

Optimización

1. Problemas de optimización



Ejemplo 1

Descomponer el número 36 en dos sumandos positivos de modo que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Si notamos con x a uno de los sumandos en los que se descompone 36, el otro debe ser $36-x$. Como ambos son positivos, se tiene que $x > 0$ y $36-x > 0$, o sea que $0 < x < 36$. Queremos hallar el valor de x en el que la función,

$$p(x) = (36-x) \cdot x^2 = 36x^2 - x^3$$

alcanza su valor máximo.

La función p es derivable en \mathbb{R} y por lo tanto, lo es en el intervalo $(0;36)$. Sabemos que los extremos locales de p se encuentran en los x donde $p'(x) = 0$.

Calculamos

$$p'(x) = (36x^2 - x^3)' = 72x - 3x^2 = 3x(24-x).$$

Como

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(24-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 24$$

y sólo estamos estudiando la función en el intervalo $(0;36)$, el único punto crítico es $x=24$.

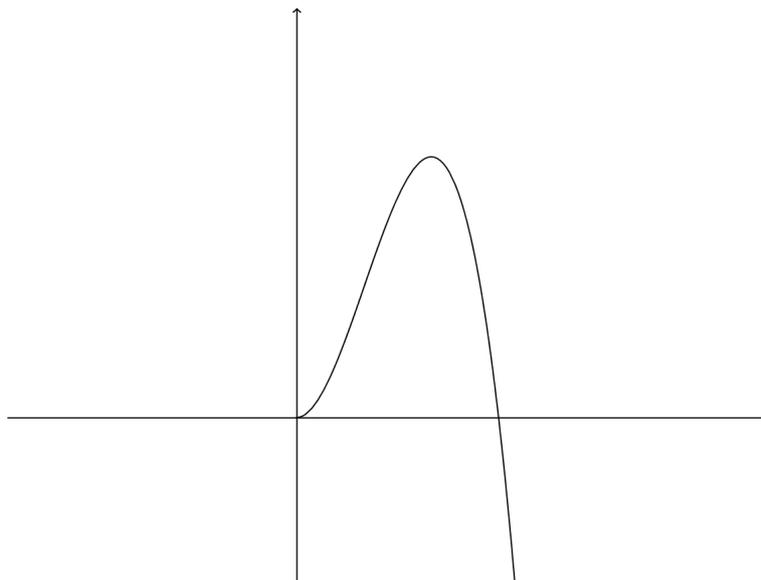
Dado que p' es continua y que tiene un único cero en el intervalo $(0;36)$, por el teorema de Bolzano podemos afirmar que, tanto en $(0;24)$ como en $(24;36)$, el signo de p' es constante.

Por lo dicho anteriormente para conocer el signo de p' , basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

En $(0;24)$, elegimos $x = 1$. Como $p'(1) = 3 \cdot 1 \cdot 23 > 0$, resulta que $p'(x) > 0$ para todo $x \in (0;24)$. Esto implica que p es estrictamente creciente en $(0;24]$.

En $(24;36)$, elegimos $x = 25$. Como $p'(25) = 3 \cdot 25 \cdot (-1) < 0$, resulta que $p'(x) < 0$ para todo $x \in (24;36)$. Esto implica que p es estrictamente decreciente en $[24;36)$.

A partir de esta información acerca del crecimiento y del decrecimiento de p , podemos afirmar que en $x = 24$, p alcanza un máximo local y dicho máximo vale $p(24) = 12 \cdot 24^2 = 6912$. Damos a continuación un gráfico aproximado de la función p .



Los dos sumandos en los que hay que dividir 36 son 24 y 12.



Ejemplo 2

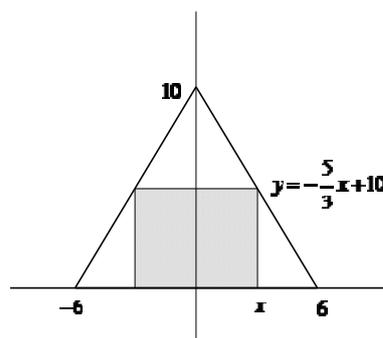
En el triángulo isósceles de base 12 y altura 10, se inscribe un rectángulo tal que dos de sus vértices pertenecen a la base del triángulo y los otros dos pertenecen uno a cada uno de los otros dos lados. Calcular las dimensiones que debe tener el rectángulo para que su área sea máxima.

Graficamos el triángulo con sus vértices en los puntos $(0,10)$, $(-6,0)$ y $(6,0)$.

La ecuación de la recta por $(0,10)$, y $(6,0)$ es $y = -\frac{5}{3}x + 10$.

Por la simetría de la figura, para calcular el área del rectángulo inscrito en el triángulo, alcanza con considerar los valores de $x \in (0;6)$. Así, el área del rectángulo es

$$a(x) = \text{base} \times \text{altura} = 2x \cdot \left(-\frac{5}{3}x + 10\right) = -\frac{10}{3}x^2 + 20x.$$



Para que exista un rectángulo en las condiciones del problema, debe ocurrir que $0 < x < 6$. Queremos hallar el valor de x , en el que la función

$$a(x) = -\frac{10}{3}x^2 + 20x,$$

alcanza su valor máximo.

La función a es derivable en \mathbb{R} y por lo tanto, lo es en el intervalo $(0;6)$. Sabemos que los extremos locales de a se encuentran en los x donde $a'(x) = 0$.

Calculamos

$$a'(x) = -\frac{20}{3}x + 20 = 20\left(-\frac{x}{3} + 1\right).$$

Entonces

$$a'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Dado que a' es continua en $(0;6)$ y que en dicho intervalo tiene un único cero, utilizamos el teorema de Bolzano y podemos afirmar que $(0;6)$ queda dividido en dos intervalos con signo constante en cada uno de ellos.

Los intervalos para analizar son $(0;3)$ y $(3;6)$ y, por lo dicho anteriormente, para conocer el signo de a' , basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

En $(0;3)$, elegimos $x = 1$. Como $a'(1) = 20\left(-\frac{1}{3} + 1\right) > 0$, resulta que $a'(x) > 0$ para todo $x \in (0;3)$.

Esto implica que a es estrictamente creciente en $(0;3]$.

En $(3;6)$, elegimos $x = 4$. Como $a'(4) = 20\left(-\frac{4}{3} + 1\right) < 0$, resulta que $a'(x) < 0$ para todo $x \in (3;6)$.

Esto implica que a es estrictamente decreciente en $[3;6)$. Así, en $x = 3$, la función alcanza un máximo local. Las dimensiones del rectángulo de área máxima corresponden $x = 3$ y tenemos que el

rectángulo tiene $\boxed{\text{base} = 2 \cdot x = 6}$ y $\boxed{\text{altura} = -\frac{5}{3} \cdot x + 10 = -\frac{5}{3} \cdot 3 + 10 = 5}$.

En este caso, la función $a(x)$ es una cuadrática con coeficiente principal negativo, por lo tanto alcanza su máximo en el vértice.



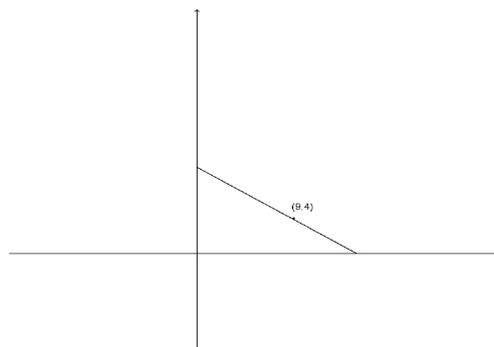
Ejemplo 3

Se consideran las rectas que pasan por el punto $(9,4)$ y que al cortar a los semiejes positivos determinan triángulos rectángulos.

Entre todas estas rectas, hallar aquella que

- (a) genera un triángulo de área mínima;
- (b) hace mínima la suma de las longitudes de los catetos.

Sea m la pendiente de una recta que pasa por $(9,4)$. Observemos que para que la recta corte a los semiejes positivos debe ser $m < 0$. Las rectas que estamos considerando pasan por el punto $(9,4)$, luego son de la forma $y = m(x-9) + 4$, con $m < 0$.



Estas rectas cortan al eje x , cuando $y = 0$, luego, $x = -\frac{4}{m} + 9 = \frac{9m-4}{m}$ y cortan al eje y cuando $x = 0$, o sea $y = 4 - 9m$.

(a) El área del triángulo en función de la pendiente de la recta (m) es

$$A(m) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9m-4}{m} \cdot (4-9m) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{(9m-4)^2}{m}.$$

Calculamos la derivada de la función área respecto de la variable m .

$$\begin{aligned} A'(m) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2(9m-4) \cdot 9 \cdot m - (9m-4)^2}{m^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{(9m-4)(18m-9m+4)}{m^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{(9m-4)(9m+4)}{m^2} \right). \end{aligned}$$

Dado que $m \in (-\infty; 0)$, el único valor en el que se anula la derivada es $m = -\frac{4}{9}$.

Como A' es continua, utilizando el teorema de Bolzano podemos afirmar que su único cero divide a $(-\infty; 0)$ en dos intervalos en los que el signo de A' es constante.

Los intervalos para analizar son $\left(-\infty; -\frac{4}{9}\right)$ y $\left(-\frac{4}{9}; 0\right)$, por lo dicho anteriormente para conocer el signo de A' , basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

En $\left(-\infty; -\frac{4}{9}\right)$, elegimos $m = -1$. Como $A'(-1) = -\frac{1}{2} \frac{(9(-1)-4)(9(-1)+4)}{(-1)^2} < 0$, resulta que

$A'(m) < 0$ para todo $m \in \left(-\infty; -\frac{4}{9}\right)$. Esto implica que a es estrictamente decreciente en $\left(-\infty; -\frac{4}{9}\right]$.

En $\left(-\frac{4}{9}; 0\right)$ elegimos $m = -\frac{1}{9}$.

$$\text{Como } A'\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\left(9\left(-\frac{1}{9}\right) - 4\right)\left(9\left(-\frac{1}{9}\right) + 4\right)}{\left(-\frac{1}{9}\right)^2} = -\frac{1}{2} \frac{(-1-4)(-1+4)}{\left(-\frac{1}{9}\right)^2} > 0$$

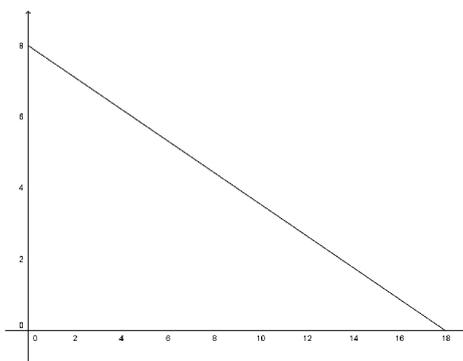
resulta que $A'(m) > 0$ para todo $m \in \left(-\frac{4}{9}; 0\right)$. Esto implica que A es estrictamente creciente en $\left[-\frac{4}{9}; 0\right)$.

De esto se deduce que la función área tiene un mínimo local en $m = -\frac{4}{9}$.

Dado que la función área es continua en $(-\infty; 0)$, es estrictamente decreciente a la izquierda de $m = -\frac{4}{9}$ y estrictamente creciente a la derecha de $x = -\frac{4}{9}$, concluimos que A tiene un mínimo

absoluto en $m = -\frac{4}{9}$ y vale $A\left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{-\left(9\left(-\frac{4}{9}\right) - 4\right)^2}{2\left(-\frac{4}{9}\right)} = 72$.

Es decir que la pendiente de la recta que pasa por $(9,4)$ y hace mínima el área del triángulo es $m = -\frac{4}{9}$, la ecuación de dicha recta es $y = -\frac{4}{9}x + 8$.



(b) Se quiere ahora minimizar la suma de las longitudes de los catetos de los triángulos formados por las rectas que pasan por el punto $(9,4)$ y los semiejes positivos. Utilizando los cálculos anteriores, y llamando L a la suma de las longitudes de los catetos en función de la pendiente de la recta, tenemos que

$$L(m) = \left(-\frac{4}{m} + 9\right) + (4 - 9m) = 13 - \frac{4}{m} - 9m, \text{ donde } m \in (-\infty; 0).$$

Calculamos la derivada de L respecto de m

$$L'(m) = \frac{4}{m^2} - 9 = \frac{4 - 9m^2}{m^2},$$

y buscamos los valores que anulan la derivada

$$L'(m) = 0 \Leftrightarrow 4 - 9m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3} \text{ o } m = -\frac{2}{3}.$$

Como $m \in (-\infty; 0)$, el único punto crítico es $m = -\frac{2}{3}$.

Utilizando el teorema de Bolzano, analizamos el signo de L' en los intervalos $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ y en

$\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ evaluando en un punto en cada caso.

En $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$, elegimos $m = -1$. Como $L'(-1) = \frac{4 - 9 \cdot 1^2}{1^2} = -5 < 0$, resulta que $L'(m) < 0$ para todo

$m \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$. Esto implica que L es estrictamente decreciente en $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$.

En $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ elegimos $m = -\frac{1}{3}$. Como $L'\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4 - 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = 27 > 0$, tenemos que $L'(m) > 0$

para todo $m \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. Así, resulta que L es estrictamente creciente en $\left[-\frac{2}{3}; 0\right)$.

De esto se deduce que la función L tiene un mínimo local en $m = -\frac{2}{3}$.

Dado que es continua en $(-\infty; 0)$, L resulta estrictamente decreciente a la izquierda de $m = -\frac{2}{3}$ y

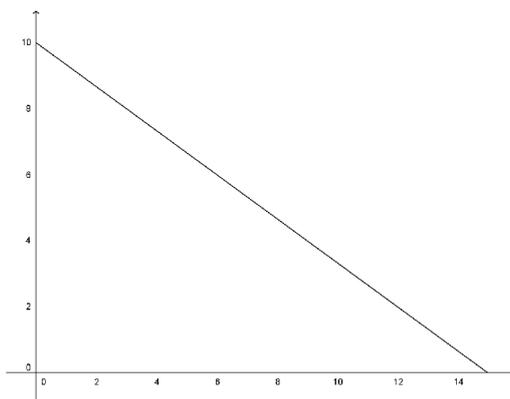
estrictamente creciente a la derecha de $m = -\frac{2}{3}$, por lo cual concluimos que tiene un mínimo

absoluto en $m = -\frac{2}{3}$ y vale $L\left(-\frac{2}{3}\right) = 13 - \frac{4}{\left(-\frac{2}{3}\right)} - 9\left(-\frac{2}{3}\right) = 25$ y corresponde al triángulo que

corta el eje x en $x = 15$ y al eje y en $y = 10$.

Es decir que, la pendiente de la recta que hace mínima la suma de las longitudes de los catetos es

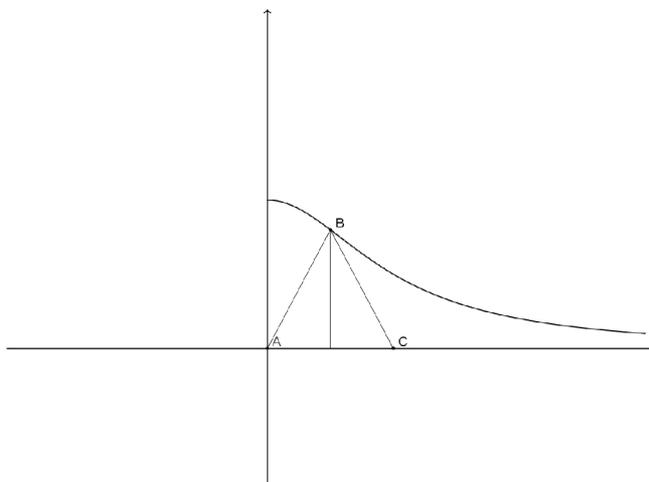
$m = -\frac{2}{3}$, la ecuación de dicha recta es $y = -\frac{2}{3}x + 10$.



Ejemplo 4

Sea $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$. Se consideran los triángulos de vértices $A = (0, 0)$, $B = (x, f(x))$ y $C = (2x, 0)$. Hallar las dimensiones del triángulo de mayor área.

Hacemos un gráfico aproximado de f y de un triángulo.



Sea $a(x)$ el área del triángulo ABC . Es decir

$$a(x) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{2x \cdot f(x)}{2} = x \cdot \frac{1}{x^2 + 4} = \frac{x}{x^2 + 4}.$$

Calculamos la derivada de la función área

$$a'(x) = \frac{(x^2 + 4) - x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{(2 - x)(2 + x)}{(x^2 + 4)^2}.$$

Entonces

$$a'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ o } x = -2.$$

Dado que $x \in [0; +\infty)$, el único valor en el que se anula la derivada es $x = 2$.

Como a' es continua en $(0; +\infty)$, utilizando el teorema de Bolzano, podemos afirmar que su único cero divide a $(0; +\infty)$ en dos intervalos en los que el signo de a' es constante.

Los intervalos para analizar son $(0; 2)$ y $(2; +\infty)$, por lo dicho anteriormente, para conocer el signo de a' , basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

En $(0; 2)$, elegimos $x = 1$. Como $a'(1) = \frac{(2-1)(2+1)}{(1^2+4)^2} > 0$, resulta que $a'(x) > 0$ para todo $x \in (0; 2)$.

Esto implica que a es estrictamente creciente en $(0; 2]$. En $(2; +\infty)$ elegimos $x = 3$. Como $a'(3) = \frac{(2-3)(2+3)}{(3^2+4)^2} < 0$, resulta que $a'(x) < 0$ para todo $x \in (2; +\infty)$. Esto implica que a es estrictamente decreciente en $[2; +\infty)$.

De esto se deduce que la función área tiene un máximo local en $x = 2$.

Dado que a es continua en $[0; +\infty)$, es estrictamente creciente a la izquierda de $x = 2$ y estrictamente decreciente a la derecha de $x = 2$, concluimos que a tiene un máximo absoluto en $x = 2$ y vale $a(2) = \frac{2}{2^2+2} = \frac{1}{4}$.

$$x = 2 \text{ y vale } a(2) = \frac{2}{2^2+2} = \frac{1}{4}.$$

Los vértices del triángulo de mayor área son $A = (0, 0)$, $B = (2, \frac{1}{8})$ y $C = (4, 0)$.



Ejemplo 5

Sea $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 8x^2 - \frac{1}{x}$. Hallar el punto del gráfico de f en el que la pendiente de la recta tangente es mínima.

Llamemos $m(x)$ a la función que a cada punto del gráfico de f le asigna la pendiente de su recta tangente. Sabemos que esta función es $f'(x)$. Es decir que

$$m(x) = f'(x) = 16x + \frac{1}{x^2}.$$

Queremos hallar el valor de $x \in (0; +\infty)$ en el que la función m alcanza su mínimo absoluto.

Para hallar los puntos críticos, calculamos la derivada.

$$m'(x) = 16 - \frac{2}{x^3} = \frac{16x^3 - 2}{x^3} = \frac{2(8x^3 - 1)}{x^3}$$

Como

$$m'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

El único punto crítico es $x = \frac{1}{2}$.

Dado que m' es continua en $(0; +\infty)$, por el teorema de Bolzano, podemos afirmar que su único cero divide a $(0; +\infty)$ en dos intervalos y en cada uno de ellos el signo de m' es constante.

Los intervalos para analizar son $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, por lo dicho anteriormente, para conocer el signo de m' , basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

En $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, elegimos $x = \frac{1}{4}$. Como $m'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2\left(\frac{8}{4^3} - 1\right)}{\frac{1}{4^3}} = \frac{2\left(\frac{1}{8} - 1\right)}{\frac{1}{4^3}} < 0$, resulta que $m'(x) < 0$ para

todo $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Esto implica que m es estrictamente decreciente en $\left(0; \frac{1}{2}\right]$. En $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ elegimos $x = 1$. Como $m'(1) = \frac{2(8-1)}{1^3} > 0$, resulta que $m'(x) > 0$ para todo $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Esto implica que m

es estrictamente creciente en $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

En resumen tenemos

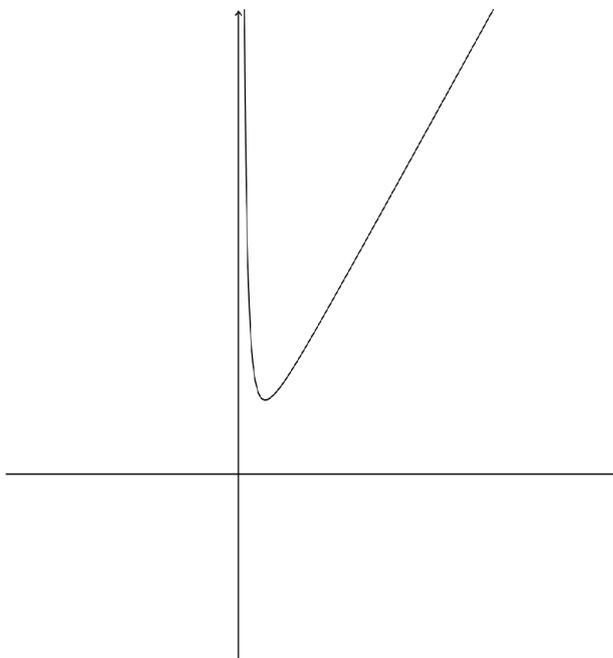
x	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$
	$m'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$		$m'(1) > 0$
$m'(x)$	-	0	+
$m(x)$	\searrow	min	\nearrow

Por lo tanto m alcanza un mínimo local en $x = \frac{1}{2}$.

Además, $\lim_{x \rightarrow 0^+} m(x) = 16x + \frac{1}{x^2} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = 16x + \frac{1}{x^2} = +\infty$, de donde el mínimo local es absoluto y podemos afirmar que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f es mínima para

$$x = \frac{1}{2} \text{ y vale } m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{2} + 4 = 12.$$

A continuación damos un gráfico aproximado de m para $x \in (0; +\infty)$.



Ejemplo 6

Sea $f(x) = x - 3x^{\frac{1}{3}}$. Hallar los valores máximos y mínimos que alcanza la función f en el intervalo $[-2; \frac{1}{2}]$.

Por ser la función f continua en el intervalo cerrado $[-2; \frac{1}{2}]$, sabemos que alcanza, en dicho intervalo, un valor máximo y un valor mínimo.

Calculamos la derivada

$$f'(x) = 1 - x^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \text{ para } x \neq 0$$

y observamos que f no es derivable en $x = 0$.

Por otra parte,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x = -1.$$

Así, los posibles valores de $x \in [-2; \frac{1}{2}]$ en los que f puede alcanzar un máximo o un mínimo son

los extremos del intervalo: $x = -2$ y $x = \frac{1}{2}$,

los $x \in [-2; \frac{1}{2}]$ tales que $f'(x) = 0$: $x = -1$,

y los $x \in [-2; \frac{1}{2}]$ donde f no es derivable: $x = 0$.

Calculamos el valor de f en cada uno de estos puntos

$$f(-2) = -2 - 3(-2)^{\frac{1}{3}} \approx 1,779$$

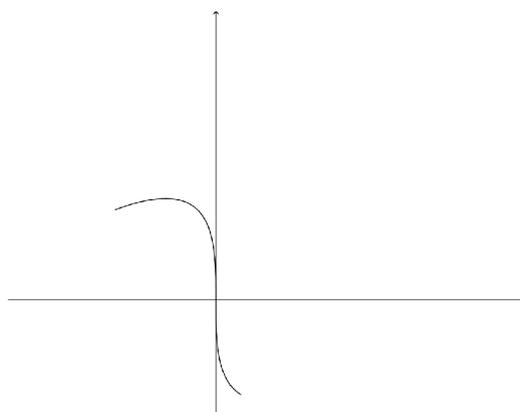
$$f(-1) = -1 - 3 \cdot (-1)^{\frac{1}{3}} = -1 + 3 = 2$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx -1,881.$$

Al comparar estos valores, podemos afirmar que $f(-1) = 2$, es el valor máximo de f y $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1,881$ es el valor mínimo. Los puntos donde se alcanzan son $x = -1$ (donde se anula la derivada) y $x = \frac{1}{2}$ (un extremo del intervalo).

Presentamos un gráfico aproximado de esta función.





Ejemplo 7

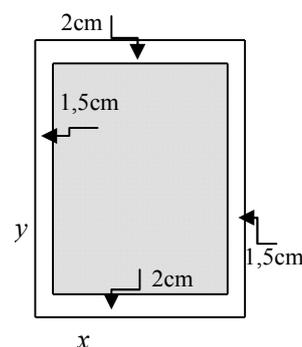
Una editorial producirá un libro con las siguientes condiciones: en cada página el texto impreso estará contenido en un rectángulo de 300 cm^2 , los márgenes superior e inferior deberán tener 2 cm de altura y los laterales 1,5 cm de ancho. Hallar las dimensiones de una página para que el consumo de papel sea mínimo.

Sean x e y las dimensiones de una hoja del libro. Se quiere que la superficie de cada hoja sea la menor posible, es decir, que $S = x \cdot y$ sea mínima.

Además, el área de la región impresa debe medir 300 cm^2 . Pero la región impresa es un rectángulo de base $(x - 2 \cdot 1,5) = (x - 3)$ y altura $(y - 2 - 2) = (y - 4)$, entonces debe ser $(x - 3)(y - 4) = 300$. Para que esto tenga sentido debe ser $x > 3$ e $y > 4$.

Al despejar y de esta igualdad obtenemos que

$$y = \frac{300}{x-3} + 4 = \frac{4x+288}{x-3}.$$



Tenemos entonces que la función que queremos minimizar es

$$S = x \cdot y = x \cdot \frac{4x+288}{x-3} = \frac{4x^2 + 288x}{x-3} \quad \text{para } x > 3.$$

Calculamos su derivada

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{(8x+288)(x-3) - (4x^2+288x)}{(x-3)^2} = \frac{8x^2+288x-24x-864-4x^2-288x}{(x-3)^2} = \\ &= \frac{4x^2-24x-864}{(x-3)^2} = \frac{4(x^2-6x-216)}{(x-3)^2} = \frac{4(x-18)(x+12)}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-18)(x+12) = 0 \Leftrightarrow x = 18 \text{ o } x = -12.$$

Por las condiciones del problema sabemos que $x > 3$, por lo tanto el único punto crítico es $x = 18$.

Como S' es continua en $(3; +\infty)$, utilizando el teorema de Bolzano, podemos afirmar que su único cero divide a $(3; +\infty)$ en dos intervalos en los que el signo de S' es constante.

Los intervalos para analizar son $(3; 18)$ y $(18; +\infty)$, por lo dicho anteriormente, para conocer el signo de S' , basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

Teóricas de Análisis Matemático (28) – Práctica 7 – Optimización

En el intervalo $(3;18)$, elegimos $x = 4$.

Como $S'(4) = \frac{4(4-18)(4+12)}{(4-3)^2} < 0$, resulta que $S'(x) < 0$ para todo $x \in (3;18)$. Esto implica que S es estrictamente decreciente en $(3;18)$.

En $(18;+\infty)$ elegimos $x = 19$. Como $S'(19) = \frac{4(19-18)(19+12)}{(19-3)^2} > 0$, resulta que $S'(x) > 0$ para todo $x \in (18;+\infty)$. Esto implica que m es estrictamente creciente en $(18;+\infty)$.

De esto se deduce que la función S tiene un mínimo local en $x = 18$.

Dado que S es continua en $(3;+\infty)$, es estrictamente decreciente a la izquierda de $x = 18$ y estrictamente creciente a la derecha de $x = 18$, por lo que concluimos que S tiene un mínimo absoluto en $x = 18$.

Las dimensiones de la página para la que el consumo de papel es mínimo son: $x = 18$ y

$$y = \frac{300}{18-3} + 4 = 24.$$

