Práctica 3

Sucesiones

1. Introducción

En la unidad anterior, hemos introducido el lenguaje con el que nos manejaremos en este curso. Estudiaremos fenómenos que se pueden representar por medio de funciones numéricas y usaremos los números reales para medir e introducir los conceptos en los que se basa el cálculo diferencial e integral, y que nos permitirá abordar los dos problemas del cálculo.

Las sucesiones son una clase especial de funciones con las que podremos preparar el camino para formular y entender el concepto de límite, objetivo central de esta unidad.

Las sucesiones son objetos matemáticos muy sencillos que se apoyan en la ordenación de un conjunto (finito o infinito) de números reales. Por ejemplo, Galileo observó y anotó cuidadosamente el espacio que en cada segundo, recorría una bolita al caer por un plano inclinado. Observando la sucesión de números que obtuvo concluyó que el espacio recorrido en t segundos era proporcional al cuadrado del tiempo (at^2) donde la constante a dependía de la inclinación del plano.

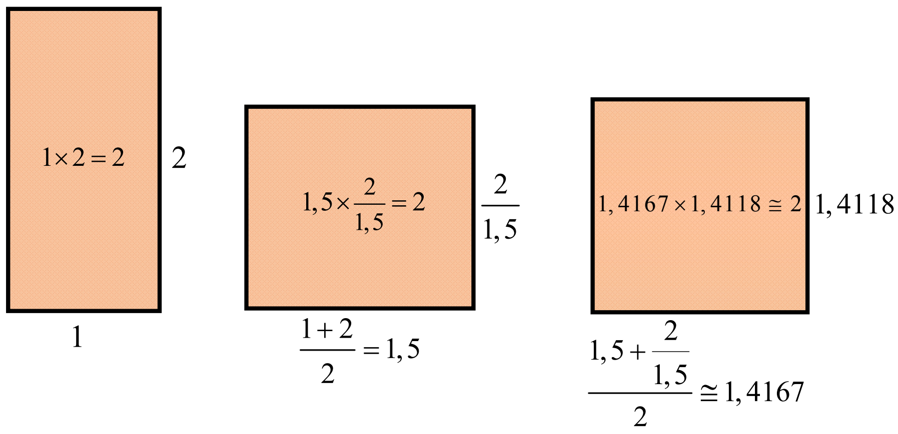
Las sucesiones sirven, por ejemplo, para estudiar, representar y predecir los fenómenos que ocurren o se miden en el tiempo, en forma intermitente. El lenguaje de las funciones y de los números reales serán vitales para su comprensión y para la obtención de propiedades que nos permitirán el desarrollo de los conceptos centrales del curso.

1.1. Un problema a modo de presentación. La raíz cuadrada de 2

El problema consiste en encontrar un algoritmo (una receta) que calcule la raíz cuadrada de un número dado (por ejemplo $\sqrt{2}$), utilizando sólo las cuatro operaciones básicas.

Una solución al problema se basa en una idea geométrica:

Se construyen sucesivos rectángulos todos de área 2. La base de cada uno de ellos es el promedio de la base y la altura del anterior.



Designamos con x_1 a la medida de la base del primer rectángulo, que elegimos que fuera igual a 1, con x_2 a lo que mide la base del segundo rectángulo, con x_3 a la del tercero y así sucesivamente.

Entonces resulta:

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{x_1 + \frac{2}{x_1}}{2} = 1,5,\ x_3 = \frac{x_2 + \frac{2}{x_2}}{2} = 1,4167, \ldots,\ x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$$

Geométricamente se observa que los rectángulos se van aproximando a un cuadrado de área 2, por lo cual las bases x_n se van aproximando al lado del cuadrado de área 2, es decir $x_n \to \sqrt{2}$. (x_n se aproxima a $\sqrt{2}$).

Parte del objetivo de esta unidad, será darle sentido preciso a esta idea de que una lista de números (los x_n en este caso) se aproximen a un límite ($\sqrt{2}$ en el ejemplo que estamos tratando).

1.2. Ejemplos de sucesiones

Consideramos los siguientes ejemplos:

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
2. $1, 3, 5, 7, \ldots$
3. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$
4. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
5. $0, 1, 0, 1, \ldots$
6. $2, -4, 6, -8, \ldots$

Informalmente, una *sucesión* es una *lista ordenada* e infinita de números reales.

Nos interesará el "comportamiento a la larga" de cada lista de números. En otras palabras, nos interesará saber si, a medida que avanzamos en la lista de números, éstos se parecen o aproximan a un número determinado. Habrá que dar más precisión a esta idea.

Observemos por el momento, que una lista ordenada de números se puede describir con el lenguaje de las funciones que vimos en el primer módulo, usando como conjunto "ordenador" a los números naturales.

Definición: Una *sucesión* es una función $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, se escribe $a(n)=a_n$.

Se lee *"a sub n"*. Indica el número real de la lista en la posición *n*.

Observemos la lista de sucesiones con las que comenzamos esta sección:

En la sucesión **1.** $a_3=\dfrac{1}{3}$ y $a_{100}=\dfrac{1}{100}$, en la sucesión **4.** $a_4=\dfrac{4}{5}$ y $a_{1000}=\dfrac{1000}{1001}$.

Lo que interesará es el comportamiento de a_n para "valores grandes" de *n*.

Ejercicio. Dada la sucesión $a_n=\dfrac{3^{n-3}}{n^2}$. Encontrar los primeros cinco términos de la sucesión y dar el valor de a_{10}.

Solución

El primer término se obtiene reemplazando en la fórmula de a_n, la variable n por el valor $n=1$

$$\boxed{a_1=\frac{3^{1-3}}{1^2}=3^{-2}=\frac{1}{9}}$$

Los siguientes términos se obtienen reemplazando la variable n por los valores 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

$$\boxed{a_2=\frac{3^{2-3}}{2^2}=\frac{3^{-1}}{4}=\frac{1}{12}}$$

$$\boxed{a_3=\frac{3^{3-3}}{3^2}=\frac{3^0}{9}=\frac{1}{9}}$$

$$\boxed{a_4 = \frac{3^{4-3}}{4^2} = \frac{3}{16}}$$

$$\boxed{a_5 = \frac{3^{5-3}}{5^2} = \frac{3^2}{25} = \frac{9}{25}}$$

De la misma forma, se obtiene el décimo término de la sucesión evaluando en su fórmula con el valor $n = 10$

$$\boxed{a_{10} = \frac{3^{10-3}}{10^2} = \frac{3^7}{100} = 21,87}$$

1.3. Término general

Es la expresión de a_n para cada n. Analizamos cada una de las sucesiones de **1.2**

1.	$a_n = \frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
2.	$a_n = 2n - 1$	$1, 3, 5, 7, \ldots$
3.	$a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$
4.	$a_n = \frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
5.	$a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es impar} \\ 1 \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$	$0, 1, 0, 1, \ldots$
6.	$a_n = (-1)^{n+1} 2n$	$2, -4, 6, -8, \ldots$

Ejercicio. Tenemos la sucesión a_n cuyos primeros términos son

$1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4 \ldots$

a) Encontrar el término 10 y el término 11.

b) Encontrar el término general. ¿Cuáles son los valores de a_{100} y de a_{101}?

Solución

a) Como tenemos ocho términos de la sucesión, basta agregar tres términos, para llegar al término 10 y 11. Tenemos en cuenta el comportamiento que se infiere de los primeros términos y destacamos en color los términos pedidos:

$$1,1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\frac{1}{4},4,\frac{1}{5},5,\frac{1}{6}...$$

b) Se observa que la sucesión sigue un "patrón" para las posiciones impares diferente al "patrón" que sigue para las posiciones pares. Veamos esto.

Destacamos las posiciones impares: $1,1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\frac{1}{4},4...$

Destacamos las posiciones pares: $1,1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\frac{1}{4},4...$

En el caso de las posiciones impares se tiene:

$$a_1 = 1,\ a_3 = a_{2+1} = \frac{1}{2},\ a_5 = a_{2*2+1} = \frac{1}{3},\ a_7 = a_{2*3+1} = \frac{1}{4}$$

En general: $a_{2n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

En el caso de las posiciones pares se tiene:

$$a_2 = 1,\ a_4 = a_{2*2} = 2,\ a_6 = a_{2*3} = 3,\ a_8 = a_{2*4} = 4$$

En general: $a_{2n} = n$

En síntesis, el término general de la sucesión se puede presentar como

$$\boxed{a_k = \begin{cases} k/2 & \text{si} \quad k = 2n \\ \dfrac{2}{k+1} & \text{si} \quad k = 2n+1 \end{cases}}$$

Cambiamos el nombre de la variable para distinguir los dos casos

Para calcular a_{100} reemplazamos en el término general teniendo en cuenta que $100 = 2 \cdot 50$.

$$\boxed{a_{100} = 50}$$

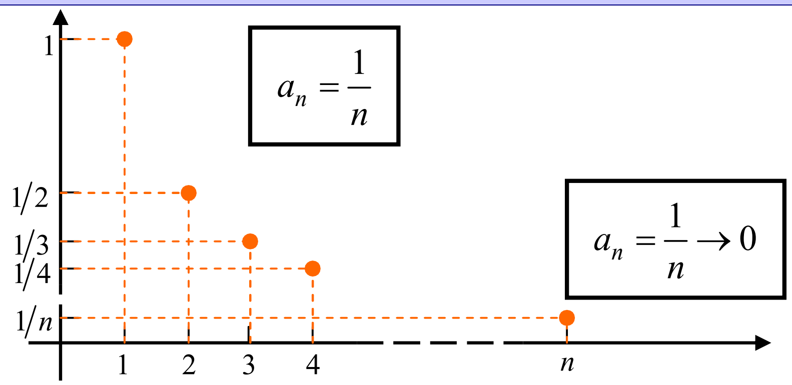
Lo mismo hacemos para calcular a_{101} teniendo en cuenta ahora que $101 = 2 \cdot 50 + 1$.

$$\boxed{a_{101} = \frac{1}{51}}$$

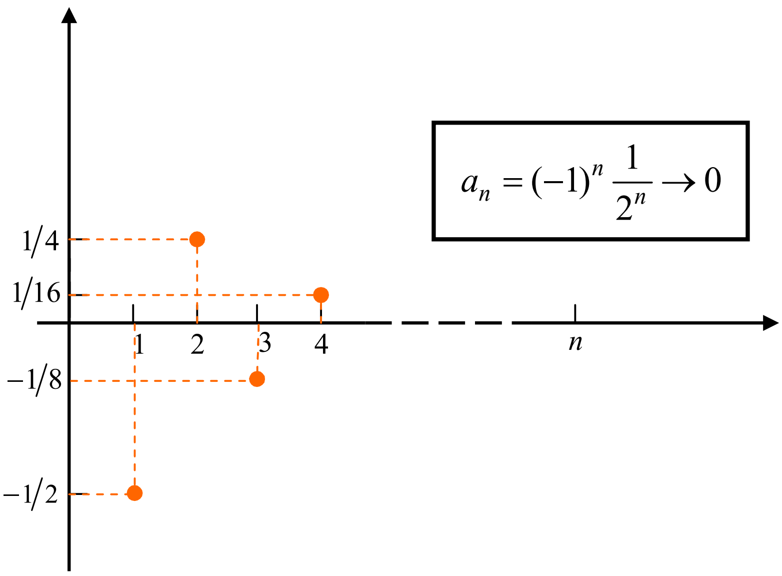
1.4. Representación gráfica

Como una sucesión es una función admite una representación gráfica. Veamos alguno de los ejemplos de sucesiones de **1.2**:

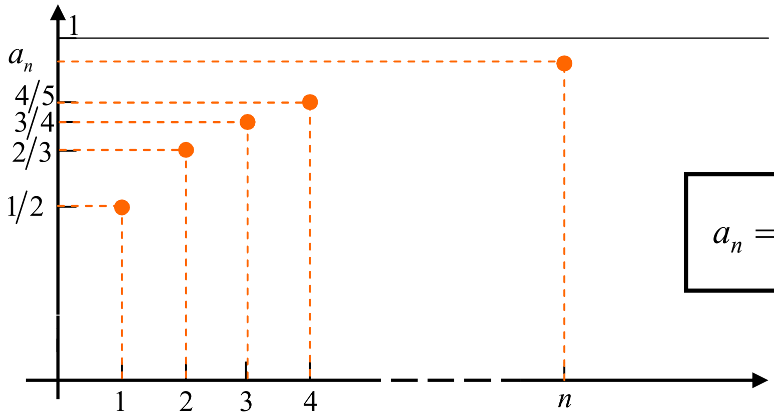
Sucesión 1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$



Sucesión 3. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$



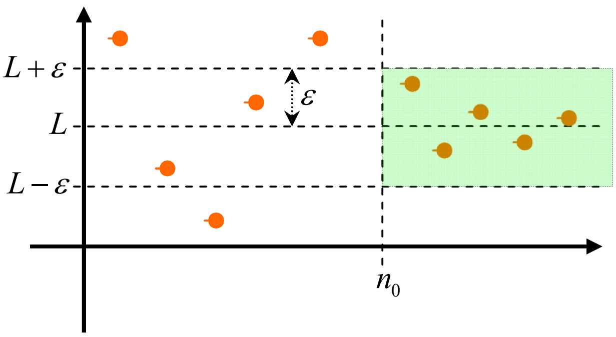
Sucesión 4. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$



$$a_n = \frac{n}{n+1} \to 1$$

2. Noción de límite

Intuitivamente, una sucesión *tiende* a un valor determinado L si los valores de a_n *están cerca* de L cuando n es grande. Un poco más precisamente: el error que se comete al aproximar L con a_n es pequeño (menor que épsilon (ε)) si n es bastante grande (más que n_0 en el gráfico)



Idea geométrica

A partir de n_0 la franja verde capta a todos los a_n

La definición precisa de límite es la siguiente:

Se dice que a_n tiene *límite* L si, cualquiera sea $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \text{ (o sea } |a_n - L| < \varepsilon \text{ si } n \geq n_0)$$

Se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ o $a_n \to L$, se lee *"el límite de a sub n cuando n tiende a infinito es L"*.

También se dice en tal caso que $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ *para casi todo n (pctn)*. En general, una propiedad vale *para casi todo n* si vale para todo *n* salvo un número finito de valores de *n*. Se pone *pctn*.

Un análisis más detallado de la definición de límite se puede encontrar en la entrada Noción de límite.

2.1. Sucesiones divergentes

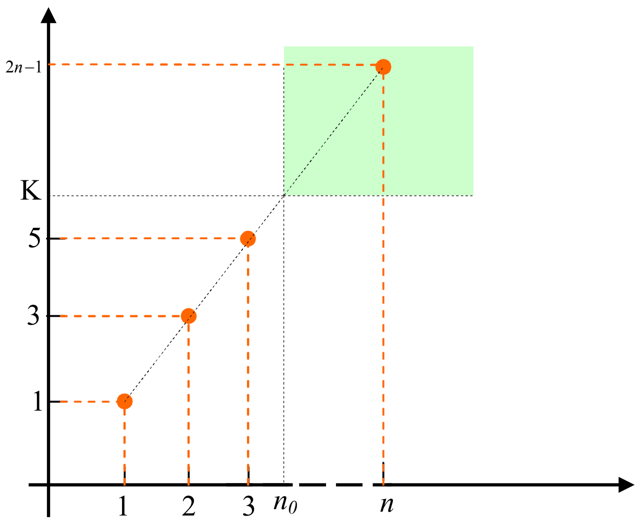
No todas las sucesiones convergen a un límite $L \in \mathbb{R}$.

La sucesión **2** de los ejemplos **1.2,** *diverge a más infinito* (o tiende a más infinito), la sucesión **5**, *oscila finitamente* y la sucesión **6**. *oscila infinitamente.*

Ejemplos de sucesiones **que no convergen**

- $a_n = 2n-1$ tiende a más infinito.
- $b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es impar} \\ 1 \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$ oscila finitamente.
- $c_n = (-1)^{n+1} 2n$ oscila infinitamente.

- $a_n = 2n-1$ 1, 3, 5, 7, ...



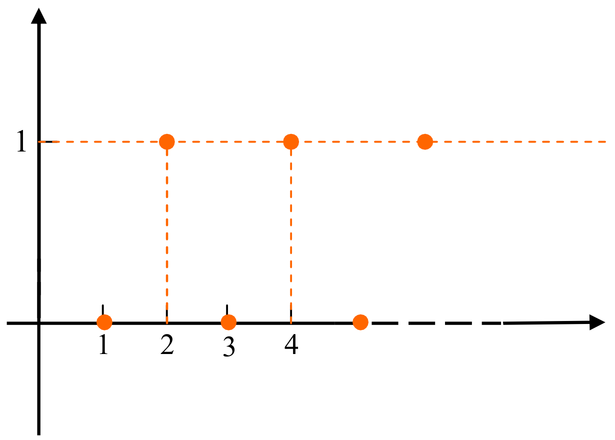
$$\lim_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty$$

Para todo $K>0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$,

$2n-1 > K$

(en el sector verde)

- $b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es impar} \\ 1 \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$ $\qquad 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ ...$

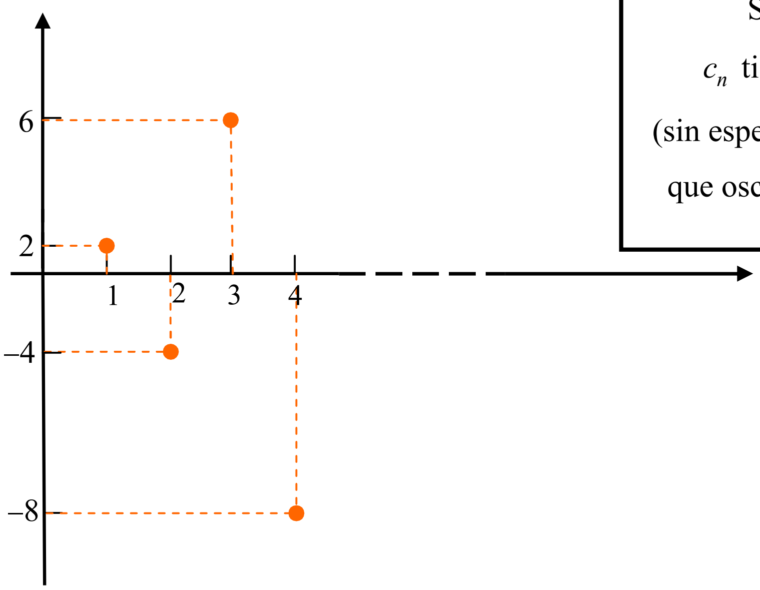


$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ no existe

En este caso se dice que

a_n oscila finitamente

- $c_n = (-1)^{n+1} 2n$ $\qquad 2,\ -4,\ 6,\ -8,\ ...$



Se dice que

c_n tiende a infinito

(sin especificar el signo) o

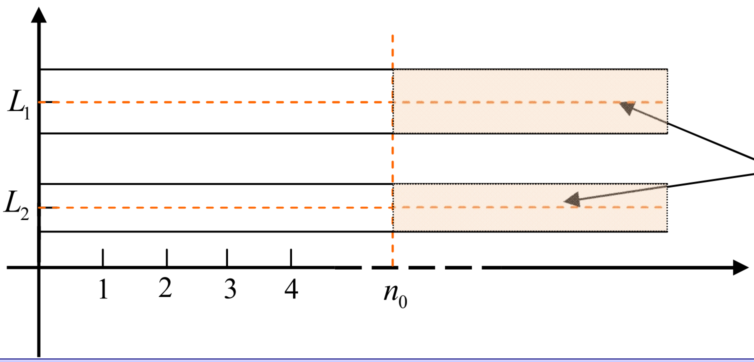
que oscila infinitamente

3. Propiedades del límite

La mayoría de las veces, el problema consistirá en calcular el valor de $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. La definición no será útil para ello porque presupone conocer el valor de L, de modo que nos valdremos de propiedades y diversos recursos algebraicos para poder determinar el valor del límite en los ejemplos que estudiemos. La definición de límite es imprescindible para poder obtener esas propiedades y para introducir casi todos los conceptos de la materia que se basan en esta noción. En la práctica no haremos un uso directo de dicha definición.

Las siguientes propiedades se deducen de la definición de límite y nos servirán para desarrollar técnicas que nos permitan calcular algunos límites.

3.1. Unicidad del límite

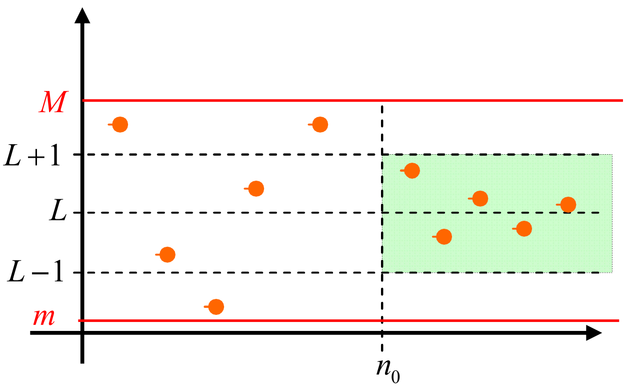


Si así fuera todos los a_n a partir de $n = n_0$ tendrían que estar simultáneamente en las dos franjas y eso no es posible.

Una sucesión no puede converger a dos límites distintos

3.2. Acotación de las sucesiones convergentes

Si a_n es convergente, entonces el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado

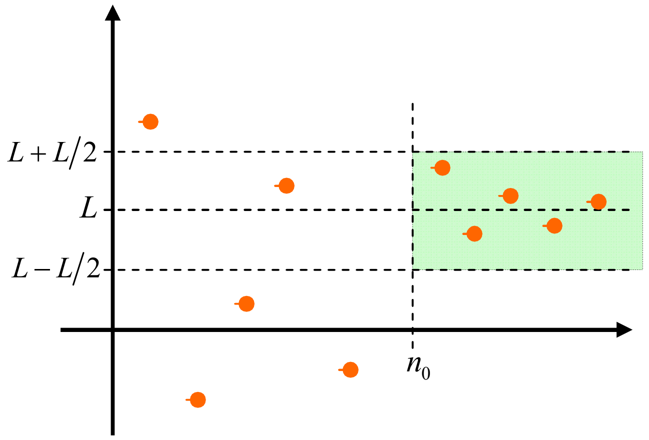


Se elige $\varepsilon = 1$ o cualquier otro. Una vez que a_n queda dentro de la franja verde para $n \geq n_0$, es fácil encontrar cotas superiores e inferiores de A. M es cota superior y m es cota inferior de A.

3.3. Conservación de signo

Si a_n converge a un límite L mayor que cero, entonces la sucesión a_n es mayor que cero para casi todo n. Es decir:

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} a_n = L > 0 \text{ entonces } a_n > 0 \;\; pctn$$



Se elige $\varepsilon = L/2$, de modo que $L - L/2 = L/2 > 0$
Esto asegura que la franja verde esté por encima del eje de las x.
Así $a_n > 0$ si $n \geq n_0$

3.4. Álgebra de límites

En lo que sigue consideremos dos sucesiones convergentes

$$a_n \to a \in \mathbb{R} \text{ y } b_n \to b \in \mathbb{R}$$

Hablando informalmente, para valores grandes de n los valores de a_n se parecen al número a, mientras que los valores de b_n se parecen al número b. Cabe preguntarse qué sucede cuando realizamos con dichas sucesiones alguna operación elemental como suma o producto. En otras palabras, también informalmente hablando, podemos pensar que a_n es una aproximación de a y que b_n es una aproximación de b. Es esperable que $a_n + b_n$ sea una aproximación de $a+b$ y que $a_n \cdot b_n$ sea una aproximación de ab.

El siguiente teorema recoge esta idea y resulta ser una herramienta eficaz para el cálculo de límites.

Álgebra de límites. Si $a_n \to a \in \mathbb{R}$ y $b_n \to b \in \mathbb{R}$, entonces

- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n \cdot b_n \to ab$. En particular $k \cdot a_n \to ka$ si $k \in \mathbb{R}$
- Si $b \neq 0$ entonces $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$
- $|a_n| \to |a|$
- Si $a > 0$ entonces $(a_n)^{b_n} \to a^b$

Ejemplo. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2n}{n+1}\right)^3$.

Solución

Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \text{Sucesión 1 de los ejemplos } \mathbf{1.2.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=2\cdot 1=2 \qquad \text{Sucesión 4 de los ejemplos } \mathbf{1.2.}$$

Entonces:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2n}{n+1}\right)^3=(0+2)^3=8}$$

Ejercicio. Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2}{2n^2+5n}$

Solución

El álgebra de límites requiere que las sucesiones involucradas sean convergentes a un número real. Por ello, en este ejemplo, no podemos aplicar el álgebra de límites en forma directa ya que un primer análisis de la sucesión nos dice que tanto numerador como denominador tienden a más infinito y el teorema de álgebra de límites se refiere a valores numéricos del límite. Se suele decir que estamos en presencia de una *indeterminación* en este caso, del tipo $"\dfrac{\infty}{\infty}"$ entendiendo este símbolo como el cociente de sucesiones que tienden ambas a infinito. El nombre de indeterminación es porque no hay, como veremos en los próximos ejemplos, una propiedad general que nos indique el valor del límite en una situación como esta.

Sin embargo, no hay que desesperar: hablando otra vez informalmente, para valores grandes de n, $(3n^2+2)$ se parece en "términos relativos" a $3n^2$ así como $(2n^2+5n)$ se parece a $2n^2$. En otras palabras, para valores grandes de n podemos "despreciar" el término 2 en el numerador y el término $5n$ en el denominador frente a los términos $3n^2$ y $2n^2$ respectivamente. Para poner de manifiesto esta idea en forma algebraicamente correcta, sacamos factor común, tanto en el denominador como el numerador, a n^2 y simplificando luego:

Se parecen en "términos relativos"

Si, por ejemplo $n=1000$ resulta

$3n^2+2=3\,000\,002$ y $3n^2=3\,000\,000$

mientras que

$2n^2+5n=2\,005\,000$ y $2n^2=2\,000\,000$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3+\frac{2}{n^2})}{n^2(2+\frac{5}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{5}{n}}$$

Factor común n^2 en el numerador y en el denominador.

Se simplifica el factor n^2

Ahora estamos en condiciones de aplicar el teorema de álgebra de límites ya que el numerador tiende a 3 y el denominador tiende a 2.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{5}{n}}=\frac{3}{2}}$$

Ejercicio. Calcular el $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n^3+5n}$

Solución

Valen las mismas consideraciones que en el ejercicio anterior. Estamos ante una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Usamos la misma idea de sacar como factor común al término de mayor grado (que es el que crece más rápido) en el numerador y en el denominador para luego simplificar y ver si estamos en condiciones de aplicar el álgebra de límites.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n^3+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3+\frac{2}{n^2})}{n^3(2+\frac{5}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n^2}}{n(2+\frac{5}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{3+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}$$

Factor común n^2 en el numerador y n^3 en el denominador.

Se simplifica el factor n^2

Se prepara para usar álgebra de límites

Se puede ahora aplicar álgebra de límites ya que

$$\frac{1}{n}\to 0 \quad \text{y} \quad \frac{3+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}\to\frac{3}{2}$$

Entonces $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n^3+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{3+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}=0\times\frac{3}{2}=0}$$

Calcular el $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1}{25n^2+n}$

Solución

Nuevamente estamos ante una indeterminación del tipo $"\frac{\infty}{\infty}"$. Misma técnica que en los ejemplos anteriores (sacar factor común el término que va más rápido a infinito, tanto en el numerador como en el denominador, simplificar y preparar para usar álgebra de límites)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1}{25n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4(1+\frac{1}{n^4})}{n^2(25+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{1}{n^4})}{25+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{(n^2)}_{\boxed{+\infty}}\underbrace{(\frac{1+\frac{1}{n^4}}{25+\frac{1}{n}})}_{\boxed{\frac{1}{25}}}$$

Sin embargo, en este ejemplo hay una pequeña sutileza. Si prestamos atención al último límite, vemos que el primer factor (n^2) tiende a más infinito mientras que el segundo ($\frac{1+\frac{1}{n^4}}{25+\frac{1}{n}}$) tiende a $\frac{1}{25}$. Si bien no podemos aplicar el teorema de álgebra de límites que requiere que ambos límites sean números, sí podemos enunciar un resultado ad hoc para este caso que es verdadero y que se deduce a partir de la definición de límite:

Si $a_n\to+\infty$ y $b_n\to L>0$ entonces $a_nb_n\to+\infty$

Aplicado a nuestro caso, resulta

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1}{25n^2+n}=\lim_{n\to\infty}(n^2)(\frac{1+\frac{1}{n^4}}{25+\frac{1}{n}})=+\infty$$

Veamos un ejemplo más del tipo $"\frac{\infty}{\infty}"$

Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{5n+2}$

Solución

La diferencia con los ejemplos anteriores es que no es el cociente de dos polinomios. Sin embargo, haciendo un análisis intuitivo vemos que si despreciamos el 1 (dentro de la raíz) del numerador, para valores grandes de n, éste se parece a $2n$ y si despreciamos el 2 del denominador nos queda $5n$ de modo que, siempre intuitivamente, el límite del cociente es 2/5. Como en los casos anteriores, tenemos que hacer una cuenta que ponga de manifiesto esta idea intuitiva. Tal como lo hicimos previamente, sacamos factor común a n tanto en el numerador como en el denominador, simplificamos y vemos si el álgebra de límites es aplicable después de estas operaciones algebraicas.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{5n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1)}{n(5+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}{5+\frac{2}{n}}$$

Se saca factor común n teniendo en cuenta cómo opera la raíz cuadrada: $n\sqrt{\text{algo}} = \sqrt{n^2 \times \text{algo}}$

Quedamos en condiciones de aplicar el álgebra de límites:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{5n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}{5+\frac{2}{n}} = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5}}$$

3.5. Indeterminaciones

Los ejemplos precedentes son todos del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Sin embargo, los resultados fueron variados ($0, +\infty$ y $5/2$). En otras palabras no podemos predecir el valor del límite en estos casos en forma general. Es necesario, en cada caso, aplicar alguna técnica algebraica que permita "salvar" la indeterminación y calcular el límite. No es el único tipo de indeterminación con el que nos vamos a encontrar.

Por ejemplo, el producto de dos sucesiones, una de ellas que tienda a cero y la otra que tienda a infinito ("cero por infinito" o $"0 \cdot \infty"$), constituye también una indeterminación. Analicemos los siguientes ejemplos:

$a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, $b_n = n \to +\infty$: $\qquad a_n b_n = \dfrac{1}{n} n = 1 \to 1$

$a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, $b_n = n^2 \to +\infty$: $\qquad a_n b_n = \dfrac{1}{n} n^2 = n \to +\infty$

$a_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$, $b_n = n \to +\infty$: $\qquad a_n b_n = \dfrac{1}{n^2} n = \dfrac{1}{n} \to 0$

En estos observamos que no existe una propiedad que pueda predecir sobre un límite del tipo $"0 \cdot \infty"$.

Los límites de los siguientes "tipos", aunque no son todos, constituyen indeterminaciones:

$$"\frac{\infty}{\infty}" \qquad "+\infty - \infty"$$

$$"0 \cdot \infty" \qquad "\frac{0}{0}"$$

$$"(+\infty)^0" \qquad "0^0"$$

En todos los casos, hay que entender estos símbolos como el límite de la operación aritmética indicada en cada caso, entre dos sucesiones.

Como vimos, el álgebra de límites requiere que las sucesiones involucradas sean convergentes a un número real. Cuando esto no ocurre, a veces se presentan *indeterminaciones*. En cada caso hay que usar algún recurso algebraico que permita salvar la indeterminación y calcular el valor del límite.

Ejercicio. Calcular el $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n}\right)$

Solución

No se puede aplicar el álgebra de límites, porque de un primer análisis surge que $\sqrt{n} \to +\infty$ y $\sqrt{n+5} - \sqrt{n}$ es de la forma "infinito menos infinito" que constituye una indeterminación en sí misma.

Para salvar la indeterminación y poder calcular el límite, multiplicamos y dividimos por el conjugado de $\sqrt{n+5} - \sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}$$

El producto por conjugado

Cuando aparecen raíces cuadradas es útil usar la identidad

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$

para eliminarlas.

$$"\frac{\infty}{\infty}"$$

$$(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})=n+5-n=5$$

Seguimos teniendo una indeterminación, ya que el numerador tiende a más infinito y el denominador también. Pero estamos mejor que antes. Sacamos factor común $\sqrt{n}$ en el numerador y en el denominador:

$$\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}5}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1)}=\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar el álgebra de límites: el numerador es igual a 5, la raíz del denominador tiende a 1. Entonces

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}=\frac{5}{2}}$$

3.5.1. Parecen pero no son determinaciones

En ocasiones no es posible aplicar el álgebra de límites porque los límites involucrados no son finitos, sin embargo no estamos ante una indeterminación. Tuvimos esa situación en un ejemplo del tipo $"\infty\times L"$ con $L\neq 0$. A continuación damos algunas situaciones más (incluyendo esta) donde se puede saber el límite a pesar de que los límites involucrados no sean todos números reales.

$"(+\infty)\times L=+\infty"$ si $L>0$ — Por ejemplo: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{3n+1}\right)=+\infty$

$"(+\infty)+\infty=+\infty"$ — Por ejemplo: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}+\sqrt{n}=+\infty$

$"(+\infty)+\text{oscila finitamente}=+\infty"$ — Por ejemplo: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+\cos(n))=+\infty$

$"\frac{0}{\infty}=0"$ — Por ejemplo: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{n^2+1}=0$

$"(0)^{+\infty}=0"$ — Por ejemplo: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n=0$

Cada una de estas afirmaciones se puede demostrar a partir de la definición de límite. Haremos uso de ellas libremente.

3.6. "Cero por acotado"

Si bien los límites del tipo "$0 \cdot \infty$" resultan ser una indeterminación y, por lo tanto, nada podemos decir a sobre el valor del límite sin salvar tal indeterminación, sí se puede decir algo cuando estamos en presencia de un producto de una sucesión que tiende a cero por otra que está acotada. En estos casos se obtiene una sucesión que tiende a cero. Es decir

Si $a_n \to 0$ y $|b_n| \le K$ entonces $a_n b_n \to 0$

Ejemplo: Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)(-1)^{n+1}$

La expresión $(-1)^{n+1}$ vale 1 o -1 según la paridad de n. En particular está acotada: $\left|(-1)^{n+1}\right| \le 1$. Por otra parte, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 0$. Usando la propiedad "cero por acotado" se obtiene

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n+1}\right)(-1)^{n+1} = 0}$$

Ejercicio. Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7\cos(n^3+5)}{n+2}$

Solución

En el Cuaderno de Análisis Matemático "Funciones" vimos que la función coseno tiene como imagen al intervalo $[-1,1]$. Es decir que vale

$$-1 \le \cos(x) \le 1 \text{ cualquiera sea el número real } x$$

En particular $\quad -1 \le \cos(n^3+5) \le 1$

Si multiplicamos por 7 esta última desigualdad nos queda

$$-7 \le 7\cos(n^3+5) \le 7$$

En otras palabras, la expresión $7\cos(n^3+5)$ está acotada. Entonces el límite que nos piden calcular lo podemos escribir como un producto para poder usar la propiedad recién enunciada:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\text{Tiende a cero}} \underbrace{(7\cos(n^3+5))}_{\text{Está acotada}}$$

Así pensada, tenemos una sucesión que es producto de una que tiende a 0 ($\frac{1}{n+2}$) por otra que está acotada ($7\cos(n^3+5)$). Entonces, podemos afirmar que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{7\cos(n^3+5)}{n+2} = 0}$$

3.7. Propiedad del sándwich

Si dos sucesiones convergen a un mismo límite *L*, entonces, cualquier sucesión comprendida entre ambas, también converge a *L*.

Si $b_n < a_n < c_n$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

Ejemplo: Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\cos(3n+1)\right)$

El coseno es una función que toma valores entre -1 y 1. Entonces vale

$$-1 \leq \cos(3n+1) \leq 1 \text{ entonces}$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\cos(3n+1) \leq \frac{1}{n} \text{ entonces}$$

$$3-\frac{1}{n} \leq 3-\frac{1}{n}\cos(3n+1) \leq 3+\frac{1}{n}$$

Ahora bien: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right) = 3$. Entonces

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\cos(3n+1)\right) = 3}$$

Otra forma

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\cos(3n+1)\right) =$$

$$= 3 + \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{Tiende a cero}} \underbrace{\cos(3n+1)}_{\text{Está acotado}}\right) = 3$$

3.7.1. Sándwich en el infinito

La propiedad del sándwich se puede generalizar de la siguiente forma.

Si $a_n > b_n$ y $b_n \to +\infty$ entonces $a_n \to +\infty$

Ejemplo: Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ sabiendo que $a_n > \dfrac{3n^2+1}{100n+5}$ para todo n.

Calculamos el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{100n+5}$. Para ello, dividimos por n numerador y denominador:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{100n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+\frac{1}{n}}{100+\frac{5}{n}} = +\infty$$. Entonces $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty}$.

4. Sucesiones monótonas

Las sucesiones son funciones que tienen por dominio a los números naturales. Estudiaremos aquellas sucesiones que son funciones crecientes o decrecientes de su variable natural. Es decir:

$a_{n+1} \le a_n$ para (casi) todo n. En tal caso será *decreciente* o

$a_{n+1} \ge a_n$ para (casi) todo n. En tal caso será *creciente*.

En ambos casos decimos que se trata de una *sucesión monótona*.

La importancia de las sucesiones monótonas radica en que siempre tienen límite, ya sea éste finito o infinito. Antes de enunciar con precisión este resultado, hacemos una observación que será de utilidad en lo que sigue.

Si la sucesión es de términos positivos se tiene que:

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$ equivale a a_n decreciente.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ equivale a a_n creciente.

Ejemplo. Determinemos si las sucesiones $a_n = (0,8)^n$ y $b_n = (-0,8)^n$ son monótonas.

Solución

La sucesión $a_n = (0,8)^n$ tiene todos sus términos positivos. Sus primeros términos son: $a_1 = 0,8$, $a_2 = 0,64$, $a_3 = 0,512$ ... Aparentemente es decreciente, pero no alcanza con visualizar tres términos (ni un millón) para concluir que es decreciente. Sirve para hacer una conjetura. Para demostrar que la misma es efectivamente cierta usamos la observación precedente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(0,8)^{n+1}}{(0,8)^n} = 0,8 < 1$$

Recordemos que

$$\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$$

Entonces, como $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, la sucesión resulta decreciente.

En el otro caso, la sucesión no es de términos positivos pues $b_n = (-0,8)^n$ va cambiando de signo según sea n par o impar. Los primeros términos de b_n son $b_1 = -0,8$, $b_2 = 0,64$, $b_3 = -0,512$ .... Se observa que $b_n < 0$ si n es impar y que $b_n > 0$ si n es par. Podemos concluir entonces que la sucesión b_n no es monótona.

Este ejemplo nos muestra que no todas las sucesiones son monótonas y que éstas constituyen una clase particular de sucesiones. El siguiente teorema nos dice cómo se comporta el límite de una sucesión monótona.

4.1. Teorema sobre sucesiones monótonas

El estudiar una clase particular de sucesiones nos permite decir más sobre dicha clase. Este es un recurso habitual de la matemática: "si no puedes decir mucho sobre un conjunto de objetos (en nuestro caso las sucesiones), toma un subconjunto (las sucesiones monótonas) y trata de decir algo más sobre ellos".

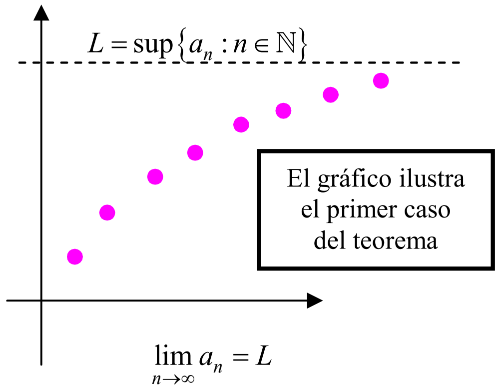
Si a_n es una sucesión creciente puede ser que el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ esté acotado superiormente o que no lo esté. Para cada uno de estos dos casos se tiene el siguiente teorema.

a. Si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente, entonces existe $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$.

b. Si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado superiormente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

De forma análoga, hay una versión del teorema cambiando *creciente* por *decreciente*, *acotada superiormente* por *acotada inferiormente* y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

En otras palabras, el teorema dice que la sucesión no puede oscilar: o tiene límite finito o tiende a infinito (más o menos según sea creciente o decreciente).



El teorema es de los llamados *teoremas de existencia*, esto es, asegura que el límite existe (en el caso de acotación) pero no dice cuánto vale.

Aunque pueda parecer poca cosa, el sólo hecho de saber que el límite existe nos permitirá en varios casos poder calcularlo efectivamente.

La demostración del teorema es un buen ejemplo de la necesidad de contar con el axioma de completitud de los números reales. La podés ver en la entrada *Teorema de las sucesiones monótonas.*

4.2. Algunos ejemplos importantes

Estudiaremos algunos ejemplos importantes de sucesiones, no sólo por los ejemplos en sí, sino por las técnicas usadas para calcular sus límites. Haremos uso del teorema recién enunciado sobre sucesiones monótonas.

$a_n = r^n$, $0 < r < 1$

Si experimentamos con algún caso particular ($r = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2^n}$, por ejemplo) nos podemos convencer de que la sucesión tiende a 0 ya que 2^n crece a más infinito. Veamos cómo este convencimiento se puede plasmar en una demostración.

La sucesión es de términos positivos. Estudiamos el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ a los efectos de compararlo con 1. Se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r^{n+1}}{r^n} = r < 1 \text{ para todo } n.$$

Entonces, la sucesión es decreciente. Además, dijimos que es de términos positivos, por lo que $0 < a_n$, es decir, está acotada inferiormente.

El teorema nos dice entonces que existe el límite $\lim_{n\to\infty} a_n = L \geq 0$. Apostamos a ("conjeturamos" es más apropiado) que $L = 0$.

Estamos razonando por el absurdo

Pues bien, veamos qué pasa si fuera $L > 0$. En tal caso, podemos aplicar el teorema de álgebra de límites al cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ y obtenemos la siguiente contradicción:

Por un lado:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{L}{L} = 1 \quad ,$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L}$$

Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} r = r$$

Como el límite es único, debe ser $1 = r$. Pero $r < 1$. ¡Contradicción!

Luego no queda otra que $L = 0$. Es decir

$$\boxed{0 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 0}$$

Con una cuenta similar se obtiene que si

$$\boxed{r > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = +\infty}$$

Calcular el $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 2^n}{7^n + 2}$

Solución

Estamos ante una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". En el numerador, el término que "tiende más rápido" a más infinito es 5^n, en el denominador es claramente 7^n. Pongamos esta idea de manifiesto sacando como factor común estos términos en el numerador y el denominador respectivamente

Recordar

$$\frac{5^n}{7^n} = \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 2^n}{7^n + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n (1 + \frac{2^n}{5^n})}{7^n (1 + \frac{2}{7^n})} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n \frac{1 + \frac{2^n}{5^n}}{1 + \frac{2}{7^n}}$$

Podemos usar ahora álgebra de límites:

Por un lado $\left(\frac{5}{7}\right)^n \to 0$ pues $0 < \frac{5}{7} < 1$

Por el otro $\dfrac{1 + \frac{2^n}{5^n}}{1 + \frac{2}{7^n}} \to \frac{1}{1} = 1$ pues $\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$ y $\frac{2}{7^n} \to 0$

$$0 < \frac{2}{5} < 1$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 2^n}{7^n + 2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n \frac{1 + \frac{2^n}{5^n}}{1 + \frac{2}{7^n}} = 0 \times 1 = 0$$

Es decir:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 2^n}{7^n + 2} = 0}$$

$b_n = \dfrac{r^n}{n}$, $r > 1$

Otra vez tenemos una sucesión de términos positivos. Estamos ante una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Si tuviéramos que conjeturar un resultado, habría que decidir quién va "más rápido" a más infinito, ¿el numerador o el denominador? Si fuera $r = 2$, los primeros términos serían: $2, 2, \frac{8}{3}, 4, \frac{32}{5}, \ldots$.. Aparentemente va creciendo y nada la detiene…

Calculamos el cociente $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ y lo comparamos con 1 como en el ejemplo anterior.

Recordemos que $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \dfrac{AD}{BC}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{r^{n+1}}{n+1}}{\frac{r^n}{n}} = r\frac{n}{n+1}$$

(*)
Volveremos a usar esta igualdad

Observamos que:

1) $r > 1$ ← Es dato

2) $\dfrac{n}{n+1} \to 1$ ← $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$

3) El producto $r\dfrac{n}{n+1} > 1$ para casi todo *n*. ← $r\dfrac{n}{n+1} > 1$ si $n > \dfrac{1}{r-1}$

Entonces la sucesión $b_n = \dfrac{r^n}{n}$ es creciente. El teorema de las sucesiones monótonas nos dice que si está acotada superiormente tiene límite finito, caso contrario, tiende a más infinito.

Supongamos que esté acotada superiormente.

Otra vez, razonamos por el absurdo

En tal caso $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L > 0$ y se puede usar el álgebra de límites en la expresión (*) y obtener:

Por un lado,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{L}{L} = 1$$

y, por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} r\frac{n}{n+1} = r$$

Se llega a la contradicción: $r=1$ cuando teníamos de movida que $r>1$. Esta contradicción proviene de suponer que la sucesión creciente $b_n=\dfrac{r^n}{n}$ está acotada superiormente. Por lo tanto $b_n=\dfrac{r^n}{n}$ *no está acotada superiormente*. El teorema nos dice entonces que

$$\boxed{r>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n}=+\infty}$$

La exponencial r^n va más rápido que n a más infinito si $r>1$.

Con una cuenta similar se obtiene que

$$\boxed{0<r<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} nr^n=0}$$

La exponencial r^n va más rápido que n^k a más infinito si $r>1$.

Con una demostración análoga a la precedente, vale que

$$r>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n^k}=+\infty \quad \text{y que} \quad 0<r<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^k r^n=0$$

cualquiera sea $k\in\mathbb{N}$.

Ejemplo. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}(0,9)^{2n}n^{100}$

Solución

No tenemos más que aplicar el resultado precedente

$$(0,9)^{2n}n^{100}=(0,81)^n n^{100}$$

$$\boxed{(0,9)^{2n}=\left((0,9)^2\right)^n=(0,81)^n}$$

Como $0<0,81<1$ resulta

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(0,9)^{2n}n^{100}=0}$$

Ejemplo. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}+n^2}{2^{2n}+n+1}$

Solución

Es una indeterminación del tipo "$\dfrac{\infty}{\infty}$". En el numerador, el término que “tiende más rápido” a más infinito es $4^{n+1}=4\cdot 4^n$, en el denominador es $2^{2n}=4^n$. Pongamos esta idea de manifiesto sacando como factor común 4^n en el numerador y el denominador

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+n^2}{2^{2n}+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n(4+\frac{n^2}{4^n})}{4^n(1+\frac{n}{4^n}+\frac{1}{4^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{n^2}{4^n}}{1+\frac{n}{4^n}+\frac{1}{4^n}} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{n^2}{4^n} = n^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \to 0 \\ \dfrac{n}{4^n} = n\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \to 0 \\ \dfrac{1}{4^n} \to 0 \end{array}}$$

Es decir $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+n^2}{2^{2n}+n+1} = 4}$

$c_n = \sqrt[n]{n}$

Nos apoyaremos en que $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n} = +\infty \ (r>1)$.

Observemos en primer lugar que

$$c_n = \sqrt[n]{n} \geq 1 \text{ para todo } n.$$

Vamos a probar que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Cualquiera sea $\varepsilon > 0$, basta probar que

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon \text{ para casi todo } n.$$

Llamamos $r = 1+\varepsilon > 1$ y la desigualdad a probar es equivalente a probar que

$$n < (1+\varepsilon)^n = r^n \text{ para casi todo } n.$$

Es decir $\frac{r^n}{n} > 1$ para casi todo n. Pero sabemos que $\frac{r^n}{n} \to +\infty$ pues $r > 1$. Entonces, es seguro que $\frac{r^n}{n} > 1$ para casi todo n. Luego

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

Ejemplo. Calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n n + n^2}$

Solución

Si hacemos un análisis intuitivo, el término $7^n n$ dentro de la raíz enésima, es el más relevante frente al otro término n^2. Una vez más ponemos de relevancia la idea intuitiva sacando este término como factor común

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n n+n^2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n n(1+\frac{n^2}{7^n n})} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n n}\sqrt[n]{1+\frac{n}{7^n}}$$

También se podía sacar factor común 7^n.

La raíz es distributiva con respecto al producto.

Vamos a aplicar álgebra de límites al producto que nos quedó. Para ello analizamos cada uno por separado:

Por un lado, $\sqrt[n]{7^n n}=\sqrt[n]{7^n}\sqrt[n]{n}=7\sqrt[n]{n}\to 7$ ← $\boxed{\sqrt[n]{7^n}=(7^n)^{1/n}=7}$

Por otro lado, $\sqrt[n]{1+\frac{n}{7^n}}\to 1$ ← $\boxed{\frac{n}{7^n}\to 0}$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n n+n^2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n n}\sqrt[n]{1+\frac{n}{7^n}} = 7\times 1=7$$

Es decir $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n n+n^2}=7}$.

4.3. El número *e*

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

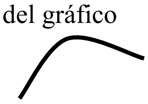
Esta sucesión ejemplifica un nuevo tipo de indeterminación "1^∞", siempre entendiendo este símbolo como una sucesión que tiende a 1 elevada a una sucesión que tiende a infinito.

Sin pretender dar una demostración, mostraremos que e_n es creciente ($e_{n+1}>e_n$) y acotada ($e_n<K$). Aceptados estos dos hechos, el teorema de sucesiones monótonas nos asegurará que la sucesión converja a un límite finito.

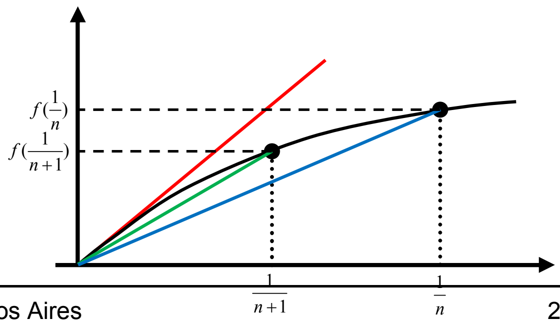
Para visualizar que e_n es creciente y acotada recurriremos al gráfico de la función $f(x)=\log(1+x)$ para valores positivos de la variable *x*. Más precisamente, fijamos la atención en

$$x_1=\frac{1}{n+1} \text{ y } x_2=\frac{1}{n}.$$

Esto ocurre por la concavidad del gráfico



Se observa que la recta verde tiene pendiente mayor que la recta azul. Estas dos rectas pasan por el origen y lo unen con los puntos del gráfico $(x_1, f(x_1))$ y



$(x_2, f(x_2))$ respectivamente. Esta observación se traduce en la desigualdad

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}} > \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Es decir,

$$(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

O bien,

$$\log\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right] > \log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$$

Recordar

$k\log a = \log a^k$

Como el logaritmo es una función creciente la desigualdad vale para las expresiones que están entre corchetes. Es decir

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Esto muestra que la sucesión e_n es creciente.

Para "ver" que además está acotada, también apelamos al gráfico de $f(x) = \log(1+x)$ y observamos que las pendientes de las rectas de colores (sean azules o verdes) son todas menores que la pendiente de la recta roja.

Si tal pendiente es m está observación se traduce en la desigualdad

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} < m$$

Es decir,

$$\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] < m$$

Con lo cual,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 10^m = K$$

Recordar

$y = 10^x$

es creciente

El teorema de las sucesiones monótonas, nos asegura que existe

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$

El número e, valor límite de la sucesión e_n es un número muy importante de la matemática que aparece en diversas situaciones. Es un número irracional que está entre 2 y 3. Más precisamente, su expresión decimal aproximada es $e\cong 2{,}718281\ldots$

Conocer el límite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nos permite calcular el límite de otras sucesiones con la misma "pinta". Para ver más detalles ir a la entrada *el número e*.

Ejemplo. Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

Solución

Estamos ante una indeterminación del tipo "1^∞". Observemos, además, que si llamamos $a_n=\frac{n+1}{2}$, podemos escribir el límite a calcular como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \quad \text{donde} \quad \lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$$

Este límite, con un tratamiento similar al realizado para el caso $a_n=n$, tiende al número real e. De modo que, en general vale

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e \text{ si } \lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$$

Es equivalente decir, cambiando $b_n=\frac{1}{a_n}$ que

$$\lim_{n\to\infty}(1+b_n)^{1/b_n}=e \text{ si } \lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$$

Haremos uso de estos dos resultados sin más justificaciones por ahora.

Cuando estemos ante una indeterminación del tipo "1^∞", la estrategia será "llevar" por medio de transformaciones algebraicas, el límite a calcular a una de estas situaciones.

La estrategia será

$$\left(1+\frac{1}{\text{algo}}\right)^{(\text{algo})}\to e \quad \text{si} \quad \text{algo}\to+\infty$$

Ejemplo. Calcular el $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+2}\right)^{n-1}$

Solución

Es una indeterminación del tipo "1^∞". Utilicemos la estrategia recién propuesta. Indicamos en cada igual, lo que estamos haciendo (la táctica) para poder calcular el límite

$$\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{n-1}=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2}{n+1}(n-1)}$$

Preparamos la base como $\left(1+\frac{1}{\text{algo}}\right)$ El exponente queda igual

Hacemos "aparecer" en el exponente **"algo"** para poder decir que el corchete tiende a e.

Para compensar que hicimos aparecer en el exponente "algo" ponemos $\frac{1}{\text{algo}}$ y mantenemos lo que ya estaba

Si bien la expresión que quedó tiene un aspecto temible, si la miramos con optimismo, podemos ver que lo que está entre corchetes es del tipo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \quad \text{con} \quad \lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$$

Sabemos en estos casos que $\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\to e$

Por otra parte, si concentramos la atención en lo que quedó en el exponente por fuera del corchete, vemos que tenemos una sucesión que sabemos atacar.

$$\frac{2}{n+1}(n-1)=\frac{2n-2}{n+1}=\frac{2-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to 2$$

De modo que podemos usar álgebra de límite: la base (lo que está entre corchetes) tiende al número real e y el exponente tiende a 2, entonces

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+2}\right)^{n-1}=e^2}$$

Ejemplo. Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+1}{2n^2+5}\right)^{\frac{n^2+1}{3n+2}}$.

Solución

Es una indeterminación del tipo "1^∞". Escribimos la base como 1 + algo:

$$\frac{2n^2+n+1}{2n^2+5}=\frac{(2n^2+5)+(n+1-5)}{2n^2+5}=1+\frac{n-4}{2n^2+5}$$

Sumamos y restamos 5 para que en el numerador aparezca la misma expresión del denominador

Dividimos cada paréntesis por la expresión del denominador.

Observemos que, como era de esperar, lo que quedó como "algo" tiende a cero:

$$\frac{n-4}{2n^2+5}=\frac{\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}\to 0$$

Luego, hacemos aparecer en el exponente el inverso multiplicativo de "algo" para transformar el límite en límites conocidos

$$\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+5}\right)^{\frac{n^2+1}{3n+2}}=\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{n-4}{2n^2+5}\right)^{\frac{2n^2+5}{n-4}}}_{\boxed{e}}\Bigg]^{\overbrace{\frac{(n-4)}{(2n^2+5)}\frac{(n^2+1)}{(3n+2)}}^{\boxed{?}}}$$

La sucesión que queda entre corchetes, tiende a e. Analizamos lo que quedó en el exponente, por fuera del corchete

$$\frac{(n-4)(n^2+1)}{(2n^2+5)(3n+2)}=\frac{n^3-4n^2+n-4}{6n^3+4n^2+15n+10}=\frac{1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{6+\frac{4}{n}+\frac{15}{n^2}+\frac{10}{n^3}}\to\frac{1}{6}$$

Nuevamente, estamos en condiciones de aplicar el álgebra de límites y concluir que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+5}\right)^{\frac{n^2+1}{3n+2}}=e^{1/6}=\sqrt[6]{e}}$$

Ejemplo. Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\cos(n+1)}{n^2+4}\right)^{2n+5}$

Solución

Es una indeterminación del tipo "1^∞" pues

$$\frac{\cos(n+1)}{n^2+4}=\underbrace{\frac{1}{n^2+4}}_{\text{Tiende a cero}}\underbrace{\cos(n+1)}_{\text{Está acotado}}\to 0$$

Ya tenemos la base escrita como 1 + algo. Transformamos el exponente como lo venimos haciendo en los límites de este tipo:

$$\left(1+\frac{\cos(n+1)}{n^2+4}\right)^{2n+5}=\left[\underbrace{\left(1+\frac{\cos(n+1)}{n^2+4}\right)^{\frac{n^2+4}{\cos(n+1)}}}_{e}\right]^{\overbrace{\frac{\cos(n+1)}{n^2+4}(2n+5)}^{?}}$$

Analizamos lo que nos quedó en el exponente:

$$\frac{\cos(n+1)}{n^2+4}(2n+5)=\frac{2n+5}{n^2+4}\cos(n+1)=\underbrace{\frac{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}}_{0}\underbrace{\cos(n+1)}_{\text{Está acotado}}\to 0$$

Entonces, podemos concluir que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cos(n+1)}{n^2+4}\right)^{2n+5}=e^0=1}$$

5. El Criterio de Cauchy o de la raíz enésima

Hemos visto que r^n tiende a 0 si r está entre 0 y 1 y tiende a más infinito si r es mayor que 1. Se puede extender fácilmente este resultado para valores negativos de r diciendo que

$$r^n\to 0 \quad \text{si} \quad -1<r<1$$

$$\left|r^n\right|\to +\infty \quad \text{si} \quad |r|>1$$

Este ejemplo sirve para dar un criterio que será muy útil para el cálculo de límites. Se quiere calcular el $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Criterio de Cauchy. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ vale que:

Si $0 \le L < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Si $L > 1$ o es más infinito entonces $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Si $L = 1$ entonces el criterio no sirve para decidir el $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Ejemplo: Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\right)^n$

Aplicamos el criterio de la raíz enésima:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\right)^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n} \to \frac{1}{2} < 1$$

El criterio dice entonces que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\right)^n = 0}$$

En la entrada *Criterio de Cauchy* se puede ver una demostración de este criterio.

6. El Criterio de D´Alembert o del cociente

Se basa en la idea que usamos en los primeros ejemplos donde estudiamos el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ y lo comparábamos con 1.

Se quiere calcular el $\lim_{n\to\infty} a_n$. El *criterio de D´Alembert* se enuncia como sigue

Criterio de D´Alembert. Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ vale que

Si $0 \le L < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Si $L > 1$ o es más infinito entonces $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Si $L = 1$ entonces el criterio no sirve para decidir el $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Ejemplo. Calcular el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n!}$

$n! = 1\times 2\times 3 ... (n-1)\times n$

Aplicamos el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\dfrac{n^3}{n!}} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!}\frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)n!}\frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^2}{n^3} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n})^2}{n^3} = \frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^2 \to 0$$

Como $0<1$, el criterio dice que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n!} = 0}$

Observe que, en general, el límite de cociente de D´Alembert no coincide (como ocurre en este ejemplo) con el límite de la sucesión original porque se trata de sucesiones distintas.

En la entrada *Criterio de D´Alembert* se puede encontrar una demostración del mismo.

Ejercicio. Hallen todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la sucesión $a_n = \dfrac{x^{2n}(n+1)^2}{9^n}$ tenga un límite finito. En cada caso, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Solución

Aplicamos el criterio de la raíz enésima:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{x^{2n}(n+1)^2}{9^n}} = \frac{x^2\sqrt[n]{(n+1)^2}}{9} \to \frac{x^2}{9}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{(n+1)^2} \to 1}$$

La estrategia

Aplicar el criterio de la raíz

La táctica

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ resultará $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ resultará $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

El caso igual a 1 lo trataremos en particular.

Si $\frac{x^2}{9} < 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Si $\frac{x^2}{9} > 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$$\boxed{\frac{x^2}{9} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < x < 3}$$

Es decir,

Si $-3 < x < 3$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}(n+1)^2}{9^n} = 0$

Si $-\infty < x < -3$ ó $3 < x < +\infty$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}(n+1)^2}{9^n} = +\infty$

El criterio no sirve cuando $x = -3$ ó $x = 3$ $\leftarrow$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9}$

Si $x = -3$

$$a_n = \frac{(-3)^{2n}(n+1)^2}{9^n} = \frac{9^n(n+1)^2}{9^n} = (n+1)^2 \to +\infty$$

La misma cuenta vale para $x = 3$.

En síntesis,

Si $\boxed{-3 < x < 3}$ entonces $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}(n+1)^2}{9^n} = 0}$

Si $\boxed{-\infty < x \le -3 \text{ ó } 3 \le x < +\infty}$ entonces $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}(n+1)^2}{9^n} = +\infty}$

7. Subsucesiones

Hemos visto que algunas sucesiones carecen de límite finito o infinito. Es el caso de las sucesiones que oscilan finitamente o infinitamente. Comprobar que una sucesión no tiene límite en forma rigurosa puede resultar difícil con sólo la definición de límite ya que hay que descartar *todo* posible candidato a ser el límite de la sucesión.

Para resolver este problema será útil introducir la idea de *subsucesión*.

Consideremos una sucesión de números reales:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots, a_n, \ldots$$

> ***Subsucesiones***
>
> Tienen otras utilidades. Por ejemplo,se puede probar (ver entrada *Subsucesiones*) que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente y esto resulta de gran importancia para el desarrollo del cálculo.

Con dicha sucesión se puede realizar de muchas maneras la siguiente construcción: se suprimen de la sucesión una cantidad finita o infinita de términos de manera que queden infinitos términos. Los que quedan forman una nueva sucesión que volvemos a numerar. Por ejemplo:

Si sacamos el primer término nos queda la nueva sucesión:

$$a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots., a_n, \ldots$$

que volvemos a numerar $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots., b_n, \ldots$ de modo que $b_n = a_{n+1}$. Esta nueva sucesión resulta ser una *subsucesión* de la primera.

Si, en cambio, sacamos los infinitos términos impares, nos quedan los infinitos términos pares $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, \ldots., a_{2n}, \ldots$ de modo que si volvemos a numerarla $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots., b_n, \ldots$ resulta ser $b_n = a_{2n}$. Como antes, se dice que a_{2n} es una *subsucesión* de a_n.

Una *subsucesión* de a_n es una sucesión $b_k = a_{n_k}$ donde $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 < n_6 < \ldots. < n_k < \ldots$ es la nueva numeración.

Dada la sucesión a_n cuyos primeros términos son 2, 4, 6, 4, 2, 4, 6, 4, 2,… escribir el término general de a_{2n} y de a_{2n+1}. Determinen si alguna de las dos subsucesiones es convergente.

Solución

a_{2n} es la subsucesión de los términos pares. Los “iluminamos” con azul para poder visualizarlos:

2, **4**, 6, **4**, 2, **4**, 6, **4**, 2,

Claramente se observa que $a_{2n} = 4$ para todo *n*. De modo que, al ser una sucesión constante, resulta convergente.

a_{2n+1} es la subsucesión de los términos impares. Los destacamos con rojo.

2, 4, **6**, 4, **2**, 4, **6**,…

Vemos que esta subsucesión se obtiene sacando todos los 4 de la sucesión. Si hacemos eso queda 2, 6, 2, 6, 2, … de modo que

$$b_n = a_{2n+1} = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ impar} \\ 6 \text{ si } n \text{ par} \end{cases}$$

que no resulta convergente. Pero, ¿cómo probar que no es convergente?

El siguiente resultado, que se deduce directamente de la definición de límite, vendrá en nuestra ayuda.

Proposición. Sea a_n una sucesión de números reales. Entonces $a_n \to L$ sí y sólo si toda subsucesión $b_k = a_{n_k}$ de a_n converge a L (L puede ser finito o infinito).

El cuantificador "toda subsucesión" la hace poco práctica para usarla para calcular límites. Pero alcanza con que dos subsucesiones tiendan a límites diferentes para que la sucesión original no sea convergente.

Ejemplo. Probemos que la sucesión $b_n = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ impar} \\ 6 \text{ si } n \text{ par} \end{cases}$ no tiene límite.

Solución

Consideremos la subsucesión de los términos pares y la subsucesión de los impares:

$$\mathbf{2}, \mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{6}, \ldots$$

$$b_{2n} = 6 \quad \text{y} \quad b_{2n+1} = 2$$

Es inmediato que $b_{2n} \to 6$ y que $b_{2n+1} \to 2$. Como estos límites son distintos, se concluye que la sucesión b_n no tiene límite.

Ejemplo. Demostrar que la sucesión $a_n = \dfrac{2n+1}{5n+3}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ no tiene límite.

Solución

A la sucesión a_n se la puede ver como el producto de dos sucesiones $a_n = b_n \cdot c_n$.

La primera de ellas $b_n = \dfrac{2n+1}{5n+3} = \dfrac{2+\frac{1}{n}}{5+\frac{3}{n}} \to \dfrac{2}{5}$.

La segunda $c_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ es una sucesión que oscila finitamente. Sus primeros términos son

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos(\pi)\ , \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), \cos(2\pi)\ , \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right), \cos(3\pi)\ , \ldots$$

Es decir,

$$0\ , -1\ , 0\ , 1\ , 0\ , -1\ , \ldots$$

que parece no tener límite.

No podemos aplicar álgebra de límites, porque este teorema exige la existencia de límite de ambas sucesiones. Además no serviría para ninguna conclusión.

Pero sí es de utilidad la proposición precedente sobre subsucesiones. Por un lado, la proposición nos dice que cualquier subsucesión del primer factor $b_n = \dfrac{2n+1}{5n+3}$ tendrá el mismo límite igual a $\dfrac{2}{5}$.

Por otro lado, si elegimos dos subsucesiones del segundo factor $c_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ con distinto límite la proposición nos asegurará que la sucesión producto $a_n = b_n \cdot c_n$ no tiene límite.

Definida la estrategia, vayamos en búsqueda de estas subsucesiones que resolverán el problema.

Esto no es difícil observando el comportamiento de $c_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$. Mientras que los términos impares son todos iguales 0, los términos múltiplos de 4 son todos iguales -1. En símbolos esto se traduce como:

$$c_{2n-1} = 0 \quad \text{y} \quad c_{4n} = -1$$

Entonces, las subsucesiones de la sucesión producto son

$$a_{2n-1} = b_{2n-1} \cdot c_{2n-1} \to \frac{2}{5} \times 0 = 0 \quad \text{y}$$

$$a_{4n} = b_{4n} \cdot c_{4n} \to \frac{2}{5} \times (-1) = -\frac{2}{5}$$

Lo dicho entonces: hay dos subsucesiones de a_n que tienden a distintos límites, entonces no existe el límite de a_n.

8. Sucesiones dadas en forma recurrente

Hasta ahora hemos tratado cada sucesión por medio de su término general.

Sin embargo, en muchas situaciones vinculadas con las aplicaciones y procesos iterativos, las sucesiones se presentan en forma recurrente. Esto es, se define el primer término a_1, luego del mismo surge a_2 y en general, se define a_{n+1} a partir del término anterior a_n o más generalmente, a partir de todos los términos anteriores.

Recordar

El problema de diseñar un algoritmo para calcular la raíz cuadrada de un número que dimos en la presentación de la sección responde a este tipo de sucesiones.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

A estas sucesiones se las llama *sucesiones recurrentes* y requieren, muchas veces, un tratamiento distinto del que le venimos dando a las sucesiones.

Ejemplo. Estudiemos la convergencia de la sucesión definida como $a_1 = 5$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{3n}$ para todo $n > 1$.

Solución

La sucesión viene servida para aplicar el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$$

Entonces

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Ejemplo. Sea a_n la sucesión definida en forma recurrente por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{n^n + 3^n}{n!} a_n$.

Calcular, si existe, el $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1+1/a_n}$

Solución

La sucesión es de términos positivos. En primer lugar calculamos el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Para ello usaremos el Criterio del cociente o Criterio de D´Alembert.

Aprovechamos la forma recurrente en que viene definida la sucesión:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n + 3^n}{n!} = \frac{n^n}{n!} + \frac{3^n}{n!}$$

No es conveniente usar el criterio del cociente en la expresión

$$\frac{n^n + 3^n}{n!}$$

ya que el signo + complica el cálculo.

Estudiamos cada término por separado, usando otra vez, el criterio del cociente: $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$. El cociente de D´Alembert es

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

Trabajamos un poco esta última expresión

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$. Como $e>1$, el criterio del cociente nos dice que la sucesión $x_n=\dfrac{n^n}{n!}$ tiende a más infinito. Es decir $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}=+\infty$

Con este resultado alcanza para asegurar que el cociente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^n}{n!}+\frac{3^n}{n!}$$

tiende a más infinito y así, por el *Criterio del cociente* podemos afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty.$$

De todas maneras estudiemos el segundo término:

$y_n=\dfrac{3^n}{n!}$. El cociente de D´Alembert es en este caso:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n}{n!}}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}=\frac{3}{n+1}$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_{n+1}}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n+1}=0$. Como $0<1$ el criterio del cociente nos dice que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$.

En consecuencia $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}+\dfrac{3^n}{n!}=+\infty$.

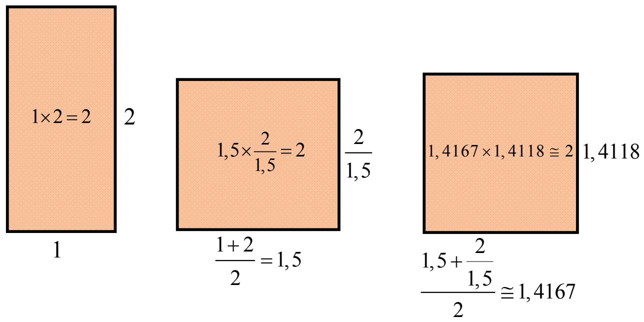
El criterio del cociente afirma que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

Estamos en condiciones de calcular el límite que nos pide el problema, teniendo en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} 2^{1+1/a_n}=2^{1+\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n}=2^{1+0}=2}$$

8.1. La raíz cuadrada de 2

La idea geométrica



La medida de las bases *tienden* a $\sqrt{2}$.

Comenzamos esta unidad planteando el problema de diseñar un algoritmo para calcular la raíz cuadrada de un número utilizando las cuatro operaciones elementales de la aritmética. Tomamos el caso particular $a=\sqrt{2}$.

Con la ayuda de una original *idea geométrica*, llegamos a conjeturar que las bases de los rectángulos aproximaban a $\sqrt{2}$.

En este Cuaderno de Análisis Matemático hemos construido las herramientas para poder probar este hecho.

Las medidas de las bases de los sucesivos rectángulos vienen dados por la sucesión dada en forma recurrente por la fórmula

$$x_1=1 \quad , \quad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$$

Esta sucesión resulta ser una sucesión de términos positivos que podemos ver que está acotada inferiormente y es decreciente, usando la desigualdad entre el promedio geométrico y el promedio aritmético que recordamos en el recuadro.

Desigualdad ente la media geométrica y la aritmética

Si $a>0, b>0$ vale

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

Para ver que está acotada inferiormente ponemos $a=x_n$ y $b=\frac{2}{x_n}$ en la desigualdad y queda

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)\geq\sqrt{x_n\times\frac{2}{x_n}}=\sqrt{2} \quad n\geq 1$$

Para ver que es decreciente analizamos el cociente de D´Alembert como en ocasiones anteriores y volvemos a usar la desigualdad entre promedios y la acotación que acabamos de demostrar. El cociente es

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{x_n^2}\right)$$

Al poner en la desigualdad $a=1$ y $b=\frac{2}{x_n^2}$ se obtiene

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{x_n^2}\right)\geq\sqrt{1\times\frac{2}{x_n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{x_n}\leq 1 \quad , \quad n\geq 2$$

Entonces, la sucesión de la medida de las bases de los rectángulos x_n es decreciente y acotada inferiormente. Por el Teorema de las sucesiones monótonas podemos afirmar que existe $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.

Solo queda calcular L. Para ello, usamos el álgebra de límites en la definición recurrente de x_n y obtenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right)$$

Es decir,

$$2L = L + \frac{2}{L}$$

o lo que es equivalente

$$L^2 = 2 \Leftrightarrow L = \sqrt{2} \text{ ó } L = -\sqrt{2}$$

Como la sucesión es de términos positivos, el límite no puede ser negativo (recordar la propiedad de conservación de signo). Entonces, podemos asegurar que la solución verdadera es la positiva. Es decir

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}}$$

En la entrada *Un ejemplo biológico* estudiamos un interesante modelo matemático que usa sucesiones dadas en forma recurrente.

ANEXO

A. La noción de límite

La noción de límite es el concepto más importante de toda la materia. En él se basa la noción de derivada y de integral que conforman las dos herramientas del cálculo.

A pesar de que Arquímedes estuvo muy cerca de toparse con este concepto, tuvieron que pasar 2000 años para que la humanidad superara los prejuicios que tenía al estudiar los procesos infinitos y darle una forma manejable a un concepto que termina siendo muy intuitivo.

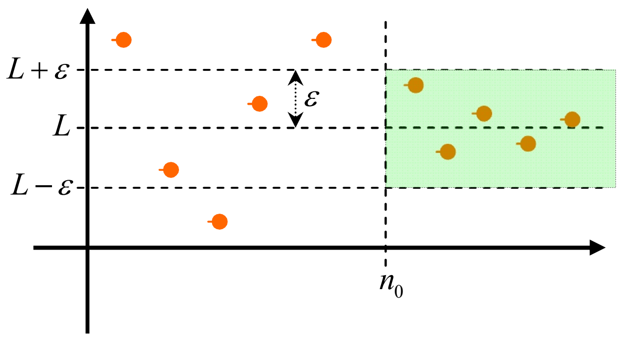
En esta entrada pretendemos hacer un breve análisis de cada una de las componentes que conforman la definición de límite. Veremos sus ventajas teóricas y sus dificultades prácticas que nos obligarán a explotar las propiedades que se deducen de este concepto para convertirlo en uno manejable y eficaz.

Cualquiera sea $\varepsilon > 0$
Es la diferencia que estamos dispuestos a tolerar entre a_n y L.
En el gráfico que sigue 2ε es el ancho de la franja verde donde puede estar a_n

existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$
Son los valores de la sucesión (los a_n) en los que vamos a fijar la atención. Los anteriores no importan. Ellos son los que tienen que caer en la franja de color.
Este número n_0 es el que en el gráfico determina el segmento vertical que delimita la franja verde.

Cualquiera sea $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$ (o sea $|a_n - L| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$)

entonces $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$
Es el intervalo en el que "vive" a_n
En el gráfico $L-\varepsilon$ es el "piso" de la franja verde y $L+\varepsilon$ es el techo.



Ejemplo. Demostrar, usando la definición, que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Sea $\varepsilon > 0$, cualquiera. Se debe encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1-\varepsilon < \frac{n}{n+1} < 1+\varepsilon \quad \text{siempre que} \quad n \geq n_0 \qquad (1)$$

Vamos en búsqueda de $n_0 \in \mathbb{N}$. En primer lugar, observamos que $\dfrac{n}{n+1} < 1 < 1+\varepsilon$. De modo que la desigualdad de la derecha de (1) se cumple para todo valor de $n \geq 1$.

Que $1-\varepsilon < \dfrac{n}{n+1}$, es equivalente, despejando n, a que $n > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$

Alcanza pues con elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ (lo podemos hacer porque los números naturales no están acotados superiormente). Así, si $n \geq n_0$ resulta $n \geq n_0 > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ con lo cual $1-\varepsilon < \dfrac{n}{n+1}$.

Como la otra desigualdad de (1) vale para todo número natural, resulta probado que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. □

Volver

B. Sucesiones monótonas

Una de las estrategias que maneja la matemática cuando estudia un objeto tan general como son las sucesiones, es restringir el objeto de estudio para ver si es posible obtener nuevas propiedades y resultados que después se puedan aprovechar para seguir avanzando.

Este es el caso de esta entrada, donde estudiaremos un conjunto particular de sucesiones. Aquellas que, como funciones, son crecientes o decrecientes.

Veremos que, el resultado aquí obtenido, servirá para atacar varios problemas de límite de sucesiones que de otra manera nos resultan inaccesibles.

Sea a_n una sucesión monótona creciente.

a. Si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente, entonces existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$.

b. Si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado superiormente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

*Demostración de **a**.*

En lo que sigue suponemos que a_n es una sucesión monótona creciente.

Si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente el axioma del supremo nos asegura que el conjunto A tiene supremo. Sea

$$L = \sup A = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$$

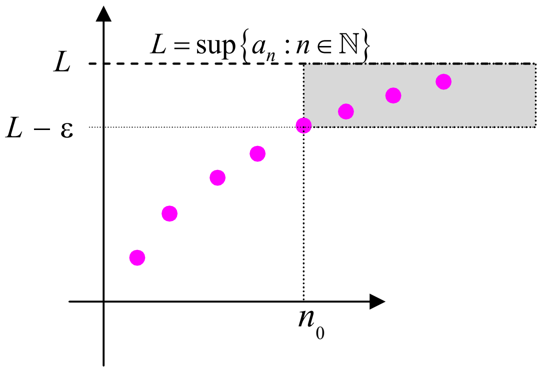
Se afirma que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ tal como se "sospecha" del gráfico. Pero hay que demostrarlo:

Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de supremo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$L - \varepsilon < a_{n_0} \le L$$

Pero, como la sucesión es creciente y L es el supremo, a partir de ese valor, los puntos están todos en la zona gris. Es decir

$$L - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le L \quad \text{si } n \ge n_0$$



En otras palabras, si $n \ge n_0$ resulta $0 < L - a_n < \varepsilon$, lo que prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ □

Demostración de b.

Si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado superiormente.

Queremos probar en este caso que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Esto es, según la definición, que dado cualquier $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$ si $n \ge n_0$.

Ahora bien, como A no está acotado superiormente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_{n_0} > M \, .$$

Pero como la sucesión es creciente, vale que

$$a_n \ge a_{n_0} \text{ si } n \ge n_0 \, .$$

Entonces

$$a_n > M \text{ si } n \ge n_0 \, .$$

Lo que demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. □

De forma análoga, hay una versión del teorema cambiando *creciente* por *decreciente* y *acotada superiormente* por *acotada inferiormente* y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Volver

C. El número *e*

Tal vez, la constate más importante de la matemática después del número pi, sea el número e que presentamos en esta entrada.

Este número que tiene la inicial del matemático Leonard Euler, aparece frecuentemente en las aplicaciones y en diferentes ramas de la matemática tales como la estadística y las probabilidades y en el análisis matemático para mencionar las dos más importantes. En las aplicaciones, es de uso frecuente tanto en la ingeniería como en la economía, en la biología como en la física.

Hay muchas formas de presentar al número e. La que aprendemos aquí, muestra a este número como el límite de una sucesión monótona.

En oportunidad de estudiar la sucesión $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dimos una visualización de que era creciente y acotada superiormente, pero no brindamos una buena demostración de estos dos hechos que dan lugar a la convergencia de esta sucesión a un número que bautizamos con la letra e y que está entre 2 y 3.

El nombre e es la inicial del matemático suizo Leonard Euler

Dada la importancia que tiene esta sucesión y su límite en el desarrollo del cálculo, en esta entrada damos una demostración de los dos hechos mencionados.

Vamos a usar la siguiente desigualdad

$$(1-x)^n \geq 1-nx \quad \text{para} \quad 0<x<1$$

que se puede probar en forma *inductiva*.

Inducción

Se debe probar la desigualdad para $n=1$ y luego, suponiendo que vale para $n=k$ probar la desigualdad para $n=k+1$

Cuando $n=1$ se da la igualdad.

También es fácil comprobar la desigualdad para $n=2$ ya que

$$(1-x)^2 = 1-2x+x^2 \geq 1-2x$$

Pasar del caso $n=k$ al caso $n=k+1$ tampoco reviste dificultad:

$$(1-x)^{k+1} = (1-x)^k(1-x) \geq (1-kx)(1-x) = 1-(k+1)x+kx^2 > 1-(k+1)x$$

De modo que inductivamente, se prueba que la desigualdad es cierta para todo $n \geq 1$.

De forma similar se puede probar la desigualdad

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{para} \quad x>0$$

Teniendo estas desigualdades a mano, probaremos que $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada superiormente.

$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente.

Demostración

Consideraremos el cociente de D´Alembert y probaremos que es mayor que 1.

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Los colores indican de qué forma estamos operando en cada factor. Tomen papel y lápiz para seguir la cuenta.

Usamos ahora la primera desigualdad anunciada al comienzo para el primero de los factores con $x = \frac{1}{(n+1)^2}$

Desigualdad en uso

$(1-x)^n > 1-nx$

$0 < x < 1$

Entonces resulta,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right) > \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1+\frac{1}{(n+1)^3} > 1$$

Queda demostrado que

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ es creciente. } \square$$

$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es acotada.

Demostración

Vamos a probar esto indirectamente. Consideremos la sucesión, muy parecida a la que estamos estudiando, dada por la fórmula

$$A_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Los primeros términos de A_n son en forma aproximada: **4; 3,375; 3,16**; etc. No prueba nada pero se intuye que es decreciente.

Probaremos que A_n es decreciente.

De ser así, en particular resultará,

$$A_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e_n\left(1+\frac{1}{n}\right) < A_1 = 2^2 = 4$$

Entonces

$$e_n < \frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 4\frac{n}{n+1} < 4$$

Con lo cual $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es acotada.

Basta probar entonces que A_n es decreciente.

Como antes, hacemos el cociente de D´Alembert y comparamos con 1:

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}$$

Desigualdad en uso
$(1+x)^n > 1+nx \quad , \quad x>0$

Usamos ahora la otra desigualdad para el factor del denominador con

$$x = \frac{1}{n^2-1}$$

Como está dividiendo, la desigualdad "se da vuelta"

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{n}{n^2-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n-\frac{1}{n}}} < 1$$

Esto prueba que A_n es decreciente y por lo tanto, $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es acotada. □

Esta última cuenta es suficiente para probar que $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiene límite.

En efecto: hemos probado que la sucesión de términos positivos $A_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

es decreciente (y acotada inferiormente porque es de términos positivos)

Por lo tanto, tiene límite finito. Entonces, nuestra sucesión en estudio es el cociente de dos sucesiones que tienen límite $e_n = \frac{A_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

Usando álgebra de límites, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} A_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} A_n$$

Volver

D. Criterio de convergencia de la raíz enésima (Cauchy)

El matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) fue uno de los que le dio bases sólidas al cálculo infinitesimal.

También investigó la convergencia y divergencia de series infinitas que será motivo de estudio al final de este curso. En este campo desarrolló algunos criterios en el que se incluye el que aquí presentamos y usamos para la convergencia de sucesiones. Cuando veamos series infinitas, recuperaremos este resultado y lo utilizaremos en toda su potencia.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ vale que:

a. Si $0 \le L < 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

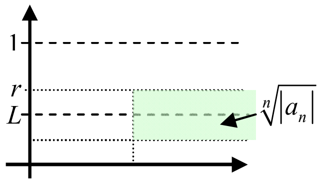
b. Si $L > 1$ o es más infinito entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

c. Si $L = 1$ entonces el criterio no sirve para decidir el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Demostración

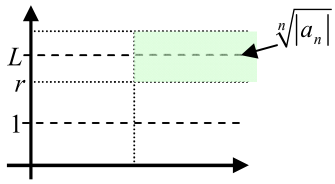
Caso $0 \le L < 1$

Del gráfico se deduce que $\sqrt[n]{|a_n|} < r < 1$ para casi todo *n*. Entonces $0 \le |a_n| < r^n$. Aplicando la propiedad del sándwich resulta $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Luego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$



Caso $L > 1$.

Del gráfico se deduce que $\sqrt[n]{|a_n|} > r > 1$ para casi todo *n*. Entonces $|a_n| > r^n \to +\infty$. Aplicando la propiedad del sándwich en el infinito, resulta $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$



Caso $L = 1$.

La sucesión $a_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ tiene límite igual e^k. Sin embargo $\sqrt[n]{|a_n|} = 1 + \frac{k}{n} \to 1$.

Entonces, en este caso, el criterio no sirve para determinar el valor del límite. □ Volver

E. Criterio de convergencia del cociente (D´Alembert)

Al igual que el "Criterio de la raíz enésima de Cauchy", este criterio que en esta unidad explotaremos para sucesiones, fue creado para el estudio de series infinitas, por lo que lo retomaremos al final del curso.

El matemático Jean le Rond D´Alembert (1717-1783) al igual que Cauchy nació y vivió en París pero 60 años antes que éste. Junto con Diderot, miembros relevantes de la ilustración francesa, fue creador de la famosa *L´Encyclopedie* que, además de ser la primera, contenía la síntesis de los principales conocimientos de la época.

Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ vale que

a. Si $0 \le L < 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

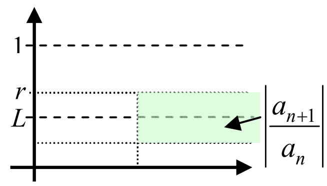
b. Si $L > 1$ o es más infinito entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

c. Si $L = 1$ entonces el criterio no sirve para decidir el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Demostración de a.

Caso $0 \le L < 1$

Del gráfico se deduce que $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r < 1$ para casi todo n. Entonces la sucesión $|a_n|$ es decreciente y acotada inferiormente. Por lo tanto, tiene límite finito: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = l$ con $0 \le l < 1$. Si fuera $0 < l$ tomando límite en la desigualdad verde (se puede usar álgebra de límite) se obtendría $L = 1$ lo que es claramente contradictorio con la hipótesis de que $0 \le L < 1$. Entonces debe ser, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, de donde

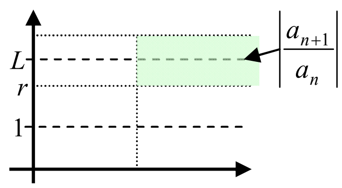


$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Demostración de b.

Caso $L > 1$.

Mirando el gráfico, se deduce, en este caso, que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r > 1$. Entonces $|a_{n+1}| > |a_n|$. La sucesión $|a_n|$ resulta ser creciente. Si llegara a estar acotada superiormente, tendría límite finito y mayor que cero. En tal caso se llega a la contradicción:



$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}|}{\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|} = 1$$

En contradicción con el hecho de que $L > 1$. La contradicción proviene de suponer que $|a_n|$ está acotada superiormente. Luego $|a_n|$ no está acotada superiormente, además vimos que es creciente. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty. \ \square$$

Volver

F. Sucesiones acotadas y subsucesiones

Las sucesiones acotadas juegan un papel importante en el desarrollo del cálculo y en la formalización de la estructura de los números reales a la que apenas nos hemos asomado.

En ese marco, las subsucesiones que en la práctica usamos para decidir sobre la divergencia de algunas sucesiones, sirven para dar un resultado central en la tarea de presentar una acabada descripción de los números reales. Este resultado dice que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente y en esta entrada daremos una elegante demostración de este hecho importante.

Entre las primeras propiedades de sucesiones vimos que toda sucesión convergente a un límite finito, está acotada superior e inferiormente.

También vimos que no vale al revés. Es decir, hay sucesiones acotadas que no tienen límite. Tal es el ejemplo de la sucesión oscilante

$$1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

Sin embargo, es posible decir algo más de las sucesiones acotadas.

El siguiente resultado es de gran importancia para el cálculo y, aunque no haremos uso del mismo durante el curso, presentamos aquí una demostración que echa mano del teorema de las sucesiones monótonas.

Teorema. Si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado, entonces existe una subsucesión de a_n que tiene límite finito.

Demostración

La estrategia de la demostración es observar primer lugar, que hay una subsucesión monótona. Como también resultará acotada por hipótesis, el teorema de las sucesiones monótonas, nos dará seguridad de que tal subsucesión tiene límite finito como dice el enunciado del teorema que queremos demostrar.

Vamos pues por el resultado que da cuenta de que existe una subsucesión monótona.

Para ello nos valdremos del concepto de *punto panorámico*. Diremos que a_p es un *punto panorámico* de la sucesión a_n, si

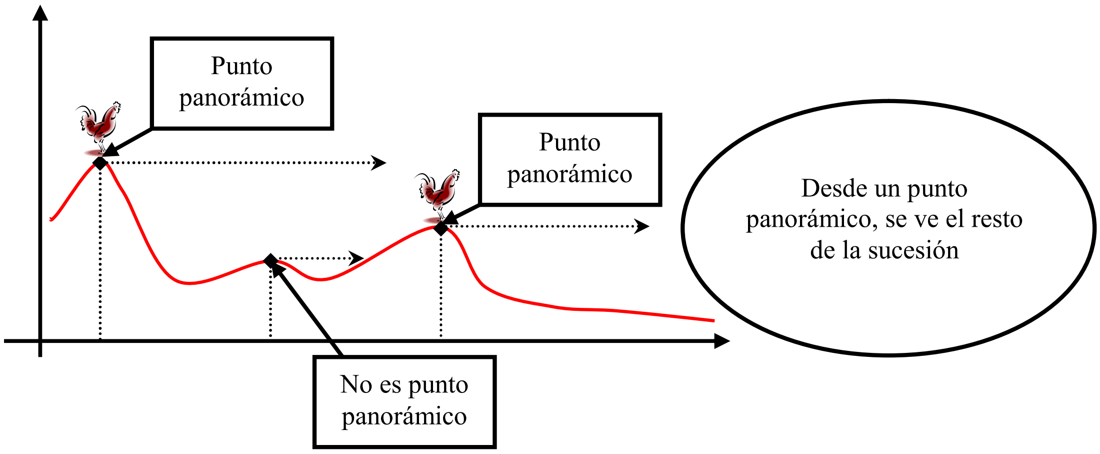
$$a_p > a_n \quad \text{para} \quad n > m$$

Por ejemplo, en la sucesión $0,1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},0\ldots$

los puntos panorámicos son $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.

En cambio, la sucesión $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ no tiene puntos panorámicos.

El siguiente gráfico muestra con más claridad el concepto de punto panorámico:



Queremos probar que de la sucesión original a_n se puede extraer una subsucesión monótona.

Se pueden dar dos situaciones:

Situación 1: *existen infinitos puntos panorámicos.*

En tal caso elegimos el primer término de la subsucesión n_1 de forma tal que a_{n_1} sea un punto panorámico. Es decir, tenemos que

$$a_{n_1} > a_n \text{ para } n > n_1$$

El siguiente paso, como hay infinitos puntos panorámicos, es elegir $n_2 > n_1$ de forma tal que a_{n_2} también sea un punto panorámico. Entonces tenemos hasta aquí

$$a_{n_1} > a_{n_2} > a_n \text{ para } n > n_2 > n_1$$

Ya nos podemos imaginar los siguientes pasos. Como tenemos infinitos puntos panorámicos, podemos repetir este proceso indefinidamente y obtener una sucesión de índices

$$\ldots n_k > n_{k-1} > \ldots > n_1$$

tales que a_{n_k} son todos puntos panorámicos, de modo que vale

$$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \ldots > a_{n_k} > \ldots$$

He aquí la sucesión monótona (decreciente en este caso) que estábamos prometiendo.

Situación 2: *existen sólo finitos puntos panorámicos.*

Como sólo hay una cantidad finita de puntos panorámicos, podemos decir que a partir de un índice n_1 en adelante, no hay más de tales puntos. En otras palabras, si $n \geq n_1$ entonces a_n no es punto panorámico.

Para construir la sucesión monótona en este caso procedemos como sigue:

Se elige a_{n_1} como primer término de la subsucesión.

Como a_{n_1} no es punto panorámico, debe existir un índice $n_2 > n_1$ de modo que

$$a_{n_1} \leq a_{n_2}$$

De la misma forma, como a_{n_2} no es punto panorámico, existe $n_3 > n_2$ tal que

$$a_{n_2} \leq a_{n_3}$$

Podemos repetir este procedimiento indefinidamente y obtener una subsucesión

$$a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq a_{n_3} \leq \ldots \leq a_{n_k} \leq \ldots$$

que resulta monótona creciente.

Hemos establecido que cualquiera sea la situación siempre es posible obtener de a_n una subsucesión a_{n_k} monótona.

Como por hipótesis, la sucesión a_n está acotada, también está acotada la subsucesión a_{n_k}.

El teorema de las sucesiones monótonas, nos asegura que existe y es finito el límite de a_{n_k}.

El teorema queda demostrado. □

Volver

G. Un ejemplo biológico. Sucesiones por recurrencia

A esta Unidad 2 se la motiva con el problema de generar un algoritmo para crear la raíz cuadrada de un número. Este problema quedó resuelto al final de la unidad cuando estudiamos las sucesiones dadas en forma recurrente.

Presentamos en esta entrada otro ejemplo donde un modelo biológico puede ser tratado eficazmente con las herramientas que adquirimos en esta unidad.

Esta sucesión recurrente que se recrea aquí en un modelo biológico, es base de una teoría matemática que en la actualidad está tomando mucho impulso: la teoría del caos. En la bibliografía obligatoria, se puede profundizar un poco más en ella.

El siguiente modelo de la evolución de la población de una colonia de insectos se ajusta bien a la realidad. Con una adecuada escala de medida, la población de cada período (p_{n+1}) se obtiene a partir de la del período anterior (p_n) mediante la expresión

$$p_{n+1} = rp_n(1-p_n) \ , \quad 0 < p_0 < 1$$

En este caso r es una constante entre 0 y 4 que mide la vitalidad de la población. Con la escala elegida la población se mantiene siempre entre 0 y 1. El 0 indica la extinción y el 1 un tope para la población imposible de superar por las condiciones del habitat.

Vamos a probar que si la vitalidad de la población es baja ($0 < r \le 1$), entonces la población a la larga se extingue. Es decir $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$.

Solución

La sucesión p_n *está acotada* tanto superior como inferiormente pues

$$0 < p_n < 1 \text{ para todo } n$$

Además, se puede fácilmente comparar con 1 el cociente de D´Alembert $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$.

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = r(1-p_n) < 1$$

Entonces la sucesión p_n *es decreciente*.

De acuerdo al teorema de las sucesiones monótonas, existe $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ con $0 \le p < 1$.

Veamos que $p = 0$. Si así no lo es, resultaría $p > 0$ y se llega a la siguiente contradicción:

Por un lado,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{p}{p} = 1$$

y por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty} r(1-p_n) = r(1-p)$$

Como el límite es único, ambos valores deben coincidir, de donde

$$p = 1 - \frac{1}{r} \leq 0$$

Contradiciendo la suposición de que $p > 0$. Se sigue que

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} p_n = 0}$$

Es decir, la población a la larga, se extingue. □ *Volver*

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), Sucesiones*, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.