Práctica 6 – Parte 2

Regla de L'Hospital

1. Caso cero sobre cero

Veamos tres problemas de límites conocidos:

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$ 2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$

Los límites 1. y 2. se resuelven mediante técnicas algebraicas, multiplicar por el conjugado y factorizar los polinomios; en el 3, además, se utiliza que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{ax} = 1$, como vimos en el capítulo de límites.

Los tres límites tienen una característica en común. En cada caso, está incluido un cociente y, tanto el numerador como el denominador, tienden a 0 como su límite. No se puede usar, en estos casos, que el límite del cociente es el cociente de los límites porque el límite del denominador es cero, y además, se llega a una indeterminación cero sobre cero.

En el problema 1, si multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador que es $\sqrt{2x+10}+4$, y simplificamos $x-3$, podemos salvar la indeterminación y calcular el límite pedido:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{2x+10}-4\right)}{(x-3)} \frac{\left(\sqrt{2x+10}+4\right)}{\left(\sqrt{2x+10}+4\right)} = \lim_{x \to 3} \frac{2x+10-16}{(x-3)\left(\sqrt{2x+10}+4\right)} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+10}+4\right)} = \lim_{x \to 3} \frac{2}{\sqrt{2x+10}+4} = \frac{1}{4}.$$

En el problema 2, el numerador es una diferencia de cuadrados y si en el denominador sacamos factor común x, y simplificamos $x-2$, podemos salvar la indeterminación y resolver el problema.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x} = 2 .$$

En el problema 3, si multiplicamos el numerador y el denominador por 3, sacamos factor común $\frac{2}{3}$ y utilizamos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{(ax)}=1$, salvamos la indeterminación y podemos calcular el límite pedido

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{sen}(3x)}{2(3x)}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{(3x)}=\frac{2}{3}\ .$$

Pero este tipo de indeterminaciones se puede resolver utilizando la Regla de L'Hospital que resulta como consecuencia del Teorema del valor medio de Cauchy.

Teorema. Regla de L'Hospital: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un entorno de a, es decir, en un intervalo alrededor del punto, salvo quizás en el punto a, y con derivadas continuas en dicho entorno, siendo $g'(x)\neq 0$ cerca de a, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ y existe el $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces el limite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración

Supongamos que f y g son continuas en $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$, definimos:

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq a\\ 0 & \text{si } x=a\end{cases}\qquad \text{y}\qquad G(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x\neq a\\ 0 & \text{si } x=a\end{cases}\ .$$

F así definida resulta continua en el intervalo $(a-\delta,a+\delta)$ que contiene a a, pues $f(x)$ es continua en $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ y como $\lim\limits_{x\to a}F(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=0=F(a)$, es continua en a.

Los mismos argumentos valen para la función G, con lo cual es continua en $(a-\delta,a+\delta)$.

Por el Teorema del valor medio $\exists\ x_1$ con $a<x_1<x$ tal que $\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}$.

Tomando límite por derecha $x\to a^+$ "entonces" $x_1\to a^+$ y $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

El límite por izquierda es igual, con lo cual, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Volvamos a los 3 problemas y calculemos los límites con esta regla.

Como en los 3 problemas hay un límite donde el numerador y denominador tienden a 0 y las funciones cumplen con las hipótesis del teorema, podemos utilizarlo, derivando ambas funciones y analizando el límite de los cocientes de dichas derivadas.

Calculemos los límites utilizando la regla de L'Hospital:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{2}{2\sqrt{2x+10}}}{1}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\sqrt{2x+10}}=\dfrac{1}{4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{2x-2}=2$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos(3x)}{2}=\dfrac{3}{2}$.

La Regla de L'Hospital se puede utilizar para el cálculo de límites de cocientes de funciones donde ambas tienden a cero o infinito siempre y cuando las funciones cumplan con las hipótesis del teorema.

Ejemplo a) Calcular $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\ln(x-3)}$.

Ejemplo b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\operatorname{sen}(3x)}$.

Al intentar evaluar los límites de los ejemplos **a) y b)** donde las funciones del numerador y del denominador tienden a cero obtenemos una indeterminación del tipo cero sobre cero (todas las funciones cumplen con las hipótesis de la regla de L'Hospital).

Ejercicio 1. Calcular el límite del ejemplo a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\ln(x-3)}$.

Solución

Como las funciones $f(x)=\sqrt{x^2+9}-5$ y $g(x)=\ln(x-3)$ son continuas en un entorno de cero y tienden a 0, al querer evaluar $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ caemos en un caso de indeterminación cero sobre cero y podemos utilizar la regla de L'Hospital, pues se cumplen las hipótesis.

Para poder resolver el límite, calculamos las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$ o sea

$f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}$ y $g'(x)=\dfrac{1}{x-3}$, luego hacemos el cociente de ellas ,o sea, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ .Esto es

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\ln(x-3)} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{\dfrac{1}{x-3}} = \dfrac{4}{5}$. Porque el numerador tiende a $\dfrac{4}{5}$ y el denominador tiende a 1.

Podemos afirmar que el límite es $\dfrac{4}{5}$:

$$\boxed{\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{\ln(x-3)} = \frac{4}{5}}$$

Ejercicio 2. Calcular el límite del ejemplo b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{sen}(3x)}$.

Solución

Como sabemos que las funciones $\ln(1+x)$ y $\mathrm{sen}(3x)$ son continuas y con derivadas continuas en un entorno de 4, y tienden a 0, utilizamos la Regla de L'Hospital. Para ello, calculamos la derivada de $\ln(1+x)$ y de $\mathrm{sen}(3x)$, o sea:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ y } g'(x) = 3\cos(3x)$$

y, al hacer el cociente, obtenemos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{sen}(3x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{3\cos(3x)} = \dfrac{1}{3}$.

Vemos que el límite es igual a $\dfrac{1}{3}$ porque el numerador tiende a 1 y el denominador tiende a 3.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{sen}(3x)} = \frac{1}{3}}$$

La misma regla sirve también cuando x tiende a infinito, es decir, que se puede aplicar no solo para los casos en que $x\to a$ y $x\to 0$, sino también para el caso que $x\to\infty$.

Enunciado Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y derivables, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y existe el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración:

Mediante el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$, cuando $x \to \infty$, $t \to 0$.

Utilizando la regla de L'Hopital para el caso $t \to 0$ obtenemos $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} =$

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)}$ y simplificando $\left(\frac{-1}{t^2}\right)$ queda $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Con lo que queda demostrado.

Ejercicio 3. Calcular el límite de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}} - 2}{\frac{3}{x}}$.

Solución

Como las funciones del numerador y denominador son continuas y con derivadas continuas y tienden a 0 , aplicamos la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}} - 2}{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-3}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{3} = \frac{2}{3}.$$

O sea que el límite es $\frac{2}{3}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}} - 2}{\frac{3}{x}} = \frac{2}{3}}$$

Ejercicio 4. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{4}{x}}$.

Solución

Como las funciones del numerador y denominador son continuas, con derivadas continuas y tienden ambas a 0 podemos utilizar la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{4}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{-4\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{4}\ .$$

o sea que el límite es $\frac{1}{4}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{4}{x}} = \frac{1}{4}}$$

2. Caso infinito sobre infinito

Enunciado Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un entorno de a alrededor del punto salvo quizás en a, y con derivadas continuas en dicho entorno, siendo $g'(x)\neq 0$ cerca de a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ y existe el $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración:

Tomamos un $x_1 \neq a$, por el Teorema de valor medio existe un x_0 para el cual se cumple

(A) $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ para $a<x<x_0<x_1$

Por otro lado, sacamos $f(x)$ factor común en el numerador y $g(x)$ en el denominador en el primer miembro obtenemos:

(B) $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{1-f(x_1)/f(x)}{1-g(x_1)/g(x)}\right)$

Utilizando la ecuación (B), la ecuación (A) queda así:

$$\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{1-f(x_1)/f(x)}{1-g(x_1)/g(x)}\right) = \left(\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\right)$$

Al multiplicar ambos miembros por $\dfrac{1-\left(g(x_1)/g(x)\right)}{1-\left(f(x_1)/f(x)\right)}$, obtenemos:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1-\left(g(x_1)/g(x)\right)f'(x_0)}{1-\left(f(x_1)/f(x)\right)g'(x_0)}$$

Supongamos que $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ tiene límite l cuando $x_0 \to a$, o sea, $\lim\limits_{x_0\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$.

Elegimos x_1 suficientemente próximo a a para este cociente y como $1-\left(f(x_1)/f(x)\right)$ y $1-\left(g(x_1)/g(x)\right)$ tienden a 1, entonces, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$ y podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo Calcular $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(x)}{\frac{2}{x}}$

En este ejemplo, el numerador tiende a menos infinito y el denominador a más infinito, esto da una indeterminación infinito sobre infinito (las funciones del numerador y denominador cumplen con las hipótesis del teorema), podemos utilizar la Regla de L'Hospital.

Solución: Como las funciones del numerador y del denominador son continuas y con derivadas continuas en un entorno de 0, podemos aplicar la regla de L´Hospital, porque cuando $x \to 0^+$, $\ln(x)\to -\infty$ y $\dfrac{2}{x}\to +\infty$.

Como en los ejercicios anteriores calculamos las derivadas y hacemos el cociente de ellas:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}\frac{-x}{2}=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{\frac{2}{x}}=0}$$

Ejercicio 5. Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$.

Solución. Como las funciones del numerador y del denominador son ambas continuas con derivadas continuas y tienden a infinito, este caso se lo llama infinito sobre infinito y podemos utilizar la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$$

3. Otros casos

También se puede usar la regla de L'Hospital para los siguientes casos:

1) **Caso cero por infinito**, $0.\infty$: para este caso transformar 0 por ∞ en ∞ sobre ∞ o en 0 sobre 0.

Ejercicio 6. Calcular $\lim_{x \to 0+} x\, e^{\frac{1}{x}}$

Solución:

Podemos transformar este producto de dos funciones, donde una tiende a cero y la otra a infinito en un cociente de dos funciones que tienden a infinito, escribiendo $x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$ obtenemos el cociente

$\lim_{x \to 0+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$. Ahora estamos en condición de utilizar la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \right)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty .$$

Concluimos que el límite es infinito:

$$\boxed{\lim_{x \to 0+} x\, e^{\frac{1}{x}} = +\infty}$$

2) **Caso** 1^{∞} **:** este caso de indeterminación es cuando una función que tiende a 1 está elevada a otra que tiende a ∞, o sea, $f(x)^{g(x)}$ donde $f(x)\to 1$ y $g(x)\to\infty$. Para resolverlo aplicamos $\ln(f(x)^{g(x)})$, que por las propiedades del logaritmo es igual a $g(x)\ln(f(x))$, calculamos el límite y después le aplicamos la función inversa, es decir, e^x la función exponencial.

Ejercicio 7. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Solución

Como el límite de $x\to 1$ y el de $\dfrac{1}{1-x}\to\infty$ este límite toma la forma indeterminada 1^{∞}.

Sea $F(x)=x^{\frac{1}{1-x}}$ entonces $\ln\left(F(x)\right)=\dfrac{\ln(x)}{1-x}$, este cociente tiende a cero sobre cero y ambas funciones son continuas con derivadas continuas; podemos aplicar la regla de L'Hospital. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}=-1$, así que $\lim\limits_{x\to 1}\ln(F)=-1$ pero como el logaritmo es una función continua, $\lim\limits_{x\to 1}\ln(F)=\ln\lim\limits_{x\to 1}\ln(F)$ $\ln\left(\lim\limits_{x\to 1}F(x)\right)=-1$ acá aplicamos la función exponencial y obtenemos el límite e^{-1}, o sea, que $\lim\limits_{x\to 1}F(x)=\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}$

$$\boxed{\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}}$$

3) **Caso** ∞^{0} **:** la indeterminación es cuando una función que tiende a infinito está elevada a otra que tiende a cero $f(x)^{g(x)}$, donde $f(x)\to\infty$ y $g(x)\to 0$. Igual que en el caso anterior, aplicamos la función logaritmo, tomamos el límite y después aplicamos la inversa, o sea, la exponencial.

Ejercicio 8. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución

Como el límite de $e^{2x}+1\to+\infty$ y el límite de $\dfrac{1}{x}\to 0$ este límite toma la forma indeterminada ∞^{0}.

Sea $F(x)=\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{x}}$ entonces $\ln\left(F(x)\right)=\dfrac{\ln(e^{2x}+1)}{x}$. Como este cociente tiende a infinito sobre infinito y ambas funciones son continuas con derivadas continuas, podemos aplicar la regla de L'Hospital.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$. Como obtuvimos otro cociente de funciones que tienden a infinito podemos aplicar la regla nuevamente: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^{2x}}{2e^{2x}}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(F(x))=2$

Como dijimos antes esto es igual a $\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}F(x)\right)=2$, entonces el $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=e^2$, o sea que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}+1\right)^{\frac{1}{x}}=e^2}$$

4) **Caso** 0^0: la indeterminación es cuando una función que tiende a cero está elevada a otra que tiende a cero $f(x)^{g(x)}$ donde $f(x)\to 0$ y $g(x)\to 0$. Igual que en el caso anterior, aplicamos la función logaritmo, tomamos el límite y después aplicamos la Regla de L'Hospital.

Ejercicio 9. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

Solución

Como $x\to 0^+$ es un caso de indeterminación de la forma 0^0. Aplicamos la función logaritmo y obtenemos $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(x^x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(x)$ se transformó en un límite caso 1), que es un producto de dos funciones donde una tiende a cero y la otra a infinito, o sea, $0.\infty$. Hay que convertirlo en un caso infinito sobre infinito. Para eso escribimos $x=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}$ y obtenemos $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Este es un caso de infinito sobre infinito y las funciones son continuas con derivadas continuas; podemos aplicar la regla de L'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$

al simplificar x y acomodar, queda $\lim\limits_{x\to 0}-x=0$, o sea que el límite es $e^0=1$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}x^x=1}$$

Ejercicio 10. Dada la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(3x-12)}{\sqrt{x^2+9}-5}$ si $x\neq 4$, $f(4)=a$ hallar a para que resulte continua en $x=4$.

Solución

Para ver que f es continua en $x=4$ el límite de la función cuando $x\to 4$ debe coincidir con el valor de la función en dicho punto, o sea, con $f(4)$.

Calculemos el límite:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\operatorname{sen}(3x-12)}{\sqrt{x^2+9}-5}=\lim_{x\to 4}\frac{3\cos(3x-12)}{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}=\frac{3}{\dfrac{8}{10}}=\frac{15}{4},$$

Este límite debe coincidir con $f(4)=a$, entonces, $f(4)=\dfrac{15}{4}$ y, por lo tanto, $a=\dfrac{15}{4}$:

$$\boxed{a=\frac{15}{4}}$$

Ejercicio 11. Hallar todos los a para que la función $f(x)=\dfrac{1-\cos(3x)}{e^{2x}-2x-1}$ para $0<x\leq\pi$ y $f(0)=a^2$ sea continua.

Solución

Para ver que f es continua en $x=0$ el límite de la función cuando $x\to 0$ debe coincidir con el valor de la función en dicho punto, o sea, con $f(0)$.

Calculemos el límite de $f(x)$: como las funciones del numerador y del denominador ambas son continuas con derivadas continuas y tienden a 0 aplicamos la Regla de L'Hospital.

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(3x)}{e^{2x}-2x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\operatorname{sen}(3x)}{2e^{2x}-2}$, como obtuvimos otro cociente de funciones que tienden a 0 aplicamos nuevamente la regla $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{3\operatorname{sen}(3x)}{2e^{2x}-2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{9\cos(3x)}{4e^{2x}}=\frac{9}{4}$. Este límite debe ser igual a $f(0)=a^2$, luego $a^2=\dfrac{9}{4}$ con lo que $|a|=\dfrac{3}{2}$, o sea, $a=-\dfrac{3}{2}$ o $a=\dfrac{3}{2}$:

$$\boxed{a=-\frac{3}{2}\ \text{ o } a=\frac{3}{2}}$$

Ejercicio 12. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y con dos derivadas continuas y tales que $f(3)=2$, $f'(3)=2$ y $f''(3)=4$. Se define $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(3x)-2}{3x-3} & \text{si } x>1\\ 6x-4 & \text{si } x\le 1\end{cases}$.

Calcular $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ y $g'(1)$, explicando las propiedades que se utilizan en cada caso.

Solución

Como $g(x)$ es una función partida para poder calcular el $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ debemos calcular los límites laterales $\lim\limits_{x\to 1+} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1-} g(x)$ porque $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1-} g(x)$.

Calculemos el límite a izquierda, o sea, cuando $x\to 1^-$ con valores menores que 1

$\lim\limits_{x\to 1-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1-} 6x-4=2$

Veamos a qué tiende el límite por derecha, o sea, cuando $x\to 1^+$ con valores mayores a 1

$\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{f(3x)-2}{3x-3}$, como el numerador y denominador son funciones continuas y tienden a cero, se puede resolver usando la regla de L'Hospital, derivamos ambas funciones y calculamos el límite de las derivadas cuando $x\to 1$, o sea, $f'(3x)\to f'(3)=2$ entonces $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(3x)-2}{3x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3f'(3x)}{3}=2$

Como ambos límites coinciden entonces podemos afirmar que el límite es igual a 2, o sea $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$.

Para calcular $g'(1)$ tomamos el límite del cociente incremental en $x=1$ para $h\to 0+$ y $h\to 0-$

Calculando el límite por izquierda, obtenemos $\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{6(1+h)-4-2}{h}=6$, como ambos límites coinciden decimos que $g'(1)=6$.

Calculando el límite por derecha, o sea, para valores de $h\to 0+$ obtenemos:

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\dfrac{f(3(1+h))-2}{3(1+h)-3}-2}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(3+3h)-2}{(3+3h-3)h}-\frac{2}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(3+3h)-2-6h}{(3h)h}$$

Como este límite es un caso cero sobre cero, usaremos la Regla de L'Hospital, con lo que el límite queda $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{3f'(3+3h)-6}{6h}$.

Caemos nuevamente en un caso cero sobre cero porque cuando $h \to 0^+$, $f'(3+3h) \to 2$.

Luego aplicando una vez más la Regla de L'Hospital obtenemos:

$\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{3f'(3+3h)-6}{6h} = \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{9f''(3+3h)}{6} = 6$, porque cuando $h \to 0^+$ $9f''(3+3h) \to 36$ y el denominador es 6.

Podemos afirmar que ambos límites coinciden, o sea, $\lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = 6$ y que la derivada de $g(x)$ en $x=1$ es $g'(1)=6$:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} g(x)=2 \text{ y } g'(1)=6}$$

Ejercicio 13. Hallar a y b para que $f(x)$ resulte continua y derivable en $x=0$ y calcular $f'(0)$ si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{4x}-\cos(3x)}{2x} & \text{si} \quad x>0 \\ a+bx & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$

Solución

Para que la función resulte continua el valor de la función en el punto $f(0)=a$ debe coincidir con el límite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Para averiguar a qué tiende este límite, debemos calcular los límites laterales y ver que coinciden.

Calculemos el límite $x \to 0^-$, o sea, para valores menores que 0 : $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} a+bx = a$

Y para valores mayores que 0 , $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^{4x}-\cos(3x)}{2x}$ es un caso cero sobre cero (las funciones del numerador y denominador cumplen con las hipótesis de la Regla de L'Hospital).

$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^{4x}-\cos(3x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{4e^{4x}+3\operatorname{sen}(3x)}{2} = 2$, y para que $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^{4x}-\cos(3x)}{2x} = f(0) = a$ debe ser $a=2$.

Calculemos mediante el estudio de cocientes incrementales $f'(0)$.

Primero calculamos el cociente incremental cuando $h \to 0+$, o sea, con valores mayores a cero:

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\dfrac{e^{4h}-\cos(3h)}{2h}-2}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{e^{4h}-\cos(3h)-4h}{2h^2}$$, tiende a cero sobre cero (las funciones del numerador y denominador cumplen con las hipótesis de la Regla de L'Hospital).

$$\lim_{h\to 0+}\frac{e^{4h}-\cos(3h)-4h}{2h^2}=\lim_{h\to 0+}\frac{4e^{4h}+3\operatorname{sen}(3h)-4}{4h}=\lim_{h\to 0+}\frac{16e^{4h}+9\cos(3h)}{4}=\frac{25}{4}$$

Calculamos el cociente incremental cuando $h\to 0-$, es decir, con valores menores a cero:

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(2+bh)-2}{h}=b\ .$$

Para que el límite exista los límites laterales del cociente incremental deben coincidir, entonces

$$b=\frac{25}{4}\ \text{ y }\ f'(0)=\frac{25}{4}\quad ,\quad \boxed{a=2 \text{ y } f'(0)=\frac{25}{4}=b}\quad .$$

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Regla de L'Hospital, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.