Práctica 2

Números reales

En esta unidad estudiaremos las propiedades de los números reales. Si bien en los exámenes no suele haber problemas específicos de este tema, dichas propiedades son las herramientas fundamentales para el resto de los contenidos que conforman la materia y resulta imposible seguir con el programa si no nos aseguramos de entenderlas.

Hasta el momento conocemos distintos conjuntos de números:

- **Naturales**, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, que sirven para contar;
- **Enteros**, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, que surgen al agregarle los negativos (u opuestos) a los naturales;
- **Racionales**, $\mathbb{Q}$, que son todos las fracciones con numerador y denominador entero y denominador distinto de cero: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\right\}$. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$; $-\frac{10}{27}$; $\frac{1}{1000}$ y $-\frac{37}{3}$ son números racionales.

Cada uno de estos conjuntos resulta estar incluido en el anterior: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

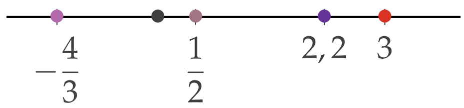
Algunas observaciones sobre los números racionales:

- Los números racionales tienen dos operaciones llamadas suma, $+$, y producto, $\cdot$, que satisfacen ciertas reglas. Estas reglas se llaman axiomas, son nueve y se pueden ver en la entrada "Axiomas de cuerpo". Además, dados dos números racionales x e y siempre pueden compararse, es decir, siempre vale una de las siguientes afirmaciones: o bien $x < y$, o bien $x > y$, o bien $x = y$. Los axiomas y el orden hacen que $\mathbb{Q}$ sea un *cuerpo ordenado*.
- Cada número racional admite una expresión decimal finita o periódica y cada expresión decimal finita o periódica representa un número racional. Por ejemplo:

  $$\frac{6}{5} = 1,2 \qquad \frac{2}{3} = 0,\overline{6} \qquad 0,3\overline{81} = \frac{378}{990}$$

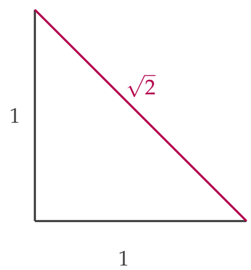
  ¿Cómo pasar de la expresión decimal de un número a una fracción y viceversa? En la entrada "Fracciones y desarrollo decimal" mostramos cómo hacerlo en algunos ejemplos.

- Los números racionales pueden representarse en una recta donde se fijan el cero y la unidad de longitud, es decir el uno. Por ejemplo, los números $-\frac{4}{3}$; $\frac{1}{2}$; $2,2$ y 3 se representan



- *Densidad.* Entre dos números racionales distintos siempre hay otro racional. Por ejemplo, entre $\frac{9}{10}$ y 1, podemos ubicar el número $\frac{19}{20}$, ya que $\frac{9}{10} < \frac{19}{20} < 1$ y entre $3,999$ y 4 encontramos el $3,9999$;
$$3,999 < 3,9999 < 4.$$
En realidad, de esta afirmación deducimos que entre dos números racionales siempre hay **infinitos** números racionales (tal vez sea necesario pensarlo un rato y convencerse de que es cierto).

Sin embargo, si lográramos marcar **todos** los números racionales en una recta, igual nos quedarían puntos sin marcar. Por ejemplo, el punto que representa al valor $\sqrt{2}$, un número que aparece naturalmente si queremos medir el largo de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1:



En la entrada "Raíz de dos" hay una demostración de que $\sqrt{2}$ no es racional, es decir, de que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente de números enteros.
Si a los números racionales les agregamos todos los números que se necesitan para no dejar agujeros en la recta, obtenemos los números *reales*. Al conjunto de los números reales los vamos a denotar con la letra $\mathbb{R}$.

¿Qué podemos decir de los números reales?

- Cada número real admite un desarrollo decimal. Los números que tienen desarrollo infinito y no periódico son los números "nuevos", que no son racionales, y los vamos a llamar *irracionales*. Por ejemplo, el número $0,10110111011110...$ es irracional.

- *Densidad.* Entre dos números reales siempre hay otro número real. Por ejemplo, entre $1,41$ y $\sqrt{2}$ podemos ubicar al $1,41411$ ya que

$$1,41 < 1,41411 < \sqrt{2}.$$

  Como antes, decir que entre dos números reales siempre hay otro real, es lo mismo que decir que entre dos números reales hay infinitos reales (como antes, pensarlo un rato).

- Los axiomas de cuerpo ordenado que mencionamos anteriormente son comunes tanto a los números racionales como a los reales.

A continuación repasaremos cómo representar algunos subconjuntos de los números reales.

1. Intervalos y otros subconjuntos de la recta real

Aunque ya los usamos cuando estudiamos el dominio y la imagen de funciones, vamos a recordar qué son los intervalos y cómo los escribimos. Un intervalo está formado por los números reales que corresponden a los puntos de un segmento o una semirrecta de la recta real. Puede incluir o no a los extremos del segmento o la semirrecta.
Por ejemplo, el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \, / \, x \geq 1\}$ corresponde a los puntos de la semirrecta hacia la derecha de $x = 1$, incluyendo a $x = 1$:

A este conjunto lo vamos a representar por $A = [1, +\infty)$.

El conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \, / \, -1 < x \leq 2\}$ corresponde a los puntos del segmento comprendido entre $x = -1$ y $x = 2$ (es decir, los puntos que se hallan a la derecha de $x = -1$ y simultáneamente a la izquierda de $x = 2$), incluyendo a $x = 2$, pero no a $x = -1$:

En este caso, usamos la notación $B = (-1; 2]$ para representar a este conjunto.

En general, dado $a \in \mathbb{R}$, se escribe

- $(a; +\infty)$ para representar al conjunto $\{x \in \mathbb{R} \, / \, x > a\}$, es decir, la semirrecta a la derecha de a sin incluir a a;

- $[a; +\infty)$ para representar al conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq a\}$, es decir, la semirrecta a la derecha de a incluyendo a a.

De la misma manera, para representar una semirrecta a la izquierda de a, se escribe

- $(-\infty; a)$ para el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\}$, que no contiene a a;
- $(-\infty; a]$ para el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq a\}$, que contiene a a.

Dados dos números reales a y b con $a < b$, los intervalos que representan segmentos con extremos en a y en b se representan como

$$(a; b), \quad [a; b), \quad (a; b] \quad \text{y} \quad [a; b],$$

donde el paréntesis indica que el extremo correspondiente no pertenece al conjunto y el corchete, que sí. Siguiendo el lenguaje de los segmentos, a y b se llaman los extremos del intervalo. Veamos algunos ejemplos:

- $(3; 5) = \{x \in \mathbb{R} \, / \, 3 < x < 5\}$ (ni 3 ni 5 pertenecen al intervalo). A los intervalos que no contienen a ninguno de sus extremos los llamamos *abiertos*.
- $[3; 5] = \{x \in \mathbb{R} \, / \, 3 \leq x \leq 5\}$ (3 y 5 pertenecen al intervalo). A los intervalos que incluyen a ambos extremos los llamamos *cerrados*.
- $(3; 5] = \{x \in \mathbb{R} \, / \, 3 < x \leq 5\}$ (3 no pertenece al intervalo pero 5 sí).
- $[3; 5) = \{x \in \mathbb{R} \, / \, 3 \leq x < 5\}$ (3 pertenece al intervalo pero 5 no).

Al ya saber representar y describir segmentos de la recta real, vamos a presentar algunos ejemplos de cómo podemos describir otros conjuntos de números reales como intervalos o como unión de intervalos.

Ejercicio 1. Graficar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \, / \, 7 \leq 2x + 1 \leq 9\}$.

Solución
La condición

$$7 \leq 2x + 1 \leq 9$$

que define a A significa que los elementos de este conjunto son los números reales que cumplen simultáneamente las dos desigualdades siguientes:

$$7 \leq 2x + 1 \quad \text{y} \quad 2x + 1 \leq 9.$$

Cada una de estas desigualdades se llama una *inecuación*. Podemos resolver cada una de las dos inecuaciones por separado y luego ver qué valores son soluciones de ambas, pero veamos cómo resolverlas juntas. Para hacerlo, llevaremos la expresión

$$7 \leq 2x + 1 \leq 9$$

a otra equivalente, es decir con el mismo conjunto como solución, y más simple, teniendo siempre presente que nuestro objetivo será llegar a determinar qué desigualdades debe cumplir el número x que estamos buscando.

Empecemos restando 1 en todos los miembros:

$$7 \leq 2x + 1 \leq 9 \quad \xrightarrow{\boxed{\text{restando } 1}} \quad 7 - 1 \leq 2x + 1 - 1 \leq 9 - 1.$$

De esta manera, observamos que en el miembro del medio se cancelan dos términos:

$$7 - 1 \leq 2x \cancel{+1} \cancel{-1} \leq 9 - 1 \quad \longrightarrow \quad 6 \leq 2x \leq 8.$$

Luego dividimos por 2 en todos los miembros, pero atención:

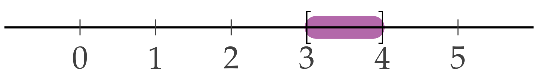
si dividiéramos por un número negativo, tendríamos que invertir el sentido de las desigualdades,

$$\frac{6}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{8}{2} \quad \xrightarrow{\boxed{\text{simplificando}}} \quad 3 \leq x \leq 4.$$

Entonces el conjunto A se puede escribir como

$$\boxed{A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 \leq x \leq 4\} = [3; 4],}$$

cuya representación en la recta es



$\square$

Ejercicio 2. Escribir como un intervalo o una unión de intervalos y representar en la recta el conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x-2)(x+4) < 0\}.$$

Solución

Antes de resolver, recordemos que, por la regla de los signos, un producto de dos factores es positivo (es decir, mayor que cero) cuando ambos factores tienen el mismo signo, y es negativo (o sea, menor que cero) en los otros casos. Por ejemplo:

$$\boxed{2\cdot 3 > 0\,; \qquad (-2)(-3) > 0\,; \qquad 2\cdot(-3) < 0\,; \qquad (-2)\cdot 3 < 0}$$

Para que $(x-2)(x+4)$ sea negativo, hay dos casos posibles

$$a) \quad x-2 > 0 \qquad \text{y} \qquad x+4 < 0$$

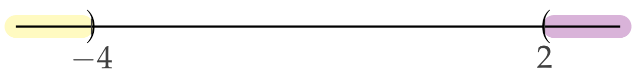
o bien

$$b) \quad x-2 < 0 \qquad \text{y} \qquad x+4 > 0$$

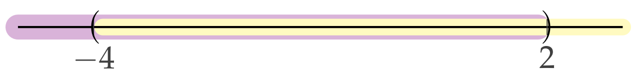
a) Despejando, vemos que esto ocurre si y sólo si

$$x > 2 \;\text{ y }\; x < -4;$$

pero estas dos condiciones no pueden cumplirse simultáneamente. Un número no puede ser menor que -4 y al mismo tiempo mayor que 2. El caso a), por lo tanto, no produce soluciones.



b) En este caso, debe ser $x < 2$ y simultáneamente $x > -4$:



así, tenemos que si x cumple la desigualdad es porque está en el intervalo $(-4; 2)$, que se representa en la siguiente figura:

Al unir lo que obtuvimos en a) y en b), tenemos

$$\boxed{B = \emptyset \cup (-4; 2) = (-4; 2).}$$

$\square$

Ejercicio 3. Escribir como un intervalo o una unión de intervalos y representar en la recta el conjunto

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{2x+1}{x+3} \geq 1 \right\}.$$

Solución

Primero llevemos la desigualdad

$$\frac{2x+1}{x+3} \geq 1$$

a otra equivalente pero donde, en vez de comparar una fracción con 1, se compara otra fracción con 0, ya que en este caso podemos apelar a la regla de los signos para resolverla, como hicimos en el ejemplo anterior.

$$\frac{2x+1}{x+3} \geq 1 \quad \xrightarrow{\boxed{\text{restando } 1}} \quad \frac{2x+1}{x+3} - 1 \geq 0$$

Reescribamos el término que aparece en el lado izquierdo de la desigualdad como una única fracción,

$$\frac{2x+1}{x+3} - 1 \overset{\boxed{\text{común denominador}}}{=} \frac{2x+1-(x+3)}{x+3} = \frac{2x+1-x-3}{x+3}$$

y finalmente obtenemos que la desigualdad original es equivalente a

$$\frac{x-2}{x+3} \geq 0.$$

Por la regla de los signos, para que la fracción $\frac{x-2}{x+3}$ sea mayor o igual que cero, hay dos casos posibles

$$a) \quad x-2 \leq 0 \qquad \text{y} \qquad x+3 < 0$$

o bien

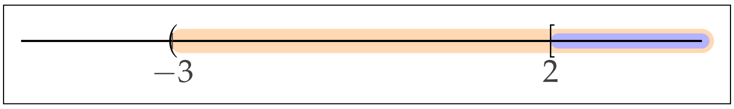
$$b) \quad x-2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x+3 > 0$$

Notemos que el denominador nunca puede ser cero.

a) Esto vale si, y solo si,
$$x \leq 2 \ \text{ y } \ x < -3.$$
Veamos gráficamente cuándo se cumplen ambas condiciones en simultáneo:

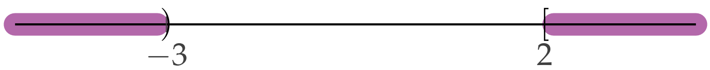
Nos da el intervalo $(-\infty; -3)$.

b) Esta situación ocurre si y sólo si
$$x \geq 2 \ \text{ y } \ x > -3.$$
Observemos en el gráfico cuándo se cumplen ambas condiciones en simultáneo:



Esto nos da el intervalo $[2; +\infty)$.

Luego, la solución final, que es la unión de las soluciones de los casos a) y b), es
$$\boxed{C = (-\infty; -3) \cup [2; +\infty)}$$
que representamos gráficamente:

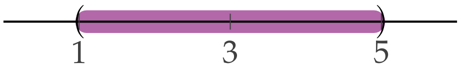


$\square$

Ejercicio 4. Escribir como un intervalo o una unión de intervalos y representar en la recta el conjunto
$$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-3| < 2\}.$$

Solución

Empecemos estudiando cuáles son los números reales que satisfacen que $|x-3| < 2$. Ya vimos que $|x-3|$ expresa la distancia que hay entre el número x y el 3, de modo que buscaremos todos los números reales que disten del 3 en menos que 2, es decir



Algebraicamente, tenemos que

$$|x-3|<2 \qquad \longleftrightarrow \qquad -2<x-3<2 \qquad \overset{\boxed{\text{sumando } 3}}{\longleftrightarrow} \quad 1<x<5$$

y, por lo tanto, el conjunto

$$\boxed{D=(1;5).}$$

$\square$

2. Cotas superiores y supremo

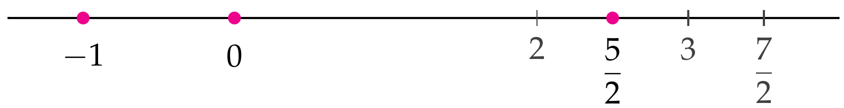
Ya mencionamos que los números racionales y los números reales satisfacen los axiomas de cuerpo ordenado. Sin embargo, los números reales satisfacen un nuevo axioma que permite distinguirlos de los racionales, el *axioma de completitud*. Finalizaremos esta sección con el enunciado de este axioma. Para esto, primero necesitamos algunas definiciones.
Dado un subconjunto A de números reales, decimos que un número K es *cota superior* de A si en la recta todos los elementos de A están a la izquierda de K. En otras palabra, si todos los elementos de A son menores o iguales que K: para todo $a \in A$, $a \leq K$.
Podemos visualizar esta noción en la recta numérica:

Si el conjunto A tiene una cota superior, decimos que A está *acotado superiormente*.
Veamos algunos ejemplos:

- el conjunto $(-\infty;2)$ está acotado superiormente, ya que todo $x \in (-\infty;2)$ verifica que $x \leq 3$, es decir 3 es una cota superior para $(-\infty;2)$.

Como marcamos en el dibujo, $\frac{7}{2}$ también es cota superior de $(-\infty; 2)$. Observemos que $(-\infty; 2)$ tiene muchas cotas superiores, por ejemplo, 100, π, 37, etc. Entre todas las cotas superiores, 2 es la más chica posible.

- para el conjunto $\left\{-1; 0; \frac{5}{2}\right\}$, 3 y $\frac{7}{2}$ también son dos cotas superiores pero 2 no es cota superior ya que $\frac{5}{2} > 2$



La menor de todas las cotas superiores del conjunto $\left\{-1; 0; \frac{5}{2}\right\}$ es el $\frac{5}{2}$.

- para $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{x^2} > \frac{1}{4}\right\}$ el 2 es una cota superior y es la menor posible ya que si

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{4} \qquad \text{entonces}$$

$$x \neq 0 \quad \text{y} \quad x^2 < 4 \qquad \text{entonces}$$

$$0 < |x| < 2 \qquad \text{entonces}$$

$$x \neq 0 \quad \text{y} \quad -2 < x < 4$$

- el conjunto $(2; +\infty)$ no tiene una cota superior ya que contiene números arbitrariamente grandes.
- otro conjunto que es obviamente no acotado es el de los números naturales.

Si el conjunto A es acotado superiormente, la menor de todas las cotas superiores se llama *supremo*.

En los ejemplos que vimos recién, tenemos que 2 es el supremo de $(-\infty; 2)$ y de $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{x^2} > \frac{1}{4}\right\}$ y $\frac{5}{2}$ el de $\left\{-1; 0; \frac{5}{2}\right\}$.

Si s es el supremo de A vamos a escribirlo $s = \sup(A)$.

Demos una definición formal de supremo: si A es un conjunto de números reales, s es el supremo de A si verifica las siguientes dos condiciones:

- S1) s es cota superior de A y
- S2) si t es otra cota superior de A, entonces $s \leq t$.

Otra forma equivalente de definir el supremo es

- S1) s es cota superior de A y
- S2') si r es un número real positivo cualquiera, entonces $s - r$ **no** es cota superior de A, es decir, siempre exite un $a \in A$ tal que $s - r < a \leq s$.

Ahora sí estamos en condiciones de presentar el

AXIOMA DE COMPLETITUD:

Un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente siempre tiene supremo.

El siguiente ejemplo muestra que los números racionales **no** verifican este axioma.

Vamos a escribir $\mathbb{R}_{>0}$ por el conjunto de los números reales estrictamente mayores que cero y $\mathbb{Q}_{>0}$ por el de los números racionales estrictamente mayores que cero.

Ejemplo. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R}_{>0} \colon x^2 < 2\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in \mathbb{Q}_{>0} \colon x^2 < 2\}.$$

Ambos conjuntos, A y B, son no vacíos y acotados superiormente. El número $\sqrt{2}$ es el supremo de A ya que es la menor de las cotas superiores. Por otro lado, si nos restringimos a mirar a B dentro de los números racionales, no tiene supremo ya que toda cota superior racional de B puede ser "mejorada" por otro racional más cercano a $\sqrt{2}$.

Ejercicio 5. Probar que 3 es el supremo del conjunto

$$C = \left\{3 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{3 - 1, 3 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{3}, 3 - \frac{1}{4}, \ldots\right\}.$$

Solución

Para ver que 3 es el supremo de este conjunto necesitamos chequear que es la menor de las cotas superiores. En otras palabras, analizaremos que se cumplen las condiciones S1) y S2').

S1) Es claro que 3 es cota superior de C ya que todos los elementos de C se obtienen restándole a 3 un número positivo.

S2') Dado un número real positivo cualquiera r, queremos ver que $3 - r$ no es cota superior de C, es decir, que podemos encontrar un elemento de C mayor que $3 - r$. Por supuesto, la dificultad está en ver esto cuando r es un número positivo muy cerca de 0, porque si r es muy grande, todos los elementos de C cumplen que son mayores que $3 - r$.

Fijemos el número r positivo pero muy pequeño. Busquemos un número natural n tal que

$$3 - r < 3 - \frac{1}{n} < 3.$$

Para que esto suceda, n tiene que verificar que

$$3 - r < 3 - \frac{1}{n} < 3 \qquad \text{o sea que} \qquad r > \frac{1}{n} \qquad \text{es decir que} \qquad n > \frac{1}{r}.$$

Recordemos que r es muy pequeño, o sea que $\frac{1}{r}$ es muy grande pero, no importa qué tan grande sea un número, siempre podemos encontrar un natural que sea mayor dado que, como dijimos antes, los números naturales forman un conjunto no acotado. Así, lo que necesitamos es tomar cualquier natural $n > \frac{1}{r}$ para conseguir que $3 - r < 3 - \frac{1}{n} < 3$. □

Ejercicio 6. Decidir si el conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 6 \leq 0\}$ es acotado superiormente y en caso afirmativo, encontrar $\sup(D)$.

Solución

Para decidir si existe el supremo del conjunto D tenemos que ver si es un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Para esto, analicemos si podemos describir a este conjunto como un intervalo o una unión de intervalos.

Los $x \in D$ deben satisfacer que

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$

es decir, que

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3) \leq 0.$$

Ya vimos que, por la regla de los signos, este tipo de desigualdades se resuelven planteando los dos casos posibles:

$$a) \quad x - 2 \leq 0 \qquad \text{y} \qquad x + 3 \geq 0$$

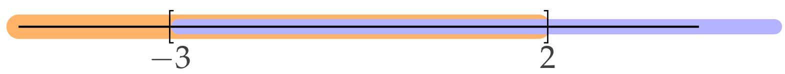
o bien

$$b) \quad x - 2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x + 3 \leq 0$$

a) Esto vale si, y solo si,

$$x \leq 2 \;\text{ y }\; x \geq -3.$$

Gráficamente, ambas condiciones se cumplen en:



Esto nos da el intervalo $[-3; 2]$.

b) Esta situación ocurre si, y solo si,

$$x \geq 2 \;\text{ y }\; x \leq -3.$$

Es muy fácil ver que estas dos condiciones no se pueden cumplir simultáneamente.

Luego, la solución final, es la que obtuvimos en el caso a) ya que el caso b) no nos aporta ninguna solución. De este modo, el conjunto D puede escribirse como el intervalo

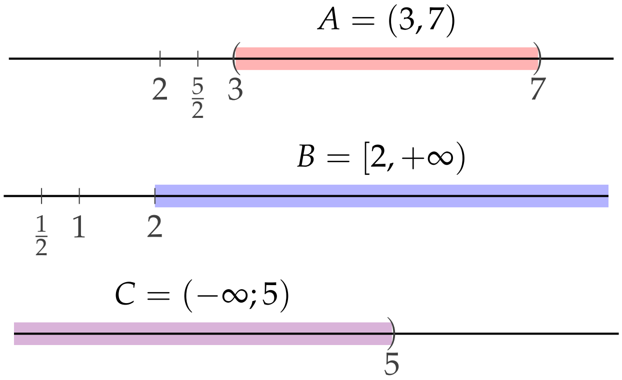
$$\boxed{D = [-3; 2].}$$

Una vez que reescribimos al conjunto D de esta forma, es inmediato responder que D es acotado superiormente. La mejor de todas las cotas superiores de D es, claramente, el número 2 ya que es una cota superior y, como pertenece al conjunto D, siempre verifica que cualquier otra cota superior de D es mayor que 2 y, por lo tanto, $\sup(D) = 2$. $\square$

Comparando los dos últimos ejemplos observamos que cuando un conjunto es acotado superiormente, su supremo puede o no pertenecer al conjunto. En el caso en que el supremo pertenece al conjunto diremos que es el *máximo* del conjunto.

3. Cotas inferiores e ínfimo

En forma similar a lo desarrollado en el apartado anterior, podemos introducir las nociones de *cota inferior* e *ínfimo*.
Una *cota inferior* de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un número $k \in \mathbb{R}$ que es menor o igual que todo elemento de A. Se dice que el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está *acotado inferiormente* si tiene alguna cota inferior.
Por ejemplo, para el intervalo $A = (3;7)$, algunas cotas inferiores son 2, $\frac{5}{2}$ y 3. Por otro lado, $\frac{1}{2}$, 1 y 2 son cotas inferiores de $B = [2;+\infty)$, mientras que $C = (-\infty;5)$ no está acotado inferiormente.



Cuando un conjunto está acotado inferiormente, nos preguntamos por la ”mejor” cota inferior posible; en este caso, se trata de buscar la mayor de las cotas inferiores del conjunto. A esta última se la llama el *ínfimo* del conjunto. Si i es el ínfimo de un conjunto A, escribimos $i = \inf(A)$ y si el ínfimo del conjunto A pertenece a A lo llamamos *mínimo*.
Por ejemplo, para los conjuntos $A = (3;7)$, $B = [2;+\infty)$ y $C = (-\infty;5)$ representados en la figura de arriba, tenemos que $\inf(A) = 3$, $\inf(B) = 2$ y C no tiene ínfimo.

Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y acotado inferiormente, el ínfimo de A es la mayor de las cotas inferiores de A; en otras palabras, es un número $i \in \mathbb{R}$ que cumple las dos condiciones siguientes:

- I1) i es una cota inferior de A,
- I2) si d es una cota inferior de A, entonces $d \leq i$.

Al igual que con el supremo de un conjunto, hay otra forma equivalente de definir el ínfimo de un conjunto A: $i \in \mathbb{R}$ es el ínfimo del conjunto A si

- I1) i es una cota inferior de A,

- I'2) para cualquier r real positivo, existe un elemento $a \in A$ tal que $i \geq a \geq i + r$.

Ejercicio 7. Considerar el conjunto $A = \left\{ 2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Determinar si A es acotado superiormente y/o inferiormente y hallar, si existen, el supremo y el ínfimo de A.

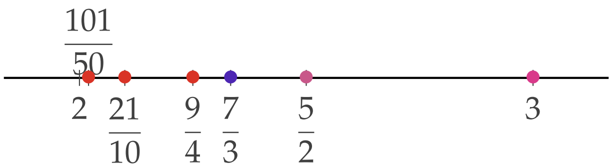
Solución

Para comenzar, escribamos algunos elementos de A e intentemos graficarlos aproximadamente sobre la recta real.

$$A = \left\{ 2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} =$$

$$= \left\{ 2 + \frac{1}{1}; 2 + \frac{1}{2}; 2 + \frac{1}{3}; 2 + \frac{1}{4}; \ldots; 2 + \frac{1}{10}; \ldots, 2 + \frac{1}{50}; \ldots \right\} =$$

$$= \left\{ 3; 2; \frac{7}{3}; \frac{9}{4}; \ldots; \frac{21}{10}; \ldots; \frac{101}{50}; \ldots \right\}$$



El dibujo aproximado que hicimos nos permite intuir que $3 = \sup(A)$ y que $2 = \inf(A)$. Demostraremos que estas dos afirmaciones son verdaderas.

Observemos primero que si un elemento a pertenece a A es porque existe un número natural n tal que $a = 2 + \frac{1}{n}$.

Como n es natural, $\frac{1}{n}$ es positivo y

$$2 + \frac{1}{n} > 2.$$

De esta manera, todos los elementos del conjunto A resultan ser mayores que 2 y, por lo tanto, 2 es una cota inferior.

Por otro lado, a medida que el valor de n va creciendo, los valores correspondientes a los elementos de A van decreciendo pues

$$n < n + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad 2 + \frac{1}{n+1} < 2 + \frac{1}{n}$$

Sabemos entonces que los valores de los elementos de A van disminuyendo a medida que tomamos números naturales más grandes. Así, el elemento más grande que podemos encontrar en el conjunto A se obtiene tomando $n = 1$, es decir 3. Por lo tanto, 3 es una cota superior de A.

Contamos por el momento con que, cualquiera sea el valor de n,

$$2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3.$$

Como 3 pertenece al conjunto A y es cota superior, 3 resulta ser el supremo (y el máximo) de A. Nos falta comprobar si 2 es el ínfimo.

Ya vimos que 2 verifica la condición I1) de ínfimo. Veamos si verifica la I'2).

Sea r un número real positivo cualquiera. Queremos encontrar un número natural n tal que

$$2 < 2 + \frac{1}{n} < 2 + r.$$

Como los números naturales forman un conjunto no acotado superiormente, siempre es posible encontrar (infinitos) valores de n tales que

$$n > \frac{1}{r}$$

y para estos valores de n se va a verificar la desigualdad buscada.

Por lo tanto, $2 = \inf(A)$. Además, es claro que $2 \notin A$ pues para que esto ocurra necesitaríamos encontrar un valor de n para el cual $\frac{1}{n} = 0$, lo cual es imposible, por lo tanto, podemos asegurar que el conjunto A no tiene mínimo. $\square$

ANEXO

A. Axiomas de cuerpo

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ tiene dos operaciones: la suma o adición, +, y el producto o multiplicación, que se indica con un punto, $\cdot$. Cada vez que sumamos o multiplicamos dos números racionales obtenemos otro racional, es decir, $\mathbb{Q}$ es cerrado con la suma y el producto. Estas dos operaciones verifican los siguientes axiomas:

Axiomas de la suma

- Para todo x e y, $x + y = y + x$ (la suma es conmutativa);
- para todo x, y y z, $x + (y + z) = (x + y) + z$ (la suma es asociativa);
- existe un elemento, al que vamos a llamar cero, 0, tal que, para todo x, $x + 0 = 0 + x = x$ (existencia de elemento neutro para la suma);
- para todo x, existe un elemento z tal que $x + z = z + x = 0$ (inverso para la suma);
- para todo x e y, $x \cdot y = y \cdot x$ (el producto es conmutativo);
- para todo x, y y z, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (el producto es asociativo);
- existe un elemento, al que vamos a llamar uno, 1, tal que, para todo x, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (existencia de elemento neutro para el producto);
- para todo x distinto de 0, existe un elemento x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ (inverso para el producto);
- para todo x, y y z, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (el producto es distributivo respecto a la suma).

Vamos a decir que un conjunto tiene una estructura de cuerpo si es cerrado por dos operaciones que verifican los axiomas que acabamos de ver. El conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, también es un cuerpo. Sin embargo, el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, no es un cuerpo

ya que no verifica el anteúltimo de los axiomas, es decir, no todos los elementos no nulos de $\mathbb{Z}$ tienen un inverso para el producto, más aún, los únicos enteros que tienen inverso son 1 y -1.
Una propiedad importante que tienen los cuerpos es que en ellos siempre se pueden resolver las ecuaciones del tipo $ax + b = c$, para cualquier $a \neq 0$ y cualquier valor de b y c.

Volver al texto principal

B. Fracciones y desarrollo decimal

Sabemos que los números racionales son los que pueden expresarse de dos maneras: como una fracción de números enteros o como un número decimal con desarrollo finito o periódico. Vamos a ver algunos ejemplos de cómo pasar de una forma a la otra.
Para encontrar el desarrollo decimal de una fracción, solo tenemos que dividir el numerador de la fracción por el denominador, es decir, hacer la división que expresa la fracción. Así, por ejemplo:

$$\frac{5}{2} = 5 : 2 = 2{,}5$$

$$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}\overline{3} = 0{,}333\ldots$$

Tengamos siempre presente que no hay una única fracción que representa a un número racional. Solo podemos decir que es única la fracción si le pedimos que el numerador y el denominador sean comprimos, es decir, que no tengan divisores comunes distintos de 1 y -1. De este modo, las fracciones $\frac{6}{24}; \frac{2}{8}; \frac{3}{12}$ y $\frac{1}{4}$ representan al mismo número racional.

Veamos cómo hacemos si tenemos la expresión decimal de un número racional a y queremos obtener una fracción $\frac{p}{q}$ que lo represente. En este caso, lo que en realidad estamos buscando es un número entero q tal que el producto $q \times a$ dé como resultado otro número entero.
En primer lugar, consideremos el caso en que el número racional a tiene desarrollo decimal finito. El número entero q que buscamos puede ser 10 elevado a la cantidad de dígitos que tiene a detrás de la coma y la fracción que buscamos será la que tiene en el numerador el número que se obtiene al suprimir la coma en a y en el denominador 10 elevado a la cantidad de dígitos que hay detrás de la coma.

Por ejemplo, si queremos encontrar una fracción que represente al número $a = 72,305$ vemos que detrás de la coma hay 3 dígitos y que si multiplicamos

$$10^3 \times 72,305 = 72305 \in \mathbb{Z}$$

por lo tanto,

$$72,305 = \frac{72305}{10^3} = \frac{72305}{1000} = \frac{14461}{200}$$

Un poco más de trabajo requiere encontrar una fracción que represente a un número a cuyo desarrollo decimal es infinito y periódico. Tengamos siempre presente que lo que buscamos es un número entero q tal que $q \times a$ sea entero. Como en este caso no tenemos finitos dígitos detrás de la coma, no alcanzará con multiplicar por una potencia de 10. Tratemos de seguir el proceso en un ejemplo y busquemos una fracción equivalente al número

$$a = 0,3\overline{81} = 0,381818181\ldots :$$

- Primero multipliquemos por una potencia de 10 que deje delante de la coma toda la parte no periódica del número a más una copia del período (detrás de la coma solo quedará la parte periódica). En nuestro caso será 10^3:

$$1000 \quad \times \quad 0,3\overline{81} \quad = \quad 381,\overline{81}$$

- Después multipliquemos por otra potencia de 10 que deje delante de la coma solo la parte no periódica de a (puede ser 10^0 si no hay parte no periódica). En nuestro caso:

$$10 \quad \times \quad 0,3\overline{81} \quad = \quad 3,\overline{81}$$

- En esta instancia, solo tenemos que restar. Como ambas expresiones tienen la misma parte decimal, al restar obtendremos un número entero. Lo único que nos queda es despejar para encontrar los números enteros q y p buscados:

$$\begin{array}{rcccc} & 1000 & \times \; 0,3\overline{81} & = & 381,\overline{81} \\ - & & & & \\ & 10 & \times \; 0,3\overline{81} & = & 3,\overline{81} \\ \hline & 990 & \times \; 0,3\overline{81} & = & 378 \end{array}$$

Así,

$$0,3\overline{81} \quad = \quad \frac{378}{990} \quad = \quad \frac{21}{55}$$

Volver al texto principal

C. Raíz de dos

Veamos una demostración de que $\sqrt{2}$ no es un número racional.
Supongamos que es falso lo que queremos probar, es decir,

supongamos que $\sqrt{2}$ **es** racional.

A partir de esta suposición vamos a deducir que vale un absurdo, un enunciado que sabemos que es falso y, por lo tanto, nuestra suposición será incorrecta.
Si $\sqrt{2}$ es racional, sabemos que tienen que existir dos números enteros p y q, sin divisores comunes salvo el 1 y el -1, y $q \neq 0$ tales que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Al pasar de miembro, nos queda

$$\sqrt{2}\,q = p \qquad \text{y elevando al cuadrado,} \qquad 2\,q^2 = p^2.$$

Esta expresión nos dice que p^2 es par, ya que resulta de multiplicar 2 por otro número. Y, por lo tanto, p es par, es decir $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.
Pero $p^2 = (2k)^2$ es un cuadrado perfecto, o sea es un número entero al cuadrado, luego si uno de sus factores es el 2, el 2 tiene que estar como mínimo al cuadrado, o sea dos veces.
Por lo tanto, como ya hay un 2 en la igualdad delante de q^2, el otro 2 tiene que estar en el q^2.
Eso quiere decir que q^2 también tiene que ser par y, por lo tanto q también es par.
Pero si p es par y q también, p y q tienen un divisor común, el 2, y habíamos supuesto que no.

Volver al texto principal

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Números reales, Teóricas de Análisis Matemático (28).*