Práctica 4 - Parte 1

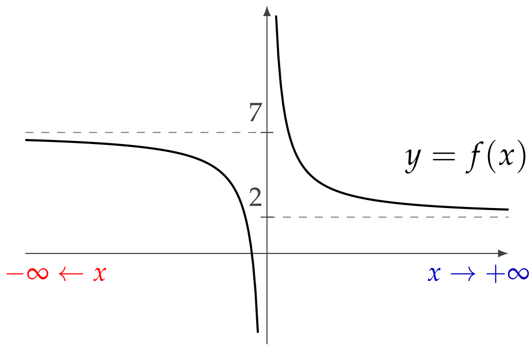
Límite de funciones

En lo que sigue, veremos cómo la noción de límite introducida para sucesiones se extiende al caso de funciones reales. Esto nos permitirá estudiar el comportamiento de una función f "en el infinito" (es decir, los valores $f(x)$ para x "grandes" en valor absoluto) y en los "bordes" de su dominio de definición, de manera de obtener información útil para la construcción del gráfico de f.

1. Límites en el infinito - Asíntotas horizontales

Comenzaremos estudiando el comportamiento de una función de variable real x para valores "grandes" de x, ya sean positivos o negativos.

Consideremos la función f cuyo gráfico es el siguiente:



Cuando x toma valores positivos muy grandes, $f(x)$ toma valores cercanos a 2; más precisamente, los valores de $f(x)$ se acercan tanto como se desee a 2 si se consideran valores de x positivos suficientemente grandes. Se dice, entonces, que f *tiende a* 2 *cuando* x *tiende a más infinito* o que *el límite cuando* x *tiende a más infinito de* $f(x)$ *es* 2, y se nota:

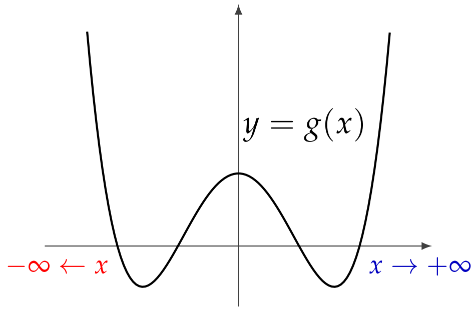
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$$

Además, se dice que la recta de ecuación $y = 2$ es una *asíntota horizontal* para f.
Por otra parte, cuando x toma valores negativos suficientemente grandes en valor absoluto, f toma valores tan cercanos a 7 como se quiera; es decir, *el límite cuando* x *tiende a menos infinito de* $f(x)$ *es* 7. Esto se nota:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 7.$$

En este caso, se dice también que la recta de ecuación $y = 7$ es una *asíntota horizontal* para f.

Para la función g cuyo gráfico es

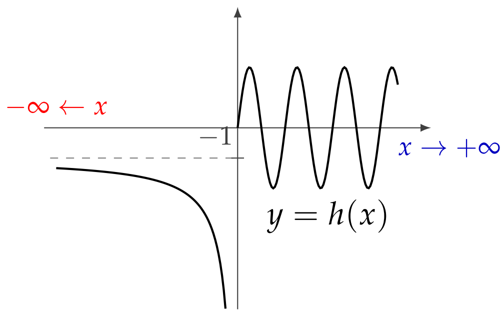


tenemos que, cuando x tiende a más infinito y a menos infinito, $g(x)$ toma valores arbitrariamente grandes, es decir:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \,.$$

En este caso, no hay asíntotas horizontales.

Finalmente, consideremos la función h cuyo gráfico es el siguiente:



Aunque tenemos que

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1 \,,$$

cuando analizamos el límite cuando x tiende a más infinito, no ocurre ninguna de las situaciones que hemos visto: los valores de $h(x)$ no se acercan a ningún número particular ni se van a más o menos infinito; por lo tanto, no existe $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. Para esta función, la recta de ecuación $y = -1$ es asíntota horizontal.

En la entrada "Límites en el infinito" se pueden encontrar las definiciones matemáticas precisas de estas nociones. Sin embargo, para poder entender mejor el concepto de límite, recomendamos, en primer lugar, concentrarse en los ejemplos que presentamos a continuación.

1.1. Límite en infinito de funciones dadas por fórmulas

Presentamos ahora algunos ejemplos de cálculo de asíntotas horizontales para funciones dadas por su fórmula $f(x)$ y la información que esto nos provee en relación al gráfico de f.

Ejemplo 1. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$.

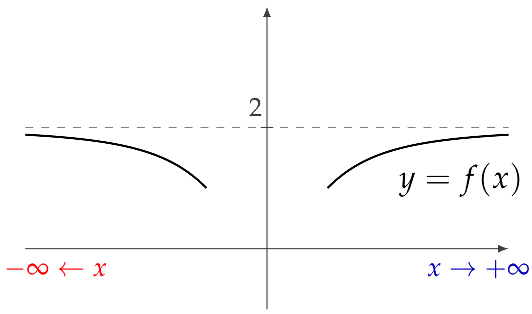
Esta función está definida en todo $\mathbb{R}$. Para calcular su límite en $+\infty$, podemos proceder en forma análoga a lo visto para sucesiones:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\Big(1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\Big)} = 2.$$

Por otro lado, observamos que, como la variable aparece al cuadrado en la expresión de f, cuando x tiende a $-\infty$ el comportamiento de la función es igual al que tiene cuando x tiende a $+\infty$, de modo que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2.$$

Observamos que $\dfrac{2x^2}{x^2+1} < 2$ para todo x, con lo que el aspecto del gráfico de f en $+\infty$ y en $-\infty$ es aproximadamente:



Ejemplo 2. Sea $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

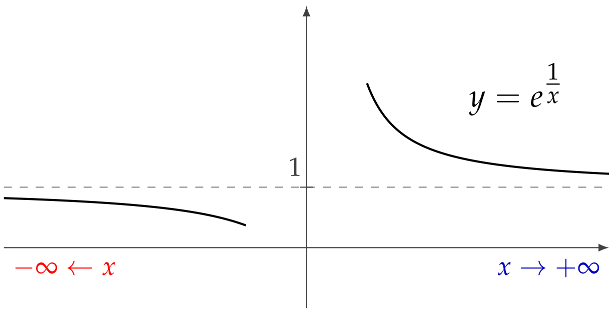
El dominio de la función g es el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$. Para calcular los límites de esta función en $+\infty$ y en $-\infty$, observamos, en primer lugar, el comportamiento del exponente $\dfrac{1}{x}$. Vemos que, cuando x tiende a $-\infty$ o a $+\infty$, el exponente $\frac{1}{x}$ toma valores arbitrariamente chicos, es decir, tiende a 0. Entonces:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}} = e^0 = 1$$

y, de la misma manera,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$

Así, la recta de ecuación $y = 1$ es una asíntota horizontal para g tanto en $-\infty$ como en $+\infty$. Con el objeto de hacer un gráfico aproximado de la situación, queremos determinar si el gráfico de f se halla por arriba, por debajo o interseca a la asíntota horizontal. Para esto, analizamos más en detalle los valores que toma la función. Para $x > 0$, tenemos que $\frac{1}{x} > 0$ y, en consecuencia, $e^{\frac{1}{x}} > e^0 = 1$, mientras que para $x < 0$, tenemos que $\frac{1}{x} < 0$, con lo cual $e^{\frac{1}{x}} < e^0 = 1$. Así, el gráfico de f estará por arriba de la recta $y = 1$ cuando $x \to +\infty$ y por debajo de la recta $y = 1$ cuando $x \to -\infty$:



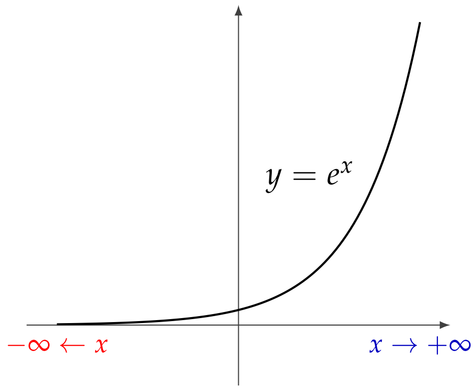
En los ejemplos siguientes veremos que, cuando una recta $y = y_0$ es asíntota horizontal de una función f, no siempre lo es en $+\infty$ y en $-\infty$ (ver, también, los gráficos al comienzo).

Ejemplo 3. Consideremos la función $f(x) = e^x$.

Esta función está definida en todo $\mathbb{R}$ y sabemos que

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Por lo tanto, la recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal para f, pero el gráfico de f ”se acerca” a esta recta solamente cuando x tiende a $-\infty$:



Ejemplo 4. Sea $g(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$.

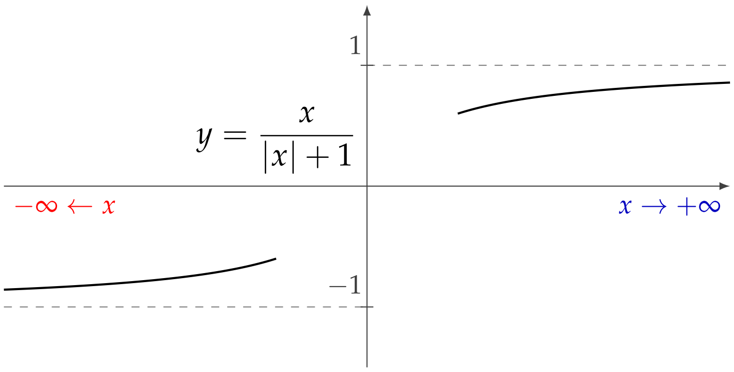
Nuevamente se trata de una función definida en todo $\mathbb{R}$.
Para calcular el límite cuando x tiende a $-\infty$, nos interesan los valores de x grandes en valor absoluto, pero negativos. Para estos valores, tenemos que $x < 0$ y, por lo tanto, $|x| = -x$. Entonces:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(-1+\frac{1}{x}\right)} = -1$$

y la recta de ecuación $y = -1$ es asíntota horizontal para g en $-\infty$.
Por otro lado, cuando estudiamos el límite cuando x tiende a $+\infty$, nos interesan los valores de x grandes. Estos valores cumplen que $x > 0$ y, en consecuencia, $|x| = x$. Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$$

y la recta de ecuación $y = 1$ es asíntota horizontal para g en $+\infty$.
De este modo, vemos que g tiene un comportamiento distinto en $-\infty$ que en $+\infty$; más aún, tiene dos asíntotas horizontales distintas.
Con la información obtenida y, observando que $\dfrac{x}{-x+1} > -1$ para $x < 0$ (lo que nos dice que el gráfico de g está por encima de la recta $y = -1$ para $x \to -\infty$) y que $\dfrac{x}{x+1} < 1$ para $x > 0$ (con lo que el gráfico de g está por debajo de la recta $y = 1$ para $x \to +\infty$), concluimos que el aspecto del gráfico de g en $-\infty$ y en $+\infty$ es aproximadamente:



1.2. Propiedades y más ejemplos

Las propiedades y técnicas vistas para el cálculo de límites de sucesiones se extienden al caso de límites de funciones; en particular, el álgebra de límites y las propiedades del "sándwich" son válidas también en el contexto de funciones reales.

Ejercicio 1. Para cada una de las siguientes funciones, calcular los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y dar las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

- $f(x) = -3x^5 + x^2 - 1$

  Solución
  Empecemos calculando el límite cuando x tiende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\underbrace{-3\overbrace{x^5}^{\to-\infty}}_{\to+\infty} + \underbrace{x^2}_{\to+\infty} -1) = +\infty.$$

  Al intentar calcular el límite cuando x tiende a $+\infty$, nos encontramos con una indeterminación, ya que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\underbrace{-3\overbrace{x^5}^{\to+\infty}}_{\to-\infty} + \underbrace{x^2}_{\to+\infty} -1).$$

  Para salvarla, sacamos como factor común la máxima potencia de x que aparece (la idea es que, para valores grandes de x, el término que determina el comportamiento de f es el de la mayor potencia de x):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-3x^5 + x^2 - 1) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^5}_{\to+\infty} \underbrace{\left(-3 + \overbrace{\frac{1}{x^3}}^{\to0} - \overbrace{\frac{1}{x^5}}^{\to0}\right)}_{\to-3} = -\infty.$$

Como los dos límites son infinitos, $\boxed{\text{no hay asíntotas horizontales para } f}$. □

- $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2} - x$

Solución

El límite de esta función cuando $x \to -\infty$ se puede calcular fácilmente:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\sqrt{x^2 - x + 2}}_{\to +\infty} \underbrace{- x}_{\to +\infty} = +\infty.$$

Procediendo en forma análoga para calcular el límite cuando $x \to +\infty$, vemos que estamos en presencia de una indeterminación del tipo "$(+\infty) - (+\infty)$". Como la función es una diferencia que involucra una raíz cuadrada, intentamos salvar la indeterminación multiplicando y dividiendo por la expresión *conjugada* $\sqrt{x^2 - x + 2} + x$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{\sqrt{x^2 - x + 2}}_{\to +\infty} - \underbrace{x}_{\to +\infty} \Big) = \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 2} - x)(\sqrt{x^2 - x + 2} + x)}{\sqrt{x^2 - x + 2} + x} = \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 2} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{-x + 2}^{\to -\infty}}{\underbrace{\sqrt{x^2 - x + 2} + x}_{\to +\infty}} = \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} = \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + 1\right)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La recta de ecuación } y = -\frac{1}{2} \text{ es asíntota horizontal.}}$ □

- $f(x) = \dfrac{3^{x+1} + 4}{3 - 2 \cdot 3^x}$

Solución

Para comenzar, recordemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = 0$, ya que es una exponencial de base mayor que 1.

En primer lugar, calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{x+1}+4=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-2\cdot 3^x=-\infty$, se trata de una indeterminación del tipo "$\dfrac{\infty}{\infty}$". Para salvarla, sacaremos factor común en el numerador y en el denominador:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}+4}{3-2\cdot 3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}\left(1+\dfrac{4}{3^{x+1}}\right)}{3^x\left(\dfrac{3}{3^x}-2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot\cancel{3^x}\left(1+\overbrace{\dfrac{4}{3^{x+1}}}^{\to 0}\right)}{\cancel{3^x}\left(\underbrace{\dfrac{3}{3^x}}_{\to 0}-2\right)}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$$

En consecuencia, $\boxed{\text{la recta de ecuación } y=-\frac{3}{2} \text{ es asíntota horizontal para } f \text{ en } +\infty}$.

Calculemos, ahora, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{3^{x+1}}_{\to 0}+4=4$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} 3-2\cdot\underbrace{3^x}_{\to 0}=3$, el límite que queremos calcular es el cociente de estos dos límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{x+1}+4}{3-2\cdot 3^x}=\frac{4}{3}$$

Entonces, $\boxed{\text{la recta de ecuación } y=\frac{4}{3} \text{ es asíntota horizontal en } -\infty}$. □

- $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

  Solución

  Como no existen $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sen}(x)$ ni $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(x)$ (la función oscila entre -1 y 1; por lo tanto, los valores que toma para x "grandes" en valor absoluto no se acercan a ningún valor en particular), no podemos aplicar el álgebra de límites.

  Miremos a la función f como un producto:

  $$f(x)=\frac{1}{x}.\ \operatorname{sen}(x)$$

  La función $\dfrac{1}{x}$ cumple que

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

y la función $\text{sen}(x)$ es acotada:

$$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1.$$

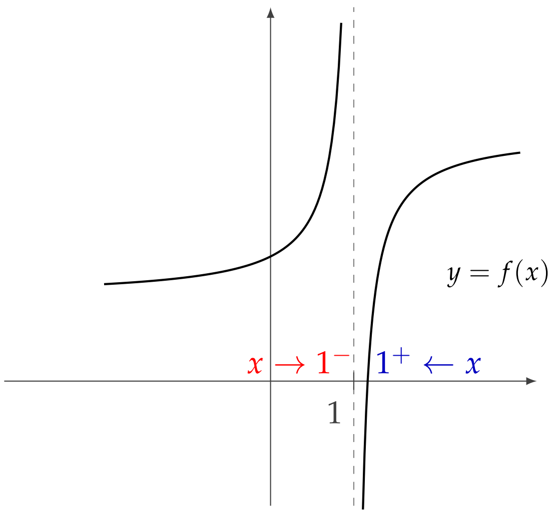
Entonces, tanto en $-\infty$ como en $+\infty$, estamos en presencia de una situación del tipo "0 por acotado". En consecuencia:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\text{sen}(x)}_{\text{acot.}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\text{sen}(x)}_{\text{acot.}} = 0.$$

La recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal para f. □

2. Límite en un punto - Asíntotas verticales

Consideremos la función f cuyo gráfico es el siguiente:



Observamos que, cuando x se acerca a 1 por la izquierda (es decir, considerando sólo valores x tales que $x < 1$), la función toma valores positivos arbitrariamente grandes. En este caso, decimos que el *límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 por izquierda es $+\infty$* y escribimos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

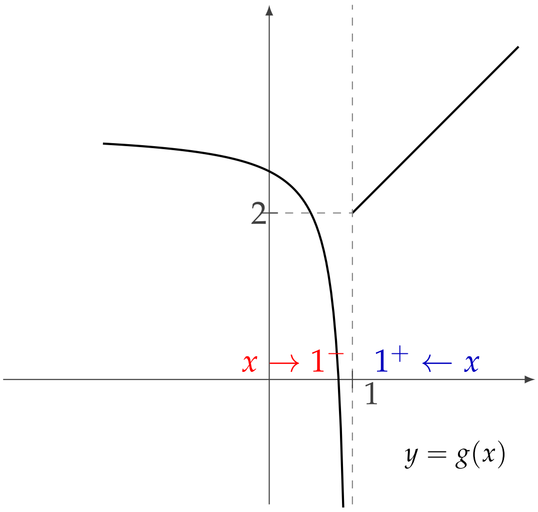
(el signo $-$ en 1^- indica que la variable se acerca a 1 por *izquierda*).

Asimismo, a medida que x se acerca a 1 por la derecha (es decir, considerando sólo valores x tales que $x > 1$), la función toma valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto. En este caso, decimos que el *límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 por derecha es $-\infty$* y escribimos:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

(el signo $+$ en 1^+ indica que la variable se acerca a 1 por *derecha*).

Consideremos ahora la función g cuyo gráfico es el siguiente:



De manera similar al ejemplo anterior, observamos en el gráfico que, cuando x se acerca a 1 por la izquierda, la función g toma valores negativos que se hacen tan grandes en valor absoluto como uno quiera con tal que x esté suficientemente cerca de 1. Entonces:

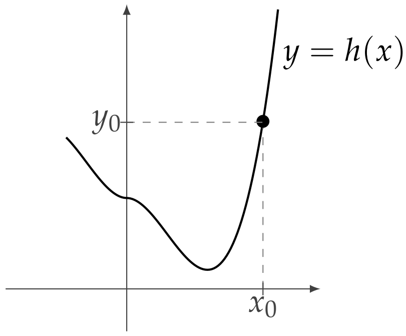
$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -\infty.$$

En cambio, cuando x se acerca a 1 por la derecha, vemos que los valores de $g(x)$ se hacen tan cercanos al número 2 como se quiera. Decimos entonces que el *límite de $g(x)$ cuando x tiende a 1 por la derecha es 2* y escribimos:

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = 2.$$

Si el límite de una función, cuando x tiende a un valor x_0 por izquierda, da infinito ($+\infty$ o $-\infty$), o bien el límite cuando x tiende a x_0 por derecha da infinito, o si se dan ambas situaciones simultáneamente, se dice que la recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical*.
Por ejemplo, las funciones f y g de los gráficos de arriba tienen como asíntota vertical a la recta de ecuación $x = 1$ (si bien $\lim\limits_{x \to 1+} g(x) = 2$ no es infinito, alcanza con que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$ para afirmar que $x = 1$ es asíntota vertical para g).

Los límites por derecha y por izquierda no necesariamente deben dar distinto, o infinito. Por ejemplo, en la función h del siguiente gráfico



vemos que dado un valor x_0, si x está suficientemente cerca de x_0 (ya sea a la derecha o a la izquierda), los valores de $h(x)$ están arbitrariamente cerca del número $y_0 = h(x_0)$. Decimos, entonces, que el *límite de $h(x)$ cuando x tiende a x_0 es y_0* y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = y_0$$

(la notación $x \to x_0$ significa que x se acerca a x_0 tanto por la derecha como por la izquierda).

En la entrada "Límite puntual" se puede encontrar la definición precisa de esta noción. Nuevamente, recomendamos, en primer lugar, centrarse en los ejemplos que mostramos en las próximas secciones.

2.1. Límite puntual de funciones dadas por fórmulas

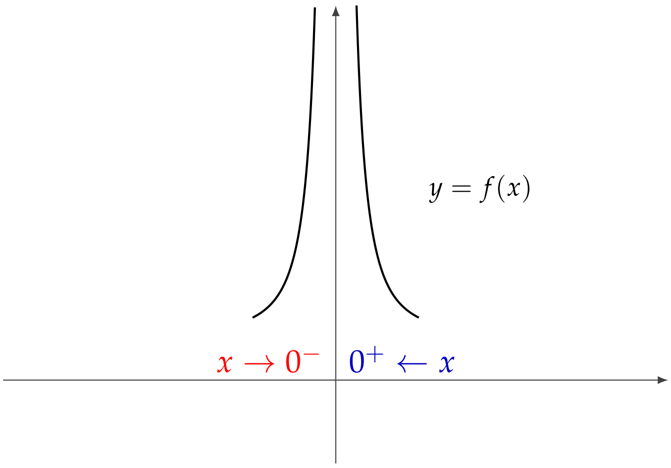
A continuación, veremos algunos ejemplos de cálculo de límites y asíntotas verticales para funciones dadas por su fórmula $f(x)$ y la información que esto nos provee en relación con el gráfico de f.

Ejemplo 1. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

El dominio de f es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Para valores "cercanos" a 0, tanto si nos acercamos por la derecha como por la izquierda, la función toma valores arbitrariamente grandes, es decir:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

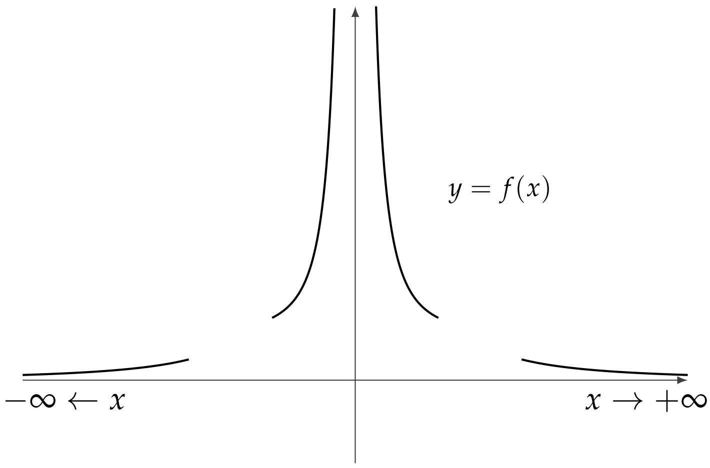
Luego, la recta de ecuación $x = 0$ es asíntota vertical para f y el gráfico de f cerca de 0 es aproximadamente:



Además, podemos estudiar los límites en $+\infty$ y en $-\infty$, lo que nos da más información sobre el gráfico de f:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

De este modo, deducimos que la recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal para f, lo que se refleja en su gráfico como muestra la siguiente figura:



Ejemplo 2. Sea g la función definida por $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

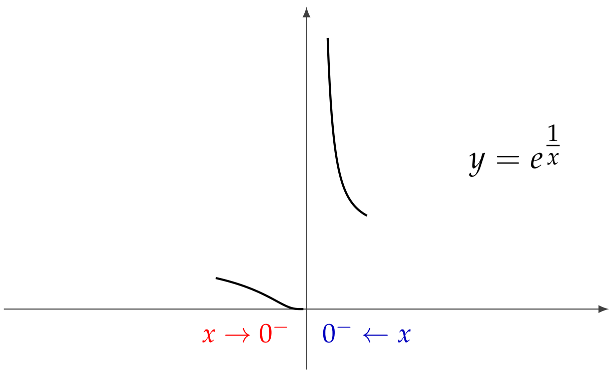
El dominio de g es $\mathbb{R} - \{0\}$. Analicemos su comportamiento para valores cercanos a 0. Cuando $x \to 0^-$, el exponente $\dfrac{1}{x}$ tiende a $-\infty$, pues toma valores negativos y arbitrariamente grandes en valor absoluto. Recordando el comportamiento de la función exponencial en $-\infty$, deducimos que

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to -\infty}} = 0.$$

De manera similar, cuando $x \to 0^+$, el exponente $\frac{1}{x}$ tiende a $+\infty$ y, entonces, el comportamiento de la función exponencial en $+\infty$ implica que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to+\infty}} = +\infty.$$

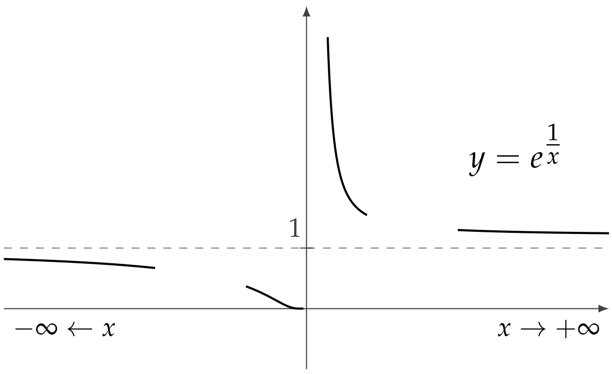
Así, la recta de ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical para g (pero el gráfico de g se aproxima a esta recta solamente cuando x se acerca a 0 por la derecha). El gráfico de g cerca de 0 es aproximadamente:



Teniendo en cuenta la información que ya habíamos obtenido sobre el comportamiento de g en el infinito:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

y cómo se refleja en el gráfico de g, concluimos que el aspecto del gráfico de g es el siguiente:



2.2. Propiedades y más ejemplos

Al igual que en el caso de límites en el infinito, las propiedades básicas que nos permiten calcular límites, tales como el álgebra de límites, ”0 por acotado” y la propiedad del ”sándwich´´, se extienden también a límites en un punto.

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes funciones, determinar su dominio y dar las ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales.

- $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

  Solución

  Dado que f es un cociente de polinomios, el dominio de f está formado por todos los números reales que no anulan a su denominador. Como las soluciones de $x^2 - 1 = 0$ son $x = 1$ y $x = -1$, resulta que $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$.

  Los valores de x que son candidatos a dar asíntotas verticales son los "bordes" del dominio de f, es decir, los x que no pertenecen al dominio pero a los que nos podemos acercar por puntos del dominio; en este caso, $x = 1$ y $x = -1$. Estudiemos, entonces, los límites cuando la variable tiende a estos valores:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{2x^2 - 3x + 1}^{\to 0}}{\underbrace{x^2 - 1}_{\to 0}}$$

  Estamos en presencia de una indeterminación del tipo "$\dfrac{0}{0}$". Para intentar salvarla, como $x = 1$ es raíz del numerador y del denominador de la función, podemos factorizar a cada uno de ellos (en cada caso, uno de los factores será $x - 1$) y simplificar:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\overbrace{(2x-1)}^{\to 1}}{\cancel{(x-1)}\underbrace{(x+1)}_{\to 2}} = \frac{1}{2}.$$

  En consecuencia, $x = 1$ *no* es una asíntota vertical para f. Por otra parte,

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{\overbrace{2x^2 - 3x + 1}^{\to 6}}{\underbrace{x^2 - 1}_{\to 0}} = \infty.$$

  Esto nos dice que $\boxed{\text{la recta de ecuación } x = -1 \text{ es una asíntota vertical para } f}$.

  Podemos obtener más información sobre el comportamiento de f cerca de -1 analizando los límites laterales y determinando el signo de los valores que la función toma a la izquierda y a la derecha de -1:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{2x^2-3x+1}^{\to 6}}{\underbrace{(x-1)}_{\to -2}\underbrace{(x+1)}_{\to 0^-}} = +\infty.$$

Aquí, $\to 0^-$ indica que los valores tienden a 0 por izquierda, es decir, siendo negativos (cuando $x \to -1^-$, se consideran valores $x < -1$, con lo cual $x+1 < 0$); luego, por la regla de los signos, los valores que toma la función cuando $x \to -1^-$ son positivos. Análogamente, se obtiene que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{2x^2-3x+1}^{\to 6}}{\underbrace{(x-1)}_{\to -2}\underbrace{(x+1)}_{\to 0^+}} = -\infty$$

(donde $\to 0^+$ significa que los valores tienden a 0 por la derecha, es decir, que son positivos).

Determinemos ahora, si existen, las asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2}(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(1-\frac{1}{x^2})} = 2$$

y, de la misma manera, vemos que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2.$$

En consecuencia, $\boxed{\text{la recta de ecuación } y = 2 \text{ es una asíntota horizontal para } f.}$ □

- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-x}$

Solución

El dominio de f está formado por aquellos valores de x para los cuales no se hace cero el denominador y, además, el argumento de la raíz cuadrada es mayor o igual que 0:

$$x^2 - x \neq 0 \quad \text{y} \quad x+8 \geq 0$$

$$\iff x(x-1) \neq 0 \quad \text{y} \quad x \geq -8$$

$$\iff x \neq 0, \quad x \neq 1 \quad \text{y} \quad x \geq -8$$

por lo que tenemos que $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = [-8, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)}$.

Los candidatos a asíntotas verticales son $x = 0$ y $x = 1$. Estudiemos los límites correspondientes.

En primer lugar, analizamos el comportamiento de f para $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sqrt{x+8}-3}^{\to\sqrt{8}-3\,(<0)}}{\underbrace{x^2-x}_{\to 0}} = \infty.$$

Concluimos que $\boxed{\text{la recta de ecuación } x = 0 \text{ es asíntota vertical para } f}$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-x} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{indet. } \frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x^2-x)(\sqrt{x+8}+3)} = \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x+8)-9}{(x^2-x)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x^2-x)(\sqrt{x+8}+3)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{indet. } \frac{0}{0}}}{=} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{x\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\underbrace{x}_{\to 1}\underbrace{(\sqrt{x+8}+3)}_{\to 6}} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

por lo que vemos que $x = 1$ *no* es asíntota vertical para f.

Para determinar las asíntotas horizontales de f, debemos estudiar el límite cuando x tiende $+\infty$ (observamos que, por cómo es el dominio de f, no tiene sentido el límite en $-\infty$, ya que x no puede tomar valores menores que -8):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-x} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{indet. } \frac{\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x\left(1+\frac{8}{x}\right)}-3}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}.\sqrt{1+\frac{8}{x}}-3}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}.\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}{x^{\cancel{2}\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \overbrace{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}^{\to 0} . \frac{\overbrace{\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}^{\to 1-0=1}}{\underbrace{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 1}} = 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\boxed{\text{la recta de ecuación } y = 0 \text{ es asíntota horizontal para } f \text{ en } +\infty}$. □

- $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Solución

En este caso, como la función seno está definida para todo número real, el único valor de $x \in \mathbb{R}$ que no está en el dominio de f es el que anula al denominador de la fracción $\dfrac{1}{x}$ a la que se le aplica; entonces, tenemos que $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}}$.

Analicemos el comportamiento de f cerca de 0. Para esto calculamos el límite

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \overbrace{x}^{\to 0} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{acotada}} = 0.$$

Esto nos dice que $\boxed{\text{la recta de ecuación } x = 0 \text{ es asíntota vertical para } f}$.

Al intentar determinar si el gráfico de f tiene asíntotas horizontales, nos encontramos con una indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \overbrace{x}^{\to\infty} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}.$$

Veremos cómo salvar esta indeterminación más adelante... □

2.3. Dos ejemplos importantes

En lo que sigue, nos interesa estudiar el comportamiento de las funciones

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

en los "bordes" de sus dominios, analizando la existencia de asíntotas horizontales y verticales.

- $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

  El dominio de esta función es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, ya que la función exponencial está definida en todo $\mathbb{R}$ y la división por x puede efectuarse si y sólo si $x \neq 0$.

  Para analizar el comportamiento de f cerca de 0, calculamos los límites laterales cuando $x \to 0^+$ y $x \to 0^-$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0^-}} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = +\infty$$

  Concluimos que la recta de ecuación $x = 0$ es asíntota vertical para f.

  Veamos, ahora, lo que ocurre cuando $x \to -\infty$, es decir, para valores de x negativos y grandes en valor absoluto:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to -\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^x}_{\to 0} = 0$$

  De esta manera, vemos que la recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal para f en $-\infty$.

  Nos queda por ver qué ocurre para valores positivos grandes de x, es decir, cuando $x \to +\infty$. En este caso, estamos en presencia de una indeterminación:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}}$$

  Recordemos que, al estudiar sucesiones en la Práctica 3, vimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty.$$

Esto nos lleva a pensar que el límite que queremos calcular también debería ser $+\infty$. Apliquemos el resultado sobre la sucesión para ver que, en efecto, esto es así. La observación importante es que, para cada número $x \in \mathbb{R}_{>0}$, hay algún número natural n tal que

$$n \leq x < n + 1.$$

Entonces

$$e^n \leq e^x \quad \text{y} \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x}$$

con lo cual,

$$\frac{e^n}{n+1} < \frac{e^x}{x}.$$

Ahora, cuando $x \to +\infty$, los valores de n correspondientes también tienden a infinito y, como

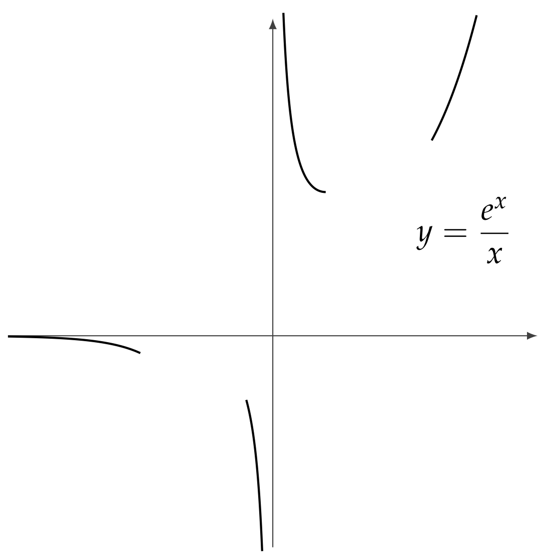
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{e^n}{n}}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} = +\infty,$$

de la desigualdad anterior deducimos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

(y no hay asíntota horizontal en $+\infty$). El hecho de que el cociente $\frac{e^x}{x}$ tienda a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, puede interpretarse como que *la función exponencial "crece más rápido" que la función lineal*.

Con la información obtenida a partir de los límites que calculamos, podemos hacer un gráfico aproximado de f cerca de 0 y para valores grandes de x:



- $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

  El dominio de g es $\text{Dom}(g) = (0, +\infty)$, ya que el dominio del logaritmo es este intervalo y la división por x puede efectuarse para todo $x \neq 0$.

  Para analizar el comportamiento de g "cerca de 0" calculamos el límite de la función cuando x tiende a 0 por derecha, pues g no está definida para $x < 0$. Recordando el comportamiento de la función logaritmo cerca de cero, tenemos que

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = -\infty.$$

  De esta manera, vemos que la recta de ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical para g.

  Por otro lado, estudiemos el límite de la función cuando $x \to +\infty$. Nos encontramos con una indeterminación:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}}.$$

  Para poder calcular este límite, haremos un *cambio de variables* de manera de reducirlo a un límite conocido o más fácil de calcular. En este caso, tomamos $y = \ln(x)$. Observemos que cuando $x \to +\infty$, resulta que $y \to +\infty$. Entonces, en términos de la nueva variable y, el límite que queremos calcular es

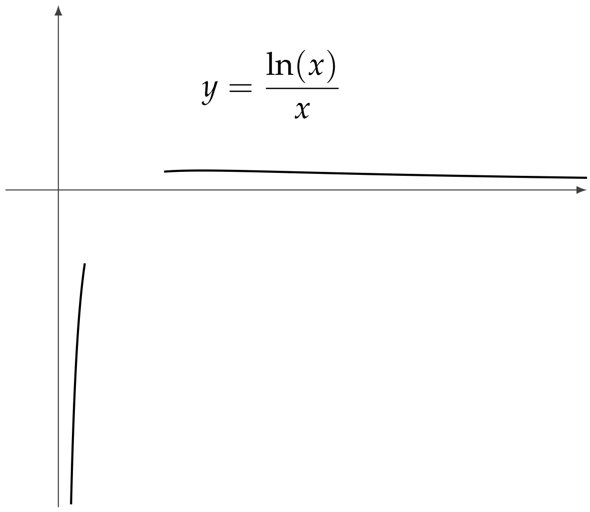
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y}.$$

  Aunque seguimos teniendo una indeterminación del tipo "$\dfrac{\infty}{\infty}$", al reescribir la fracción que aparece, obtenemos la función f del ejemplo anterior, cuyo límite ya conocemos:

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{e^y}{y}}_{\to +\infty}} = 0.$$

  Podemos interpretar este resultado como que *la función logaritmo crece "más lentamente" que la función lineal*.

  Finalmente, si observamos también que la función $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ toma valores positivos para valores grandes de x, podemos hacer un gráfico que refleja el comportamiento de g en los "bordes" de su dominio:



3. Límites especiales

Estudiaremos ahora dos límites especiales que utilizaremos como base para el cálculo de otros límites.
En primer lugar, consideraremos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

Dado que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$, se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Mediante un razonamiento geométrico que se puede ver en la entrada ”Cálculo de un límite especial”, se deduce que vale:

Propiedad.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

Más aún, si hacemos un cambio de variables para reducirlo al caso anterior, resulta que:

Si f es una función tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1$.

A continuación, aplicaremos este resultado para el cálculo de otros límites que involucran indeterminaciones con funciones trigonométricas.

Ejercicio 3. Calcular los siguientes límites.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(4x)}$

  Solución

  Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ en la que el numerador y el denominador involucran la función *seno*. Para calcular el límite, reescribiremos la función en términos de funciones del tipo $\frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)}$ con $f(x) \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(4x)} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(3x)\frac{1}{\operatorname{sen}(4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{4}\overbrace{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}^{\to 1}\frac{1}{\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}}_{\to 1}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

  $\square$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(3x)-x^2}$

  Solución

  Nuevamente se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Dividimos numerador y denominador por x y aplicamos la propiedad distributiva con respecto a la suma para reescribir la función en términos de otras cuyos límites podemos calcular y, de este modo, salvamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(3x)-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(3x)-x^2}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}-x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\overbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}^{\to 1}}{3\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}_{\to 1}-x} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

  $\square$

- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

  Solución

Como $\dfrac{1}{x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$, tenemos una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$. Reescribiendo la función resulta:

$$\lim_{x\to+\infty} x.\,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \boxed{1}$$

Podemos, ahora, completar el análisis de asíntotas para la función $f(x) = x\,\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ que habíamos comenzado en el Ejercicio 2: por el cálculo anterior, la recta de ecuación $y = 1$ es asíntota horizontal en $+\infty$ para f. De igual manera, se ve que la misma recta es, también, asíntota horizontal en $-\infty$. □

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$

Solución

Nuevamente nos encontramos frente a una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, dado que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$. En este caso, a diferencia de los anteriores, la función involucrada es *coseno*, en lugar de *seno*. Recordando la identidad $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, válida para todo x, obtenemos una nueva expresión para el cálculo del límite multiplicando numerador y denominador por $\cos(x) + 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)}{x(\cos(x) + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x(\cos(x) + 1)} \underset{\cos^2(x)=1-\operatorname{sen}^2(x)}{\overset{\downarrow}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2(x)}{x(\cos(x) + 1)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\to 1} \, \frac{-\overbrace{\operatorname{sen}(x)}^{\to 0}}{\underbrace{\cos(x)}_{\to 1} + 1} = \boxed{0}$$

□

El segundo de los límites especiales que nos interesa calcular es el siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1$, estamos ante una indeterminación del tipo 1^∞.
Recordemos que, al estudiar sucesiones en la Práctica 3, vimos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

es decir, conocemos el valor del límite cuando la variable x toma valores en los números naturales en lugar de números reales. Sin embargo, de manera similar a lo hecho para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$, se puede deducir que también vale:

Propiedad.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

y que lo mismo ocurre para $x\to-\infty$, es decir:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

A partir de este resultado, es posible calcular otros límites en el caso de indeterminaciones del tipo 1^∞; por ejemplo, calculemos

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(observemos que, en efecto, se trata de una indeterminación del tipo 1^∞). Al hacer el cambio de variable $y=\dfrac{1}{x}$, nos queda:

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e.$$

Ejercicio 4. Calcular los siguientes límites.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{2x+1}}$

Solución
Calculando los límites de las funciones que aparecen en la base y en el exponente, obtenemos que $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{3}{x+1}=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}=-\infty$, con lo cual se trata de una indeterminación del tipo 1^∞.

Al igual que para el cálculo de límites de sucesiones que dan lugar a indeterminaciones del tipo 1^∞, para aplicar la propiedad vista anteriormente, reescribiremos la función como una potencia de otra de la forma

$$\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \qquad \text{con } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty.$$

Comenzamos reescribiendo la base de la potencia y, a continuación, el exponente:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{2x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{3}}\right)^{\frac{x^2}{2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{3}}\right)^{\overbrace{\frac{x+1}{3}}^{\to-\infty}}}_{\to e}\right)^{\frac{3}{x+1}\frac{x^2}{2x+1}}$$

Calculamos, ahora, el límite de la función que aparece en el exponente:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{(x+1)(2x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{(1+\frac{1}{x})(2+\frac{1}{x})}=\frac{3}{2}.$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{2x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{3}}\right)^{\frac{x+1}{3}}}_{\to e}\right)^{\underbrace{\frac{3x^2}{(x+1)(2x+1)}}_{\to\frac{3}{2}}}=\boxed{e^{\frac{3}{2}}}$$

□

- $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}}$

Solución
Observamos que se trata de una indeterminación del tipo 1^∞, ya que

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{3x-2}=1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3}\frac{x}{x-3}=\infty.$$

Entonces, para calcular el límite, reescribiremos la función de manera similar a lo hecho en el ejemplo anterior:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}}=\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{2x+1}{3x-2}-1\right)^{\frac{x}{x-3}}=\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{3-x}{3x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-2}{3-x}}\right)^{\frac{x}{x-3}}=\lim_{x\to 3}\left(\left(1+\frac{1}{\underbrace{\frac{3x-2}{3-x}}_{\to\infty}}\right)^{\frac{3x-2}{3-x}}\right)^{\frac{3-x}{3x-2}\frac{x}{x-3}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{3x-2}{3-x}}\right)^{\frac{3x-2}{3-x}}}_{\to e}\Bigg)^{\overbrace{\frac{-x}{3x-2}}^{\to -\frac{3}{7}}}=\boxed{e^{-\frac{3}{7}}}$$

$\square$

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Solución
En este caso, se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Sin embargo, al reescribir la función, nos encontraremos nuevamente en el caso 1^∞ conocido:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)\underset{\substack{\downarrow\\ a\ln(b)=\ln(b^a)}}{=}\lim_{x\to 0}\ln\Big(\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\to e}\Big)=\ln(e)=\boxed{1}$$

$\square$

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

Solución
Tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.
Haremos el cambio de variables $y=e^x-1$ (o sea, $x=\ln(1+y)$) para transformar el límite en otro que ya sabemos calcular. En este caso, si $x\to 0$, entonces $y\to 0$. El límite queda:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\underbrace{\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}}_{\to 1}=\boxed{1}$$

□

ANEXO

A. Definiciones de límite

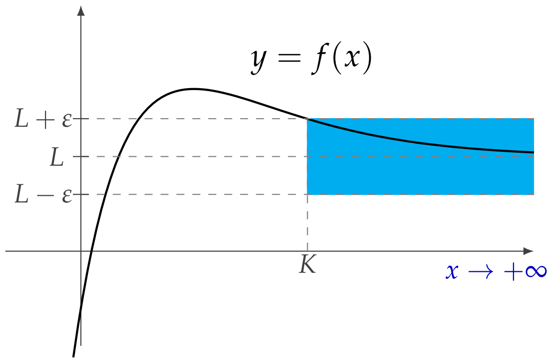
Introducimos, a continuación, las definiciones precisas relacionadas con límites de funciones, tanto en el caso de límites en el infinito como en el de límites puntuales.

A.1. Límites en el infinito

Se dice que el límite cuando x tiende a $+\infty$ de $f(x)$ es un número L, y se escribe:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x > K$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

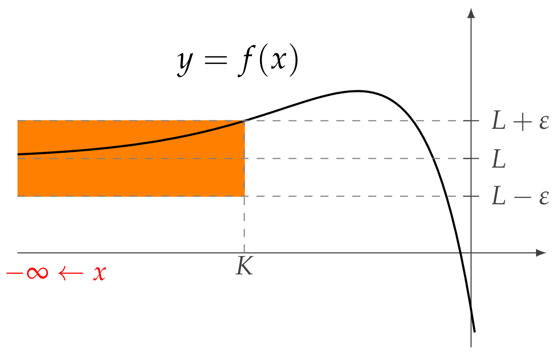


Para $x > K$, el gráfico de f está dentro de la franja celeste.

Se dice que el límite cuando x tiende a $-\infty$ de $f(x)$ es un número L, y se escribe:

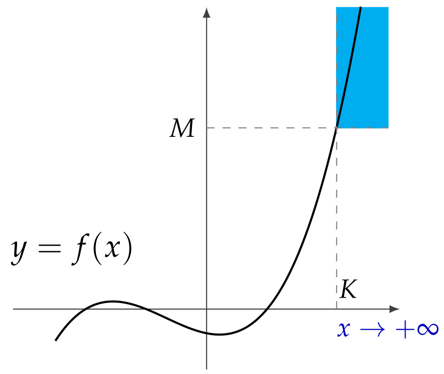
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x < K$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Para $x < K$, el gráfico de f está dentro de la franja naranja.

En cualquiera de los dos casos anteriores, decimos que la recta $y = L$ es una *asíntota horizontal* para f.

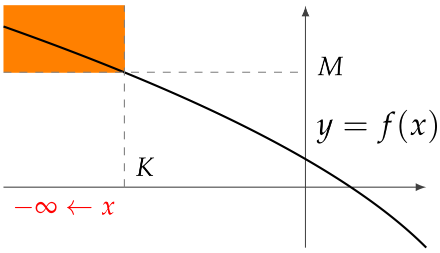


Para $x > K$, el gráfico de f está dentro del sector celeste.

Se dice que el límite cuando x tiende a $+\infty$ de $f(x)$ es $+\infty$, y se escribe:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

si para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x > K$, entonces $f(x) > M$.



Para $x < K$, el gráfico de f está dentro del sector naranja.

Se dice que el límite cuando x tiende a $-\infty$ de $f(x)$ es $+\infty$, y se escribe:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

si para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x < K$, entonces $f(x) > M$.

De manera análoga, se dice que:

- el límite cuando x tiende a $+\infty$ de $f(x)$ es $-\infty$, y se escribe:

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

  si para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x > K$, entonces $f(x) < M$.

- el límite cuando x tiende a $-\infty$ de $f(x)$ es $-\infty$, y se escribe:

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

  si para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x < K$, entonces $f(x) < M$.

Volver al texto principal

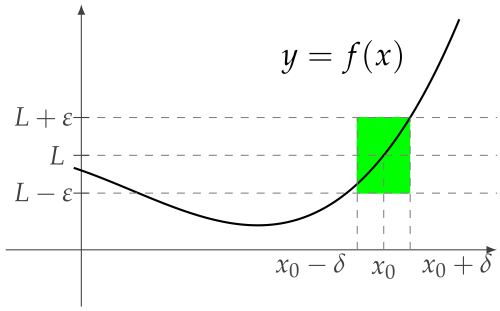
A.2. Límite puntual

Presentamos, a continuación, la definición precisa de límite puntual en el caso en que este límite es un número real.

Se dice que el límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es un número L, y se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Para $0 < |x - x_0| < \delta$, el gráfico de f está dentro del sector verde.

En palabras, la definición nos dice que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ cuando, dada una distancia $\varepsilon > 0$ *cualquiera*, si x está suficientemente cerca de x_0, entonces el valor de $f(x)$ está a distancia menor que ε de L.

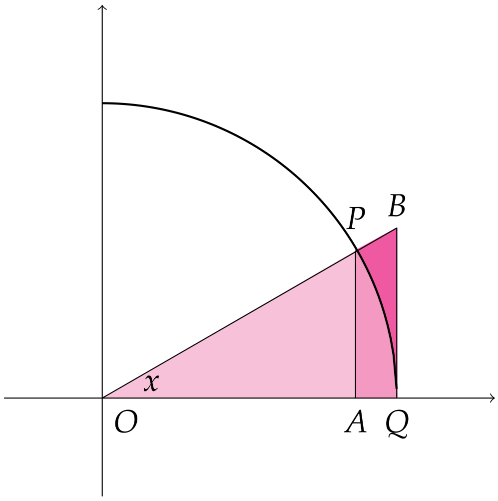
Volver al texto principal

B. Cálculo de un límite especial

Nos concentraremos, a continuación, en el cálculo del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

Para deducir el valor de este límite, utilizaremos una visualización geométrica. Consideremos un ángulo de x radianes (con $0 < x < \frac{\pi}{2}$) con vértice en el origen de coordenadas O, un lado sobre el eje de las abscisas y el otro, en el primer cuadrante. Los lados de este ángulo intersecan a la circunferencia de radio 1 en dos puntos, P y Q, determinando un sector circular POQ. Construimos dos triángulos rectángulos, OAP y OQB, como se muestra en la figura:



Gráficamente, podemos observar la siguiente relación entre las áreas del sector circular y los dos triángulos rectángulos:

$$\text{área}(\triangle OAP) < \text{área}(POQ) < \text{área}(\triangle OQB)$$

Calculemos estas áreas en función de x:

- En el triángulo OAP, tenemos que la medida de su base OA es $\cos(x)$, mientras que su altura AP mide $\operatorname{sen}(x)$; luego,
$$\text{área}(\triangle OAP) = \frac{1}{2}\cos(x)\operatorname{sen}(x).$$
- En el triángulo OQB, la base OQ mide 1 (es el radio de la circunferencia). Para calcular la medida h de la altura QB, recordemos que el cociente entre las medidas de los dos catetos del triángulo, BQ y OQ, es $\operatorname{tg}(x)$; o sea que $\frac{h}{1} = \operatorname{tg}(x)$. Entonces, $h = \operatorname{tg}(x)$, y el área del triángulo resulta ser
$$\text{área}(\triangle OQB) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}.$$
- Finalmente, el área del sector circular es proporcional al ángulo que lo determina y, teniendo en cuenta que el área del círculo (correspondiente a un ángulo de 2π radianes) es π, resulta que
$$\text{área}(POQ) = \frac{1}{2}x.$$

Reemplazando los valores calculados en la desigualdad entre áreas, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\cos(x)\operatorname{sen}(x) < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Dividiendo cada miembro de la desigualdad anterior por $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) > 0$, deducimos que

$$\cos(x) < \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

y, al considerar los inversos, llegamos a que para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ vale:

$$\frac{1}{\cos(x)} < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \cos(x).$$

Dado que $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$, también vale $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos(x)} = 1$ y, entonces, aplicando la propiedad del "sándwich", deducimos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

En forma similar, puede verse que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

Volver al texto principal

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Límite de funciones, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.