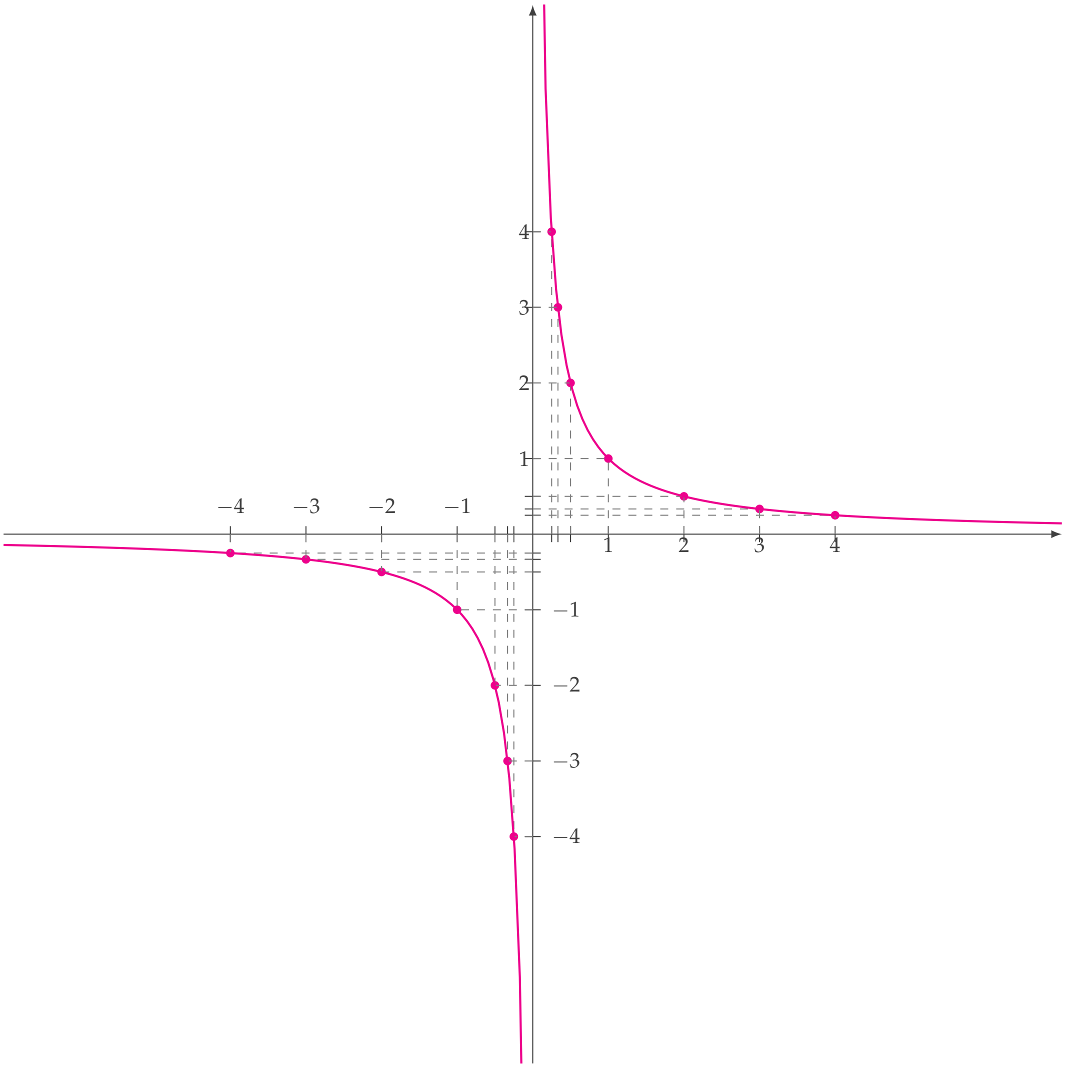
Ejemplo. Empecemos estudiando la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (es decir, cuando $b = c = 1$ y $a = d = 0$).

Para hacer un gráfico aproximado, damos una tabla de valores:

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-4	$-\frac{1}{4}$
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{3}$	-3
$-\frac{1}{4}$	-4

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$

Un gráfico aproximado de esta función es



Algunas observaciones:

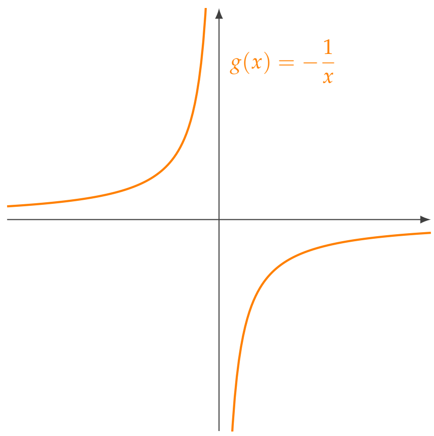
- La *imagen* de la función f, como se ve en el gráfico, es
$$\text{Im}(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

- La función f es *decreciente* en los intervalos $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$. Sin embargo, no es decreciente en todo su dominio ya que si tomamos un valor de cada intervalo, por ejemplo $-1 < 2$, resulta que $f(-1) = -1 < f(2) = 0{,}5$. Por esta razón, decimos que los *intervalos de decrecimiento* son $(-\infty; 0)$ *y* $(0; +\infty)$ y *no los escribimos como una unión* (es decir, no usamos el símbolo $\cup$).

- La función f no se anula nunca, es negativa en $(-\infty; 0)$ y es positiva en $(0; +\infty)$.

- La función *no* tiene extremos.

- La curva obtenida se llama *hipérbola*. De hecho, el gráfico de cualquier función homográfica es una hipérbola y es similar, salvo corrimientos o escala, a éste o al de $g(x) = -\dfrac{1}{x}$:



- Notemos que, cuando x se acerca a cero por izquierda y por derecha, el gráfico de la función se va acercando cada vez más a la recta vertical de ecuación $x = 0$. También, cuando x se hace muy grande (cuando en el gráfico nos vamos a la derecha) o muy chico (cuando en el gráfico nos vamos a la izquierda), el gráfico de la función se acerca cada vez más a la recta horizontal de ecuación $y = 0$. Estas rectas se llaman *asíntotas* al gráfico de f y su definición precisa se presentará más adelante en el curso.

> Dada la función homográfica $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, la *asíntota vertical* a su gráfico está dada por la ecuación $x = -\dfrac{d}{c}$, es decir que es la recta vertical que pasa por el valor que no está en el dominio de f.

El siguiente cálculo nos permite escribir a las funciones homográficas de una forma útil para encontrar su *asíntota horizontal*:

$$\frac{ax+b}{cx+d} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sumo y resto } \frac{ad}{c}}}{=} \frac{ax + \frac{ad}{c} - \frac{ad}{c} + b}{cx+d} \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{a}{c} \text{ factor común}}}{=} \frac{\frac{a}{c}(cx+d) - \frac{ad}{c} + b}{cx+d} =$$

$$\underset{\text{distribuyo denominador}}{\underset{\downarrow}{=}} \quad \frac{\frac{a}{c}\cancel{(cx+d)}}{\cancel{cx+d}} + \frac{-\frac{ad}{c}+b}{cx+d} \quad \underset{\text{operando}}{\underset{\downarrow}{=}} \quad \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

Como la función f es homográfica, $ad - bc \neq 0$ y entonces su opuesto $bc - ad \neq 0$. Esto nos asegura que

$$\frac{bc-ad}{c(cx+d)} \neq 0$$

y por lo tanto

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)} \neq \frac{a}{c}.$$

De esta cuenta, podemos deducir lo siguiente:

Sea f la función homográfica $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

- La *imagen* de f es $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$.
- La ecuación de la *asíntota horizontal* es $y = \dfrac{a}{c}$.

Ejercicio 6. Dada la función homográfica $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$, determinar su dominio y su imagen, indicar en qué intervalos es creciente o decreciente y realizar un gráfico aproximado.

Solución

Podemos resumir lo requerido en el ejercicio en un cuadro:

DATOS

- Fórmula:

$$f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$$

$\rightsquigarrow$

OBJETIVO

- Dominio.
- Imagen.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Gráfico aproximado.

Para calcular el dominio, recordemos que la única restricción presente es que no se puede dividir por cero. Por lo tanto, el denominador de la expresión de f no puede ser cero:

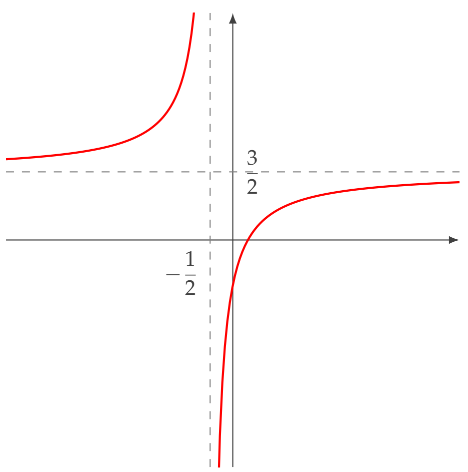
$$2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$$

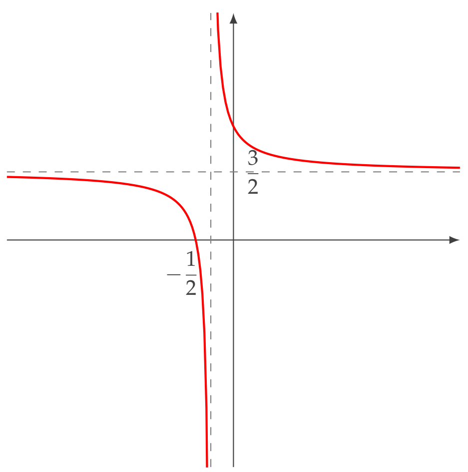
Por lo tanto $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}.}$

Por lo calculado en general anteriormente, tenemos que el único valor que no está en la imagen es $\frac{3}{2}$.

Luego $\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}.}$

Ya conocemos las ecuaciones de las asíntotas al gráfico: $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{3}{2}$. Esto nos asegura que el gráfico aproximado de f es alguno de los siguientes:

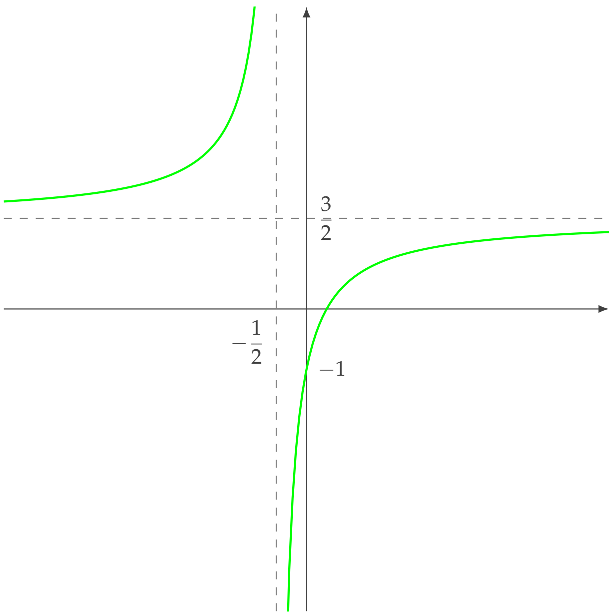




Para verificar cuál de los dos gráficos es el correcto, basta calcular $f(x)$ para algún valor de x. Por ejemplo,

$$f(0) = \frac{3.0 - 1}{2.0 + 1} = -1.$$

En el único caso en que $f(0)$ puede ser negativo es en el primero. Por lo tanto, el gráfico aproximado de f será



A partir del gráfico, podemos contestar la pregunta sobre la *monotonía* de f:

Los intervalos de crecimiento de f son $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. La función f no decrece en ningún intervalo.

□

2.5. Función raíz cuadrada

Dado un número real $a \geq 0$, se llama *raíz cuadrada de a* (lo que se nota $\sqrt{a}$) al único número positivo o cero que elevado al cuadrado da a.

Ejemplo. Si queremos calcular $\sqrt{4}$, buscamos un número x tal que $x^2 = 4$. Hay dos números reales que cumplen esta ecuación: 2 y -2, pero en la definición se aclara que la raíz cuadrada debe ser mayor o igual que 0, por lo que

$$\sqrt{4} = 2.$$

¿Por qué nos quedamos sólo con el valor positivo?
Porque queremos que la *raíz cuadrada* sea una *función* y, por la definición de función, la raíz cuadrada de un número debe ser única.

¿A qué números podemos sacarle *raíz cuadrada*?
Cuando elevamos un número al cuadrado, el resultado siempre es positivo o cero. Por lo tanto, sólo se les puede calcular raíz cuadrada a los números *mayores o iguales que* 0.

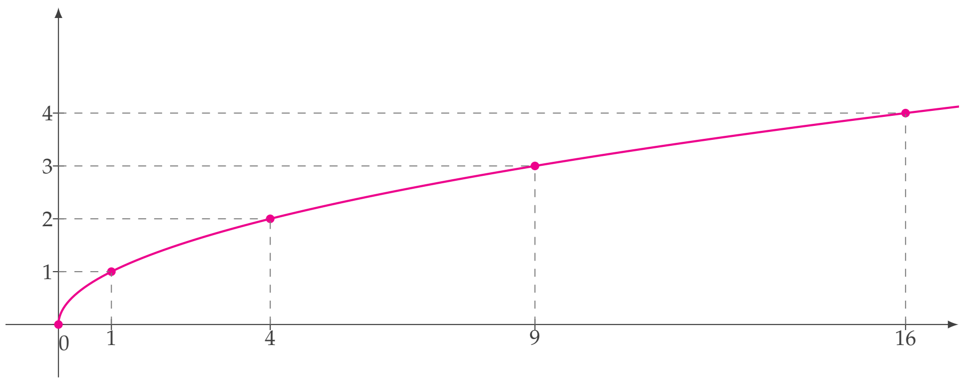
Con la notación de funciones ya usada, podemos escribir entonces

$$f : [0; +\infty) \to \mathbb{R} \qquad\qquad f(x) = \sqrt{x}.$$

Para hacer un gráfico aproximado de esta función, damos una tabla de valores, teniendo en cuenta que los valores de x deben ser mayores o iguales a 0:

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

Un gráfico aproximado de esta función es



Sea $f(x) = \sqrt{x}$.

- El *dominio* de la función f, como ya se discutió antes, es $\text{Dom}(f) = [0; +\infty)$.
- La *imagen* de la función f, como se ve en el gráfico, es $\text{Im}(f) = [0; +\infty)$.
- En cuanto a la *monotonía*, la función f es *creciente* en todo su dominio, es decir en $[0; +\infty)$.
- La función f se anula en $x = 0$ y es positiva en $(0; +\infty)$.
- La función alcanza un *mínimo* en $x = 0$ y el valor mínimo alcanzado es $0 = f(0)$.
- Notar que la curva obtenida es una *rama de parábola* ya que si intercambiamos los ejes, tenemos una rama del gráfico la función $g(x) = x^2$.

Ejercicio 7. Hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{3x^2 - 3}$.

Solución
Recordemos que el dominio de una función es el conjunto de valores donde está definida. En nuestro caso, como la función involucra una raíz cuadrada, la función estará definida siempre y cuando lo que esté dentro de la raíz sea mayor o igual que 0.

En símbolos:

$$x \in \text{ Dom}(f) \Leftrightarrow 3x^2 - 3 \geq 0.$$

Con este razonamiento, hemos reducido nuestro problema a calcular dónde la función cuadrática $g(x) = 3x^2 - 3$ es positiva o cero.

Para contestar esta última pregunta, podemos hacer un gráfico aproximado de g:

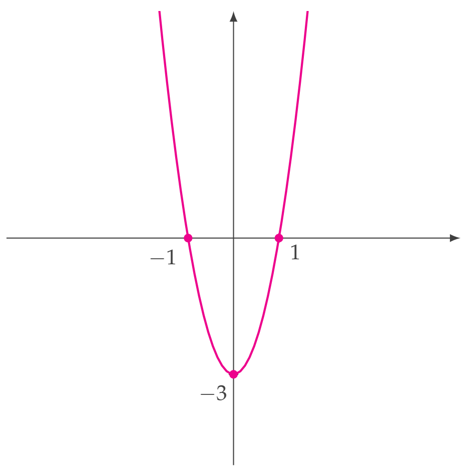
- El vértice del gráfico tiene primera coordenada $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2.3} = 0$ y segunda coordenada $y_v = g(x_v) = g(0) = -3$.

- Las raíces son los puntos donde $3x^2 - 3 = 0$. Para hallarlas podemos usar la fórmula de las raíces de una cuadrática, pero en este caso, puede hacerse despejando:

$$3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

  luego las raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

- Con la información anterior, un gráfico aproximado de g sería



A partir del gráfico de g, podemos afirmar que

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

y éste es el conjunto que estábamos buscando.

Por lo tanto,

$$\boxed{\text{Dom}(f) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).}$$

□

Observación importante.

¿Cuánto da $\sqrt{x^2}$?

Antes de contestar, veamos algunos ejemplos:

$$\begin{array}{cccccc}
\text{Si } x=0 & \sqrt{(0)^2} & = & \sqrt{0} & = & 0 \\
\text{Si } x=1 & \sqrt{(1)^2} & = & \sqrt{1} & = & 1 \\
\text{Si } x=-1 & \sqrt{(-1)^2} & = & \sqrt{1} & = & 1 \\
\text{Si } x=2 & \sqrt{(2)^2} & = & \sqrt{4} & = & 2 \\
\text{Si } x=-2 & \sqrt{(-2)^2} & = & \sqrt{4} & = & 2 \\
\text{Si } x=3 & \sqrt{(3)^2} & = & \sqrt{9} & = & 3 \\
\text{Si } x=-3 & \sqrt{(-3)^2} & = & \sqrt{9} & = & 3
\end{array}$$

Cualquiera sea el valor de x que tomemos, al elevarlo al cuadrado queda positivo o cero. Al sacarle raíz cuadrada nos da por definición un número positivo o cero , así que:

El valor de $\sqrt{x^2}$ es:

- Si $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$.
- Si $x < 0$, x es negativo y el resultado debe ser positivo (el opuesto de x) así que $\sqrt{x^2} = -x$.

3. Composición de funciones - Función inversa

3.1. Composición de funciones

Ejemplo. La relación entre la escala Kelvin (K) y la escala Celsius (ºC) está dada por la función $f(x) = x - 273$. Por ejemplo, a 273K le corresponde $f(273) = 273 - 273 = 0$ºC, con lo cual 273K y 0ºC son la misma temperatura medida en distintas escalas.

Por otro lado, la función $g(x) = 1,8\,x + 32$ expresa la temperatura en grados Fahrenheit (ºF) si x es la temperatura en grados Celsius. Por ejemplo, 30ºC equivalen a $g(30) = 1,8\,.\,30 + 32 = 86$ºF.

¿A qué temperatura en la escala Fahrenheit corresponden 300K?

Con los datos que tenemos podemos pasar de la escala Kelvin a la escala Celsius y, luego, de la escala Celsius a la escala Fahrenheit:

$$300\text{K} \rightsquigarrow f(300) = 300 - 273 = 27\text{ºC} \rightsquigarrow g(27) = 1,8\,.\,27 + 32 = 80,6\text{ºF}.$$

Con los datos anteriores, ¿es posible obtener una fórmula directa para relacionar la escala Kelvin y la Fahrenheit sin necesidad de pasar cada vez por la escala Celsius?

La respuesta es sí: supongamos que el valor en la escala Kelvin es x. Sigamos el mismo camino anterior pero para este x genérico. Primero aplicamos la función f:

$$x \rightsquigarrow f(x) = x - 273.$$

Ahora la temperatura en la escala Celsius es $x - 273$ y a esta temperatura la queremos pasar a la escala Fahrenheit, por lo que le aplicamos la función g

$$x - 273 \rightsquigarrow g(x - 273) = 1,8\,(x - 273) + 32 = 1,8\,x - 459,4$$

con lo cual la fórmula para pasar de la escala Kelvin a la escala Fahrenheit resulta

$$\boxed{h(x) = 1,8\,x - 459,4.}$$

Notemos que, partiendo de x, aplicamos primero la función f para obtener $f(x)$ y, luego, a este valor, le aplicamos la función g y obtenemos $h(x) = g(f(x))$.

Esta operación entre funciones (aplicar primero una y luego la otra) es muy usual y se llama *composición de funciones*:

Si f y g son funciones reales, se define la *composición de g con f* (también llamada *g compuesta con f*) a la función que se nota $g \circ f$ y cuya fórmula viene dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; es decir, dado un valor de x, primero se le aplica la función f y al valor obtenido se le aplica la función g.

Ejercicio 8. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ y $g(x) = x^2 - 3$, hallar las fórmulas de $g \circ f$ y de $f \circ g$. ¿Son la misma función?

Solución

Podemos resumir lo que nos piden en un cuadro:

DATOS

- $f(x) = \dfrac{1}{2x}$
- $g(x) = x^2 - 3$

$\rightsquigarrow$

OBJETIVO

- Fórmula de $g \circ f$.
- Fórmula de $f \circ g$.
- Decidir si son la misma función.

Obtengamos primero las fórmulas pedidas. Si x es un valor cualquiera, por la definición tenemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ahora podemos reemplazar $f(x)$ por su fórmula $\dfrac{1}{2x}$ y obtenemos

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{2x}\right).$$

El próximo paso es aplicar la función g a la expresión $\dfrac{1}{2x}$. Aplicar la función g a un número por definición es elevarlo al cuadrado y restarle 3. Entonces, si se la aplicamos a la expresión $\dfrac{1}{2x}$, hay que elevar la expresión al cuadrado y restarle 3:

$$g\left(\frac{1}{2x}\right) = \left(\frac{1}{2x}\right)^2 - 3.$$

Entonces, operando, tenemos

$$\boxed{(g \circ f)(x) = \frac{1}{4x^2} - 3.}$$

Para calcular la otra composición pedida, la definición nos dice que apliquemos las funciones en el otro orden:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Como antes, podemos reemplazar $g(x)$ por su fórmula $x^2 - 3$ y obtenemos

$$f(g(x)) = f(x^2 - 3).$$

El próximo paso es aplicar la función f a la expresión $x^2 - 3$. Por definición, aplicar la función f a un número es multiplicarlo por 2 e invertirlo. Entonces, si se la aplicamos a la expresión $x^2 - 3$, hay que multiplicar esta expresión por 2 e invertirla:

$$f(x^2 - 3) = \frac{1}{2(x^2 - 3)}.$$

Entonces, operando, tenemos

$$\boxed{(f \circ g)(x) = \frac{1}{2x^2 - 6}.}$$

Lo único que falta decidir es si las funciones $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{4x^2} - 3$ y $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 6}$ son la misma función.

A simple vista las fórmulas son distintas, pero habría que asegurarse que, operando, no se pueda transformar una en la otra. Para eso, podemos evaluar las dos funciones en un número fijo: si los resultados no coinciden, entonces las funciones son distintas (observar que, si dan lo mismo, lo único que podemos decidir es que valen lo mismo *en ese punto*).

Elijamos por ejemplo $x = 1$:

$$(g \circ f)(1) = \frac{1}{4.(1)^2} - 3 = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}$$

$$(f \circ g)(1) = \frac{1}{2.(1)^2 - 6} = -\frac{1}{4}$$

Como los dos valores son distintos, las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$ *NO* son la misma función. □

Como consecuencia de lo obtenido en el ejercicio anterior, podemos afirmar:

La composición de funciones *NO* es conmutativa (es decir, en general, $g \circ f \neq f \circ g$).

3.2. Función inversa

Ejemplo. Sabemos que la función $g(x) = 1{,}8\, x + 32$ expresa la temperatura en grados Fahrenheit (ºF) si x es la temperatura en grados Celsius.
¿A qué temperatura en grados Celsius corresponden 113ºF?

Notemos que, en este caso, no podemos reemplazar la x por 113, porque x es la temperatura en ºC. Nuestro problema ahora se traduce en averiguar qué valor de x hace que la temperatura en ºF sea 113. Es decir, buscamos x tal que

$$1{,}8\, x + 32 = 113.$$

Para esto, despejamos y obtenemos

$$x = \frac{113 - 32}{1{,}8} = 45$$

con lo cual 113ºF corresponden a 45ºC.

Con los datos anteriores, ¿podemos obtener una fórmula directa para, dada una temperatura en la escala Fahrenheit, obtener su equivalente en grados Celsius sin necesidad de despejar cada vez?

La respuesta nuevamente es sí. Supongamos que el valor en la escala Fahrenheit es y y su equivalente en la escala Celsius es x. Sigamos el camino anterior pero para estos valores genéricos, teniendo en cuenta que ahora y es el valor conocido y x es el valor buscado. Sabemos que

$$g(x) = y \Leftrightarrow 1{,}8\, x + 32 = y.$$

Como queremos hallar x, despejamos y obtenemos

$$x = \frac{y - 32}{1{,}8}.$$

Es decir, la función que, dada una temperatura y en la escala Fahrenheit, devuelve la temperatura equivalente en grados Celsius es

$$h(y) = \frac{y - 32}{1{,}8}.$$

Por una cuestión de convención, las variables de las funciones se notan con la letra x, así que escribimos

$$h(x) = \frac{x - 32}{1{,}8}.$$

A esta función h se la llama la función inversa de g:

Si g es una función real, se define la *función inversa de* g a la función que se nota g^{-1} y cuya fórmula viene dada por $g(x) = y \iff g^{-1}(y) = x$.

Observación: No cualquier función tiene inversa. Sin embargo, siempre que se pueda despejar x en función de y de manera única, la función inversa existe.

Ejercicio 9. Dada la función $f(x) = 2x - 3$, hallar su función inversa f^{-1}. Luego graficar ambas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados.

Solución

Como siempre, sinteticemos el ejercicio en un cuadro:

DATOS		OBJETIVO
▪ $f(x) = 2x - 3$	$\rightsquigarrow$	▪ Fórmula de f^{-1}. ▪ Gráficos de f y de f^{-1} en un mismo sistema de ejes.

Para hallar f^{-1} podemos escribir la fórmula de f como $y = 2x - 3$ y despejar x en función de y:

$$x = \frac{y+3}{2}.$$

Por la definición de f^{-1}, tenemos que

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x = \frac{y+3}{2} = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

Luego, la fórmula buscada es (después de reemplazar y por x)

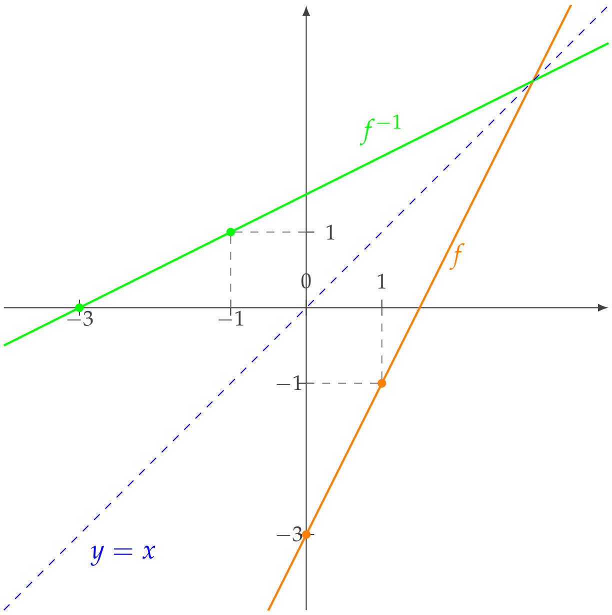
$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.}$$

Ahora grafiquemos las dos funciones en un mismo sistema de ejes coordenados. Como ambas son funciones lineales, basta encontrar dos puntos en cada gráfico y trazar las rectas correspondientes.

x	$f(x) = 2x - 3$
1	-1
0	-3

x	$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
-1	1
-3	0

Entonces, los gráficos pedidos son los siguientes:

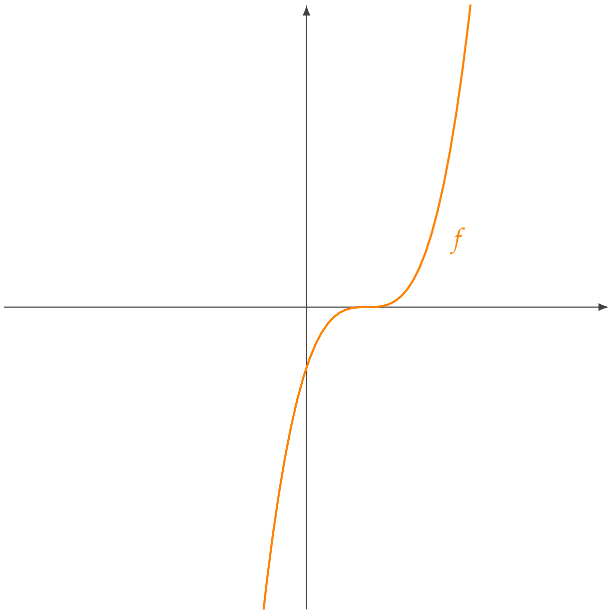


y con esto concluye la resolución del ejercicio. □

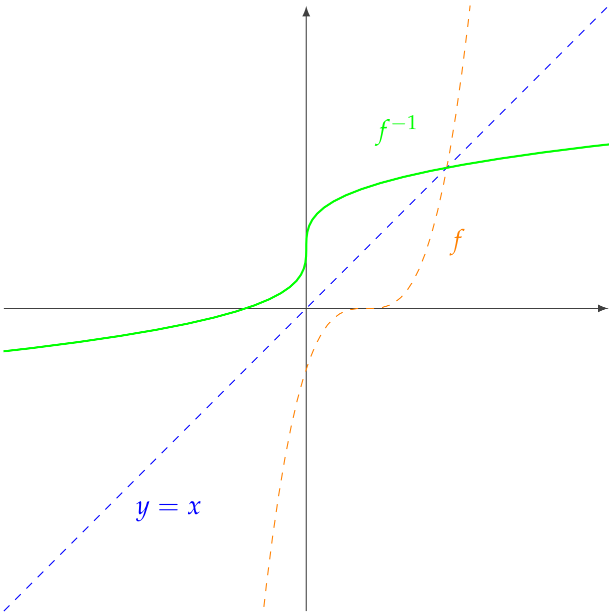
A partir del ejercicio anterior, realizamos la siguiente observación:

Como los puntos (x, y) e (y, x) son simétricos con respecto a la recta de ecuación $y = x$ y $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, los gráficos de f y f^{-1} también son simétricos con respecto a esta recta (es decir, esta recta funciona como "espejo" cuando queremos graficar f^{-1} a partir del gráfico de f). Esto vale para cualquier función f y su inversa f^{-1}.

Por ejemplo, si el gráfico de f es



entonces, el gráfico de f^{-1} será



Ejercicio 10. Hallar la función inversa de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ con $x \leq 2$. Luego graficar f y f^{-1} en un mismo sistema de ejes coordenados.

Solución

Como siempre, sinteticemos el ejercicio en un cuadro:

DATOS	$\rightsquigarrow$	**OBJETIVO**
• $f(x) = x^2 - 4x + 3$ • Dom $(f) = (-\infty; 2]$		• Fórmula de f^{-1}. • Gráficos de f y de f^{-1} en un mismo sistema de ejes.

Para obtener la fórmula de f^{-1} a partir de la de f, consideramos $y = x^2 - 4x + 3$ e intentamos despejar x en función de y. El problema aquí es el despeje. Para poder hacerlo, podemos usar la fórmula de la función cuadrática que involucra a las coordenadas del vértice que ya vimos:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

Como, en este caso, $a = 1$, $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 2$ e $y_v = f(2) = -1$, tenemos que

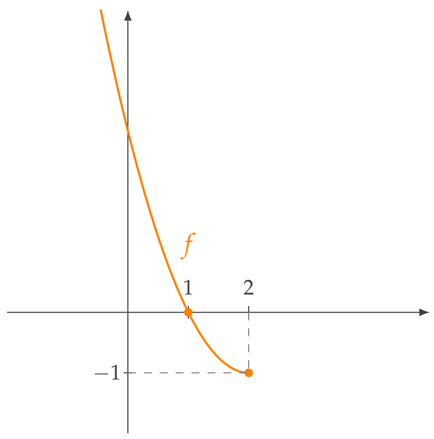
$$y = (x-2)^2 - 1.$$

Ahora sí podemos despejar x pero teniendo en cuenta que los valores de x que nos interesan deben ser menores o iguales que 2 y que una raíz cuadrada siempre es mayor o igual que 0:

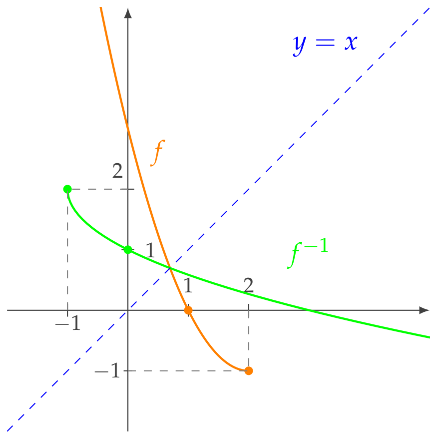
$$y + 1 = (x-2)^2 \quad \underset{\substack{\downarrow \\ x-2 \le 0}}{\Leftrightarrow} \quad \sqrt{y+1} = -(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \sqrt{y+1} = x$$

Entonces, la función inversa de f es $\boxed{f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}.}$

Para graficar ambas funciones en un mismo par de ejes, grafiquemos primero f. Esta función es cuadrática, con vértice en el punto $(2, -1)$ y sus raíces son 1 y 3. Como su dominio es $(-\infty; 2]$ el gráfico es solamente una rama de parábola:

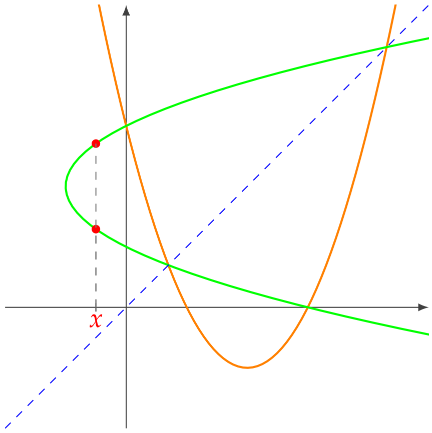


Como el gráfico de f^{-1} debe ser simétrico al de f respecto de la recta $y = x$, tenemos que los dos gráficos en un mismo sistema de ejes son



Con esto concluimos la resolución del ejercicio. $\square$

Observación:
Noten que si consideramos $f(x) = x^2 - 4x + 3$ con dominio $\mathbb{R}$, esta función no tiene inversa: gráficamente podemos ver que si existe la supuesta inversa habría valores de x para los cuales el valor de $f^{-1}(x)$ no sería único y esto contradice la definición de función.



Por esta razón, en el ejercicio anterior se pide hallar la inversa de la función cuadrática f con un dominio restringido donde sí tiene inversa.

Propiedad

Si f es una función y f^{-1} es su inversa, resulta que

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \qquad \text{y} \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

4.1. Funciones exponenciales

En esta sección, vamos a estudiar funciones que tienen a la variable x en el exponente.

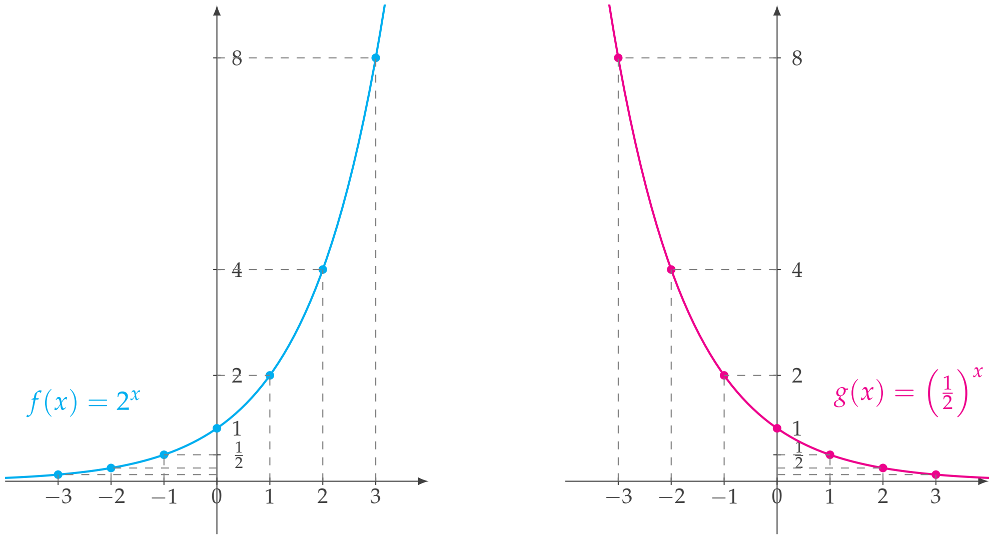
Ejemplo. Grafiquemos las *funciones exponenciales* $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Luego, determinemos su dominio y su imagen y analicemos su monotonía.

A partir de tablas de valores, es posible hacer los gráficos aproximados pedidos:

x	$f(x) = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

Los gráficos, entonces, son



A partir de los gráficos, podemos analizar el comportamiento de estas funciones:

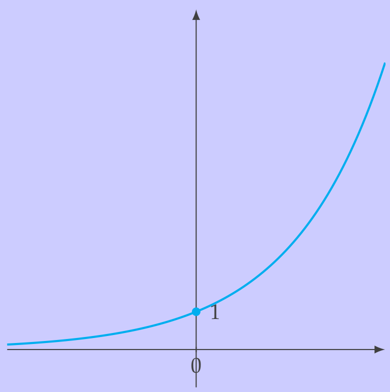
Función	Dominio	Imagen	Monotonía
$f(x) = 2^x$	$\mathbb{R}$	$(0; +\infty)$	creciente
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\mathbb{R}$	$(0; +\infty)$	decreciente

Este es el comportamiento general de las funciones exponenciales del tipo $h(x) = a^x$, dependiendo de si *la base* a es mayor o menor que 1. Las funciones exponenciales están definidas para $a > 0$ y, también, pedimos que $a \neq 1$ pues de lo contrario la función sería constante. Entonces, si resumimos, tenemos que:

Si $a > 1$, $h(x) = a^x$ satisface

Dominio	Imagen	Monotonía
$\mathbb{R}$	$(0; +\infty)$	creciente

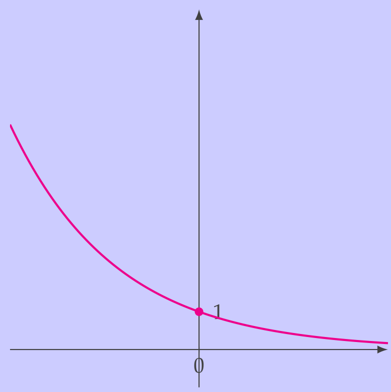
y el gráfico aproximado es de la forma siguiente:



Si $0 < a < 1$, $h(x) = a^x$ satisface

Dominio	Imagen	Monotonía
$\mathbb{R}$	$(0; +\infty)$	decreciente

y el gráfico aproximado es de la forma siguiente:



La función exponencial de base e, $h(x) = e^x$, es de particular interés por sus aplicaciones y propiedades. El número e es una constante cuyo valor aproximado es $e \cong 2,718281$ y cuya definición precisa se dará más adelante.

4.2. Funciones logarítmicas

Las *funciones logarítmicas* son las funciones inversas de las funciones exponenciales. A la inversa de la función $f(x) = a^x$ se la nota con $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ lo que se lee ”logaritmo en base a de x”.

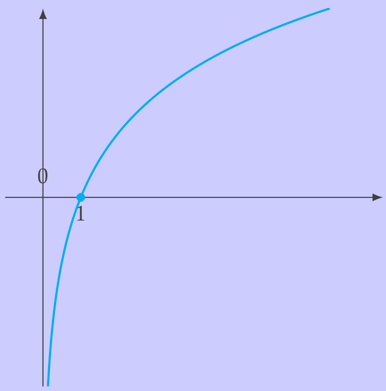
Por definición

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x$$

Por ejemplo, $\log_4(64) = y$ es lo mismo que decir que $4^y = 64$. Como $4^3 = 64$, resulta que $\log_4(64) = 3$.

Como las funciones logarítmicas son las inversas de las exponenciales, podemos obtener sus gráficos como los simétricos de los de las funciones exponenciales con respecto a la recta $y = x$. Entonces, para la función $h(x) = \log_a(x)$ tenemos que:

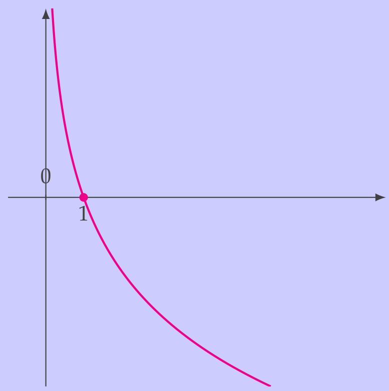
Si $a > 1$, el gráfico aproximado de $h(x) = \log_a(x)$ es de la forma



y entonces,

Dominio	Imagen	Monotonía
$(0; +\infty)$	$\mathbb{R}$	creciente

Si $0 < a < 1$, el gráfico aproximado de $h(x) = \log_a(x)$ es de la forma



y entonces,

Dominio	Imagen	Monotonía
$(0; +\infty)$	$\mathbb{R}$	decreciente

Como, para a fijo, la función $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ es la inversa de $f(x) = a^x$, resulta que

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{y} \qquad \log_a(a^x) = x.$$

Notación: en el caso en que la base del logaritmo sea el número e, el logaritmo se llama logaritmo natural y se nota $\log_e(x) = \ln(x)$.

Ejercicio 11. Dada la función $f(x) = \ln(6x-3)$, determinar su dominio, hallar todos los valores de x para los que $f(x) = 0$ y calcular la fórmula de su función inversa f^{-1}.

Solución

Como antes, resumamos el ejercicio en un cuadro:

DATOS

- $f(x) = \ln(6x-3)$

$\rightsquigarrow$

OBJETIVO

- Dominio de f.
- Conjunto de ceros de f.
- Fórmula de f^{-1}.

En primer lugar, calculemos el dominio de la función. Cualquier función logarítmica puede calcularse, como vimos antes, en valores positivos. Entonces se debe pedir que el argumento al que aplicamos el logaritmo natural sea positivo:

$$6x - 3 > 0 \iff 6x > 3 \iff x > \frac{1}{2}$$

Esto nos dice que $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).}$

Para decidir cuándo $\ln(6x-3) = 0$, podemos aplicar la definición del logaritmo natural:

$$\ln(6x-3) = 0 \quad \underset{\text{definición de ln}}{\overset{\Leftrightarrow}{\downarrow}} \quad e^{\ln(6x-3)} = e^0 \quad \underset{\text{propiedad de la composición}}{\overset{\Leftrightarrow}{\downarrow}} \quad 6x - 3 = 1$$

y despejamos:

$$6x - 3 = 1 \Leftrightarrow 6x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

por lo cual

$$\boxed{\ln(6x-3)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.}$$

Lo único que falta hacer es calcular la función inversa de f. Para eso, como antes, partimos de la igualdad $y = f(x)$ y despejamos x en función de y:

$$y=\ln(6x-3) \quad \underset{\text{aplicamos exponencial}}{\underset{\downarrow}{\Leftrightarrow}} \quad e^y = e^{\ln(6x-3)} \quad \underset{\text{propiedad de la composición}}{\underset{\downarrow}{\Leftrightarrow}} \quad e^y = 6x-3$$

y seguimos despejando,

$$e^y = 6x-3 \Leftrightarrow e^y+3 = 6x \Leftrightarrow \frac{e^y+3}{6} = x.$$

Por lo anterior, resulta que

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{e^x+3}{6}.}$$

□

Ejercicio 12. Hallar la inversa de la función $f(x) = e^{x+1} - 2$.

Solución

Nuevamente llamamos $y = f(x)$ y despejamos x en función de y:

$$y = e^{x+1} - 2 \Leftrightarrow y+2 = e^{x+1} \Leftrightarrow \ln(y+2) = \ln(e^{x+1}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln(y+2) = x+1 \Leftrightarrow \ln(y+2) - 1 = x.$$

Entonces, en este caso, $\boxed{f^{-1}(x) = \ln(x+2) - 1.}$ □

5. Funciones trigonométricas

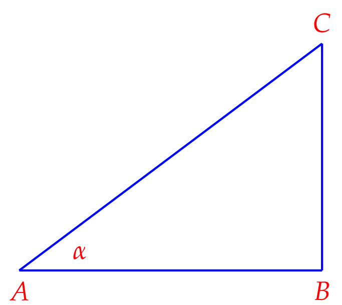
Radianes. En lo que sigue, vamos a trabajar con ángulos. Por las buenas propiedades que tiene desde el punto de vista del análisis, la unidad de medida de ángulos que se utiliza es el *radián*. La medida de un ángulo en radianes equivale al recorrido del arco de dicho ángulo en una circunferencia de radio 1. Por ejemplo, si queremos medir en radianes un ángulo de 360°, su arco recorre toda la circunferencia que tiene longitud 2π . 1 (pues el radio es 1) con lo cual

$$360^\circ = 2\pi.$$

Con esta equivalencia y por proporcionalidad directa, estamos en condiciones de calcular cuánto vale en radianes cualquier ángulo dado en grados. Por ejemplo:

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

Consideremos un triángulo rectángulo como el de la siguiente figura:



Para el ángulo agudo α se definen los valores del seno y del coseno de α de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \qquad \text{y} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Estos valores dependen únicamente de la medida del ángulo α y no del tamaño del triángulo rectángulo. Es decir, si cambiamos el triángulo rectángulo por otro con ángulo α, los cocientes anteriores valen lo mismo.

Si calculamos

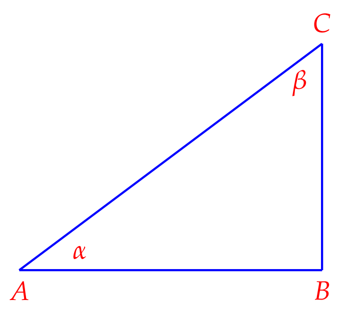
$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} + \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \underbrace{=}_{\text{por Pitágoras}} \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2} = 1.$$

La identidad $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ vale para cualquier valor que tome α y se llama la *identidad pitagórica.*

A continuación damos algunos valores del seno y del coseno:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

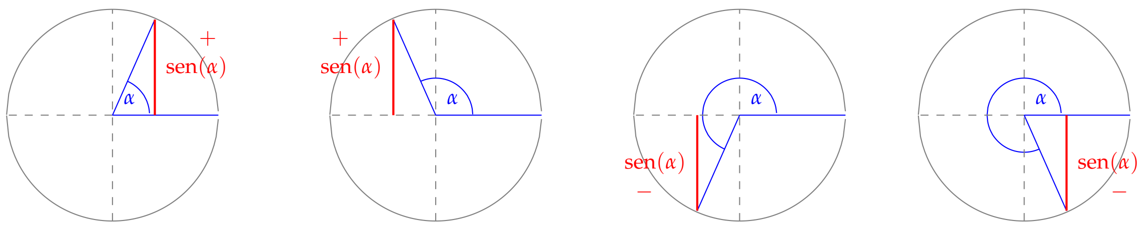
Notemos que, cuando dos ángulos α y β son *complementarios* (es decir, suman $\frac{\pi}{2}$), el seno de uno es el coseno del otro y viceversa, pues son los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo:



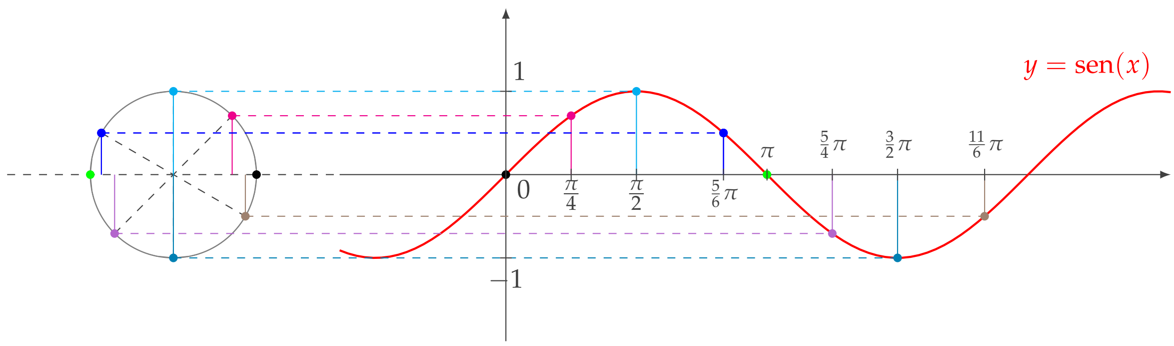
Por ejemplo, en la figura, $\operatorname{sen}(\beta) = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \cos(\alpha)$.

Extensión del seno y del coseno a ángulos en el intervalo $[0; 2\pi]$ y luego a cualquier valor real:

Consideremos primero el seno. Dibujamos una circunferencia de radio 1, y en cada caso, la medida del segmento vertical es el valor de $\operatorname{sen}(\alpha)$, ya que la hipotenusa del triángulo coincide con el radio, que vale 1. En los dos primeros casos, el seno será positivo y en los últimos dos, será negativo:

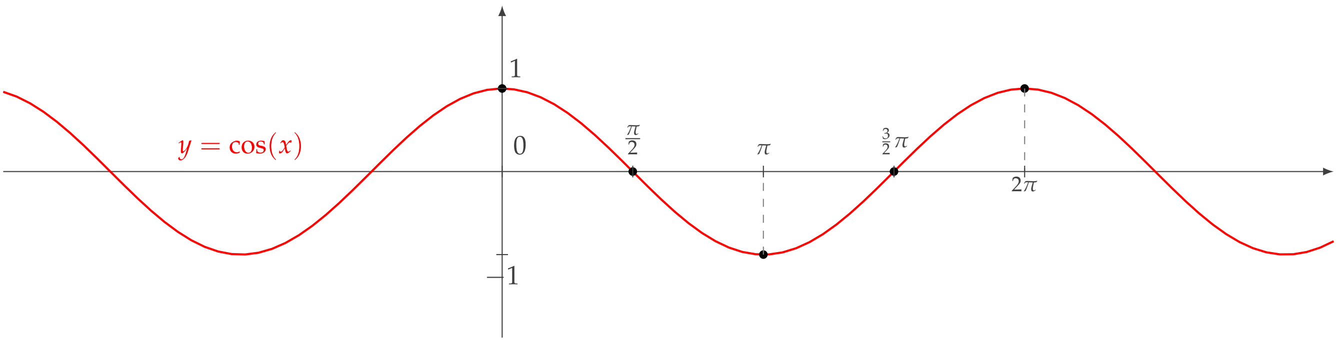


De esta manera, se puede definir el seno de cualquier ángulo entre 0 y 2π, y para los números mayores o menores, se considera el valor del seno del ángulo que forman sin contar las vueltas de más que se den en sentido horario o antihorario. Entonces, tenemos la función $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que podemos graficar usando la circunferencia de radio 1 como auxiliar:



La función $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dibujada arriba en rojo tiene por dominio a $\operatorname{Dom}(\operatorname{sen}) = \mathbb{R}$, su imagen es $\operatorname{Im}(\operatorname{sen}) = [-1; 1]$ y es periódica de período 2π, es decir que la función se repite cada 2π o, escrito más formalmente, $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Un estudio similar al hecho con la función seno puede hacerse con la función coseno y se obtiene el siguiente gráfico:



La función $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dibujada arriba en rojo tiene por dominio a $\text{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$, su imagen es $\text{Im}(\cos) = [-1; 1]$ y también es periódica de período 2π.

Ejercicio 13. A partir del gráfico de $f(x) = \cos(x)$, graficar $g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$.

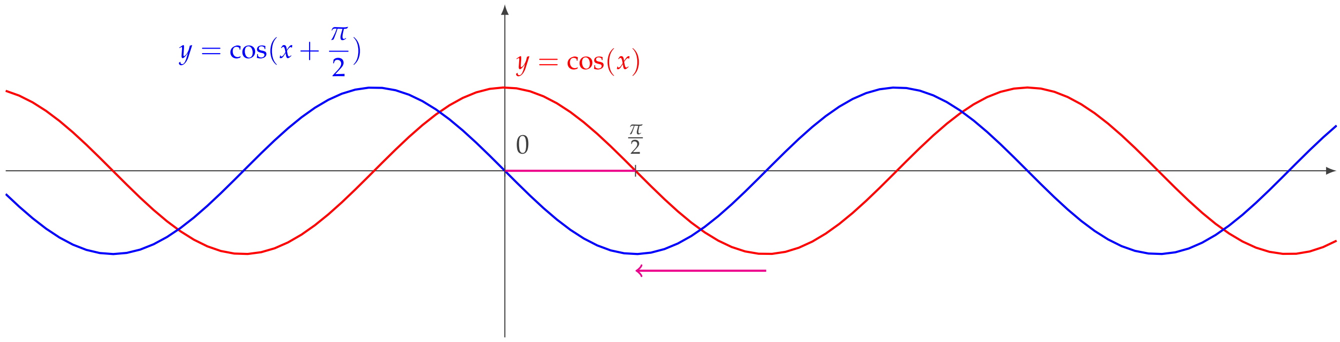
Solución

La consigna del ejercicio nos pide que, a partir del gráfico conocido de la función coseno, hallemos el gráfico de la función $g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$. Para eso, podemos comparar dos tablas de valores:

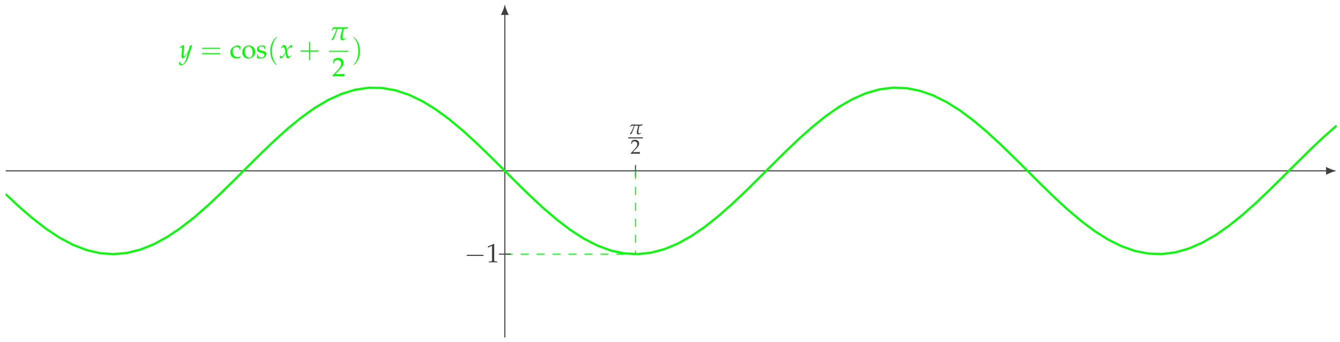
x	$f(x) = \cos(x)$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	-1
$\frac{3}{2}\pi$	0
2π	1

x	$g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$
$-\frac{\pi}{2}$	1
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	-1
π	0
$\frac{3}{2}\pi$	1

Notemos que la función $g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ toma los mismos valores que $f(x) = \cos(x)$, pero los toma $\frac{\pi}{2}$ unidades antes, con lo cual, el gráfico de g va a ser similar al de f pero corrido $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda:



Luego, el gráfico pedido es



□

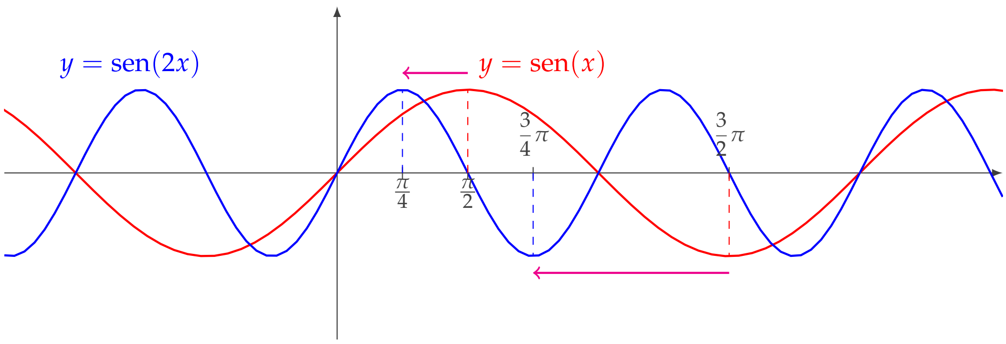
Ejercicio 14. A partir del gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$, graficar $g(x) = \text{sen}(2x)$.

Solución
Nuevamente, podemos comparar dos tablas de valores:

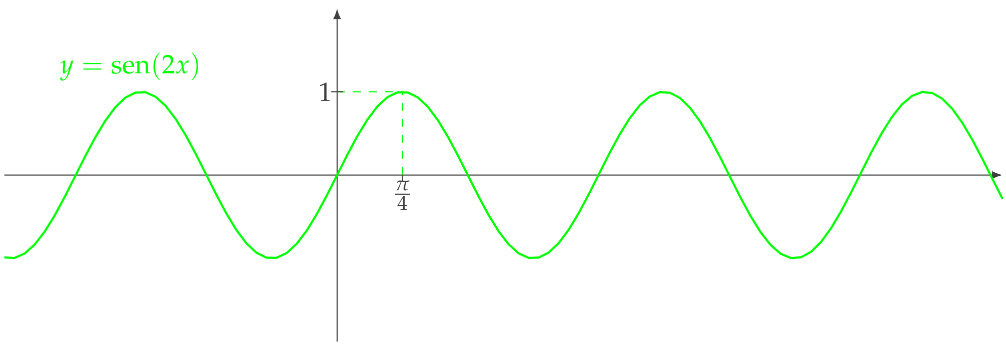
x	$f(x) = \text{sen}(x)$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	0
$\frac{3}{2}\pi$	-1
2π	0

x	$g(x) = \text{sen}(2x)$
0	0
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3}{4}\pi$	-1
π	0

De esta forma, notamos que la función $g(x) = \text{sen}(2x)$ toma los mismos valores que la función seno, pero los toma en el ángulo que vale la mitad, con lo cual, el gráfico de g va a ser similar al de f pero oscilando el doble de veces:



Luego, el gráfico pedido es



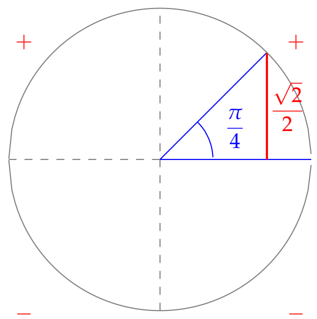
$\square$

Ejercicio 15. Determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{sen}(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

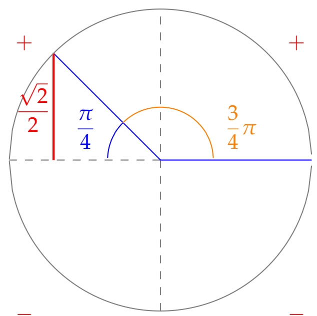
Solución

Como la función seno es periódica de período 2π, una estrategia para encontrar los valores pedidos es empezar encontrando todos los valores $0 \leq \alpha < 2\pi$ tales que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Por tabla, sabemos que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En un dibujo, tenemos que



En el único otro cuadrante donde el seno es positivo es en el segundo, así que buscamos el ángulo en ese cuadrante cuyo seno valga lo mismo:



Luego, los únicos valores de $0 \leq \alpha < 2\pi$ tales que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ son

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \qquad \text{y} \qquad \alpha = \frac{3}{4}\pi.$$

Usando la periodicidad de la función seno tenemos que todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ son

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{o} \qquad \alpha = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

con k un número entero (el conjunto de los números enteros se simboliza con $\mathbb{Z}$, así que podemos escribir $k \in \mathbb{Z}$). Si k es positivo, $2k\pi$ significa k veces 2π, es decir, k vueltas enteras en el sentido antihorario. Si k es negativo, $2k\pi$ significa $-k$ veces -2π, es decir, $-k$ vueltas enteras en el sentido horario. Esta es una forma de escribir que las funciones trigonométricas no varían cuando damos vueltas enteras en un sentido o en el otro.

Ahora bien, el enunciado nos pide hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $\operatorname{sen}(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Entonces, tenemos que todos los x que sirven son los que satisfacen

$$2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{o} \qquad 2x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Luego, despejando, las soluciones de la ecuación pedida son todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$\boxed{x = \frac{\pi}{8} + k\pi \qquad \text{o} \qquad x = \frac{3}{8}\pi + k\pi \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}.}$$

□

⚠ Algunas fórmulas que pueden ser útiles para resolver ecuaciones que involucran funciones trigonométricas son las fórmulas del seno y del coseno de una suma que valen para cualquier par de números reales α y β:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

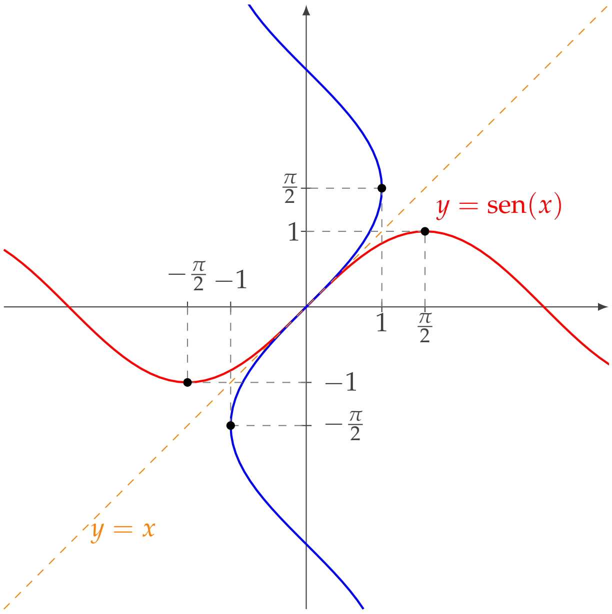
Si se aplican cuando $\alpha = \beta$ dan

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$$

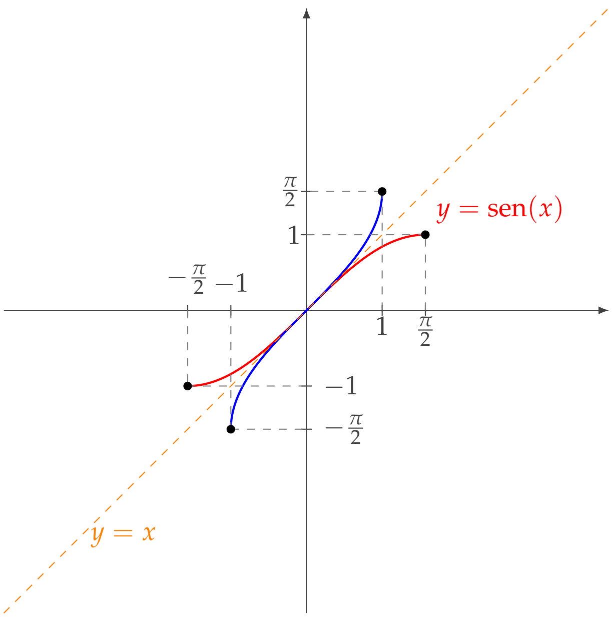
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)$$

A continuación, vamos a definir las *funciones inversas* del seno y del coseno.

Comencemos con la función seno. Si dibujamos en un par de ejes la función y su dibujo simétrico con respecto a la recta de ecuación $y = x$, tenemos



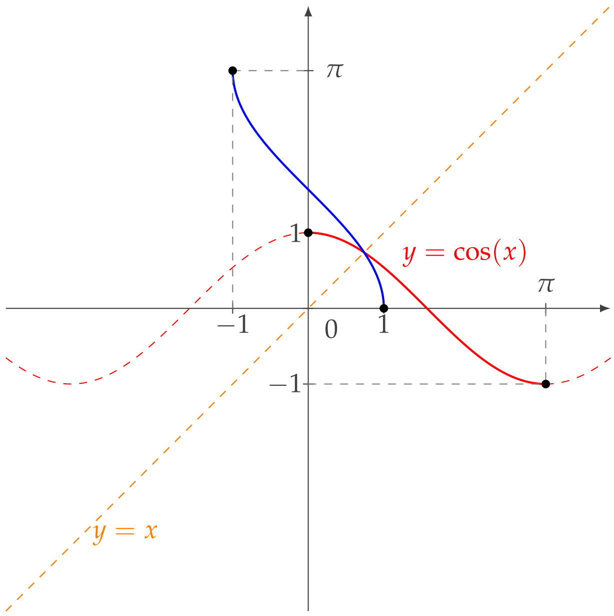
El gráfico de color azul no corresponde a una función, ya que a un valor de x le corresponden muchos valores de y.
Sin embargo, si restringimos la función $\operatorname{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$, nos queda



La función dibujada en azul resulta ser la función inversa de $\operatorname{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$ que se llama la función arcoseno.
Entonces, tenemos que $\operatorname{arcsen} : [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ cumple

$$\operatorname{arcsen}(x) = y \iff \operatorname{sen}(y) = x \qquad \text{para } y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Si usamos la misma idea, puede restringirse la función $\cos : [0; \pi] \to [-1; 1]$ y obtenemos



La función dibujada en azul resulta ser la función inversa de $\cos : [0; \pi] \to [-1; 1]$ y se llama la función arcocoseno.
Entonces, tenemos que $\arccos : [-1; 1] \to [0; \pi]$ cumple

$$\arccos(x) = y \iff \cos(y) = x \qquad \text{para } y \in [0; \pi].$$

6. Otras funciones

6.1. Función módulo

Otra función usual que es útil es la función que a cada número real le calcula la distancia del número al cero. Esta función se llama módulo o valor absoluto y se simboliza con la variable entre dos barras verticales ($|x|$ que se lee módulo de x).

Por ejemplo, $|3| = 3$ pues la distancia del 3 al 0 es 3 y $|-5| = 5$ pues la distancia del -5 al 0 es 5.

Podemos pensar, entonces, que la función módulo "le saca el signo" al número que se la calculamos.

Si queremos dar una definición precisa de esta función, es fácil ver que, para los números positivos o cero (es decir, para $x \geq 0$), vale que $|x| = x$.
Sin embargo, a los números negativos la función les cambia el signo, y una forma de cambiarle el signo a un número es poniéndole un signo $-$ adelante. Entonces, para $x < 0$, vale que $|x| = -x$.

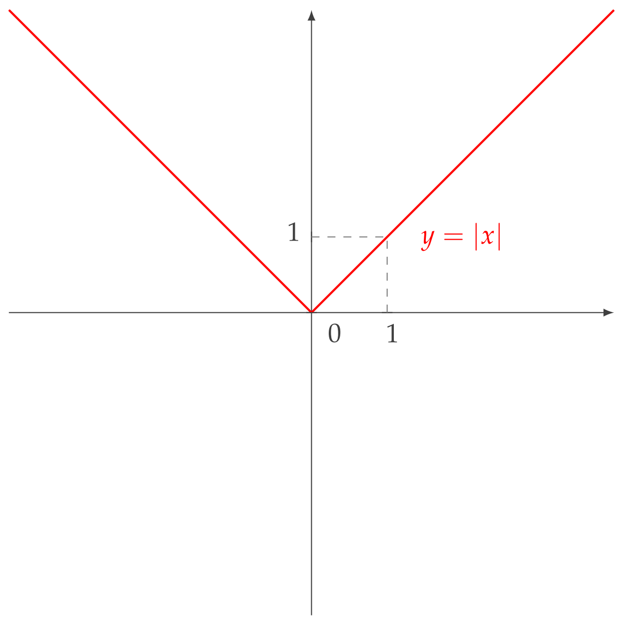
La definición de la función módulo es la que sigue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Esta definición significa que, si nos dan un valor x para aplicarle la función, lo primero que debemos observar es cuál condición cumple, es decir si $x \geq 0$ o si $x < 0$. De acuerdo a esta condición, aplicamos la fórmula correspondiente.

Por ejemplo, para calcular $|-4|$, lo primero que vemos es que $-4 < 0$, luego debemos usar el segundo renglón de la definición y resulta que $|-4| = -(-4) = 4$.

Notemos que la función módulo coincide con la recta $y = x$ para los $x \geq 0$ y con la recta $y = -x$ para los $x < 0$, por lo que su gráfico resulta

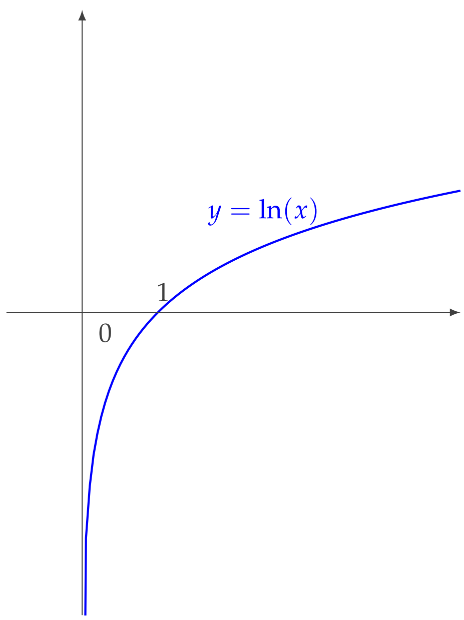


Ejercicio 16. Representar gráficamente la función $f(x) = |\ln(x)|$.

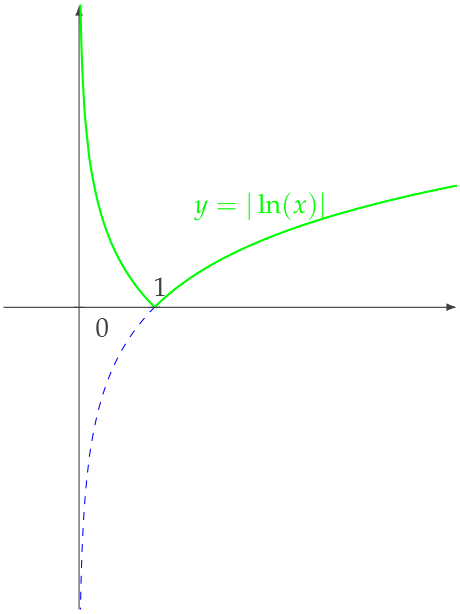
Solución

Para resolver este ejercicio, tengamos en cuenta que el módulo no cambia a los números positivos o al cero pero que sí les cambia el signo a los negativos.

Así, como el gráfico de la función logaritmo natural es



entonces, el gráfico de la función $f(x) = |\ln(x)|$ es



porque el módulo cambia el signo de $\ln(x)$ cuando el valor de $\ln(x)$ es negativo. □

6.2. Funciones partidas

Así como sucede con la función módulo que definimos antes, una función puede estar definida por distintas fórmulas, dependiendo el valor de x al que se la aplicamos.

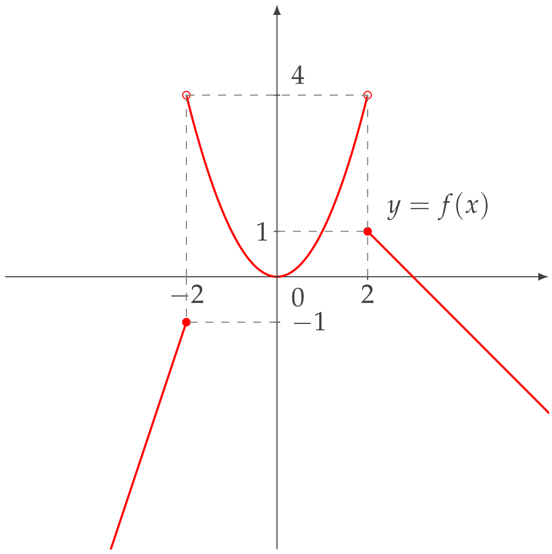
Ejemplo. Consideremos la función

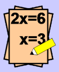
$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ -x+3 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}.$$

Resulta que

- $f(-4) = 3(-4) + 5 = -7$ pues $-4 \leq -2$
- $f(-1) = (-1)^2 = 1$ pues $-2 < -1 < 2$
- $f(5) = -5 + 3 = -2$ pues $2 \leq 5$

Si queremos hacer un gráfico de esta función, coincidirá con la recta $y = 3x + 5$ para $x \leq -2$, con la parábola $y = x^2$ para $-2 < x < 2$ y con la recta $y = -x + 3$ para $2 \leq x$. Luego será aproximadamente así:





Ejercicio 17. A partir del gráfico anterior de f, calcular su imagen y determinar la cantidad de soluciones de la ecuación $y = f(x)$ dependiendo del valor de y.

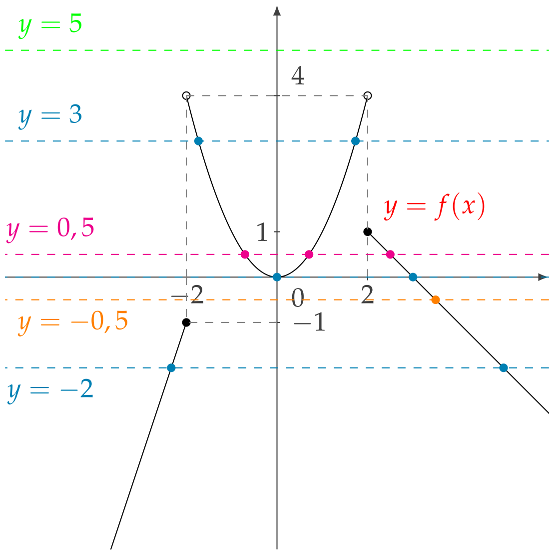
Solución

A partir del gráfico puede verse que la *imagen* de f es

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = (-\infty; 4)}$$

(o lo que es lo mismo, los valores de y tales que la ecuación $y = f(x)$ tiene solución son los y estrictamente menores que 4).

Dependiendo de los valores de y, podemos ver la cantidad de soluciones x en el gráfico siguiente:



Luego, la ecuación $y = f(x)$

- no tiene solución si $y \geq 4$.
- tiene solución única si $-1 < y < 0$.
- tiene dos soluciones si $y \leq -1$, $y = 0$ o $1 < y < 4$.
- tiene tres soluciones si $0 < y \leq 1$.

$\square$

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Funciones, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.