Práctica 8

Polinomio de Taylor

1. Polinomio de Taylor

El análisis completo de una función puede resultar muy difícil. Una forma de abordar este problema es aproximar la función por una más sencilla. En este caso vamos a aproximar las funciones por polinomios. Dicha aproximación se hace cerca de un valor concreto y sólo servirá para valores cercanos. A medida que nos alejemos, la aproximación será menos confiable y es posible que el polinomio se aleje mucho de la función bajo estudio.
En la versión más sencilla podemos aproximar la función a estudiar por una constante. Es claramente mucho más fácil operar con un número (la constante) que con una función que puede ser complicada. Esta aproximación se usa mucho en las aplicaciones. Por ejemplo, la aceleración de la gravedad cerca de la superficie de la tierra se aproxima por la constante $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$ (o a veces directamente $g \approx 10\frac{m}{s^2}$), por más que en realidad es una función que depende de la altura. Otro ejemplo es la densidad del agua que se aproxima por $\delta = 1\frac{g}{cm^3}$ por más que dependa de la presión y la temperatura.
Para otras aplicaciones se necesitan aproximaciones más precisas, como una función lineal. Por ejemplo, dados una función f y un valor de x podemos tomar la recta tangente al gráfico de f, que ya hemos calculado. En física, un caso típico es aproximar la longitud de un objeto por un valor constante más una corrección lineal pequeña que depende linealmente de la temperatura. Para mejorar la precisión se agregan coeficientes cuadráticos o cúbicos, a medida que es necesario.
Vamos a analizar otro ejemplo. Supongamos que queremos calcular aproximadamente el valor de $\sqrt{65}$. Como primera aproximación, podemos tomar que $\sqrt{65} \approx \sqrt{64} = 8$. Muchas veces con ese nivel de precisión alcanza. En realidad, el valor es un poco más grande que 8, informalmente decimos que es "8 y pico". Para poder aproximar este número con más precisión podemos usar la recta tangente a $\sqrt{x}$ en el punto correspondiente a $x = 64$. Es esperable que cerca de ese punto la recta tangente sea una mejor aproximación que la función constante. Esto no solo nos da un aproximación de $\sqrt{65}$, sino que tenemos una aproximación de $\sqrt{x}$ cuando x vale aproximadamente 64.
Luego vamos a ver cómo extender esta idea a polinomios de grado más alto. También vamos a estimar el error que se comete en cada aproximación, de manera que podamos saber si la

aproximación está dentro del rango que necesitamos en cada caso.

1.1. Recta tangente

Como anunciamos anteriormente, primero vamos a ver un caso sencillo en el que aproximamos una función f en un valor de x determinado por la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x, f(x))$. Tomamos la función $f(x) = \sqrt{x}$ y queremos ver cómo se comporta cerca de 64. Para ello, queremos usar una función simple, en este caso una función lineal. De todas las funciones lineales la recta tangente en el punto de abscisa $x_0 = 64$ es la que mejor aproxima a f cerca de ese valor. En este caso $f(64) = 8$ y como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ tenemos que $f'(64) = \dfrac{1}{16}$. Por ello, la función que nos da la recta tangente al gráfico de f es

$$\boxed{P_1(x) = 8 + \frac{1}{16}(x - 64)}.$$

Distribuyendo, esta función también se podría escribir como $P_1(x) = \dfrac{1}{16}x + 4$, pero si vamos a utilizar valores de x cercanos a 64 la primera expresión hace que las cuentas sean más fáciles.
Por ejemplo, para calcular aproximadamente $f(65) = \sqrt{65}$ podemos calcular el valor de

$$P_1(65) = 8 + \frac{1}{16}(65 - 64) = 8{,}0625.$$

Este valor es muy cercano a $\sqrt{65} \approx 8{,}0622...$

1.2. Aproximando por parábolas

Al retomar el ejemplo anterior, al aproximar $f(x) = \sqrt{x}$ por

$$P_1(x) = 8 + \frac{1}{16}(x - 64)$$

estamos pidiendo que $f(64) = P(64)$ para que ambas coincidan en el punto. Además pedimos que $f'(64) = P'(64)$ para que las respectivas tangentes tengan la misma pendiente.
Para extenderlo a funciones cuadráticas en las que aproximamos el gráfico de la función por una parábola, podemos pedir que ambas tengan la misma curvatura en ese punto. La curvatura es difícil de calcular, pero esta condición es equivalente a pedir que tengan la misma derivada segunda, o sea que $f''(64) = P''(64)$.
Si tomamos

$$P_2(x) = a + b(x - 64) + c(x - 64)^2$$

y derivamos dos veces nos queda que $P_2''(x) = 2c$, por lo que $c = \dfrac{f''(64)}{2}$. Además, como teníamos antes, $a = f(64)$ y $b = f'(64)$.
En nuestro ejemplo $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$, por lo que $f''(64) = -\dfrac{1}{2048}$ y $c = -\dfrac{1}{4096}$, por lo tanto

$$\boxed{P_2(x) = 8 + \frac{1}{16}(x-64) - \frac{1}{4096}(x-64)^2}.$$

Entonces, al estimar $f(65) = \sqrt{65}$ por

$$P_2(65) = 8 + \frac{1}{16}1 - \frac{1}{4096}1^2 = 8{,}062256...$$

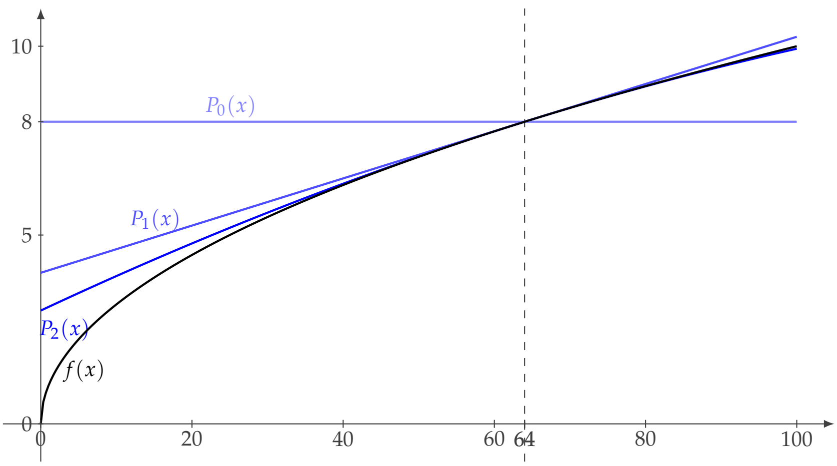
tenemos una mejor aproximación.
(Notemos que el valor de $\sqrt{65}$ es aproximadamente 8,062258....)
Lo bueno de escribir a

$$P_2(x) = a + b(x-64) + c(x-64)^2$$

en vez de

$$P_2(x) = u + vx + wx^2$$

es que la expresión para a, b y c es mucho más directa que la expresión para u, v y w.
Veamos cómo quedan estos polinomios en un gráfico.



De la misma manera podríamos generalizar lo anterior a polinomios de grado 3 y buscar un polinomio de la forma

$$P_3(x) = a + b(x-64) + c(x-64)^2 + d(x-64)^3$$

que cumpla las igualdades anteriores y que además $f'''(64) = P'''(64)$. Las fórmulas para a, b y c no cambian. Al igualar las derivadas terceras tenemos que $f'''(64) = 3.2.1d = 6d$. (Al derivar "baja" primero un 3, después un 2 y después un 1.)

Por lo que $d = \dfrac{f'''(64)}{3.2.1} = \dfrac{f'''(64)}{6}$. En nuestro ejemplo, $d = \dfrac{1}{524288}$ y al aproximar a $f(65) = \sqrt{65}$ obtenemos

$$P_3(x) = 8 + \frac{1}{16}(x - 64) - \frac{1}{4096}(x - 64)^2 + \frac{1}{524288}(x - 64)^3$$

y reemplazando queda que

$$\begin{aligned} P_3(65) &= 8 + \frac{1}{16}(65 - 64) - \frac{1}{4096}(65 - 64)^2 + \frac{1}{524288}(65 - 64)^3 \\ &= 8 + \frac{1}{16}1 - \frac{1}{4096}1^2 + \frac{1}{524288}1^3 = 8{,}06225777... \end{aligned}$$

(Notemos que en realidad $\sqrt{65} \approx 8{,}06225775....$)

1.3. Polinomio de Taylor

Al generalizar, tenemos el siguiente teorema.

Polinomio de Taylor. Dada f una función con por lo menos n derivadas en x_0 tendremos un único polinomio de grado n tal que las primeras n derivadas de f coinciden con las de P. O sea que $f(x_0) = P_n(x_0)$, $f'(x_0) = P_n'(x_0)$, $f''(x_0) = P_n''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0)$. Este polinomio es el *Polinomio de Taylor* de f en x_0 de orden n. Más precisamente, su expresión es

$$P_n(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

En la expresión, $n!$ es el factorial de n, o sea el producto de todos los números naturales de 1 a n, o sea $n! = 1.2.3.\ldots.n$ y $0! = 1$.
También podemos escribir los primeros términos directamente, usando que $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$ y $3! = 1.2.3 = 6$ y queda

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

que es una expresión más simple y más parecida a la que vimos antes.
Para ver como usarlo, resolvamos otro ejemplo.

Ejemplo. Calcular el polinomio de Taylor de orden 5 en $x_0 = 0$ de $f(x) = e^{2x}$. Con este resultado, aproximar el valor de $f(0{,}1) = e^{0{,}2}$ y $f(1) = e^2$.

Solución

Primero, usando ahora la regla de la cadena vemos que

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2e^{2x}, \\
f''(x) &= 2.2e^{2x}, \\
f'''(x) &= 2.2.2e^{2x}, \\
&\dots \\
f^{(5)}(x) &= 2^5 e^{2x}.
\end{aligned}
$$

Entonces, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 2.2$, ..., $f^{(5)}(0) = 2^5$ y

$$P_5(x) = 1 + 2x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{8}{6}x^3 + \frac{16}{24}x^4 + \frac{32}{120}x^5$$

$$\boxed{P_5(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5}.$$

Al aproximar $f\left(\frac{1}{10}\right) = e^{0,2}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
P_5\left(\frac{1}{10}\right) &= 1 + 2\frac{1}{10} + 2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^4 + \frac{4}{15}\left(\frac{1}{10}\right)^5 \\
&= \boxed{\frac{229013}{187500}} \approx 1,22140266...
\end{aligned}
$$

Sabiendo que el valor exacto es $e^{0,2} \approx 1,22140275...$ vemos que los valores son similares. En cambio al aproximar $f(1) = e^2$ obtenemos

$$P_5(1) = 1 + 2.1 + 2.1^2 + \frac{4}{3}.1^3 + \frac{2}{3}.1^4 + \frac{4}{15}.1^5 = \boxed{\frac{109}{15}} \approx 7,266...$$

Sabiendo que el valor exacto es $e^2 \approx 7,389...$ vemos que la aproximación tiene una mayor diferencia. $\square$

Para poder estimar estas diferencias y ver si la aproximación nos resulta útil, vamos a desarrollar una expresión para el error que se comete al usar el polinomio de Taylor para aproximar la función.

2. Expresión del resto

El error que se comete al aproximar f por su polinomio de Taylor de orden n en x_0 es $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ y lo llamaremos *resto de orden n*. El objetivo es encontrar una expresión fácil de usar. El valor exacto de R nos daría inmediatamente el valor exacto de f. En general no va a ser posible calcularlo y lo que queremos es encontrar una expresión fácil que permita acotarlo, para saber la magnitud del error cometido al usar la aproximación.

2.1. Acotación del error para orden 3

Veamos cómo acotar el error cuando consideramos el resto del polinomio de Taylor. Para simplificar la notación, vamos a analizar sólo el caso de orden 3, tomando $x_0 = 0$ y suponiendo que $x > x_0$.

La definición nos dice que $R_3(x) = f(x) - P_3(x)$. Por la forma en que armamos P_3 tenemos que $R_3(0) = f(0) - P_3(0) = 0$ porque pedimos que f y P_3 coincidan en $x_0 = 0$. De la misma manera, $R_3'(0) = 0$, $R_3''(0) = 0$ y $R_3'''(0) = 0$.

Por el teorema de Cauchy, tomando la función x^4 tenemos que

$$\frac{R_3(x)}{x^4} = \frac{R_3(x) - R_3(0)}{x^4 - 0^4} = \frac{R_3'(\xi)}{4.\xi^3}$$

en donde ξ es un punto intermedio, que está en el intervalo $(0; x)$. (En general ξ no se puede determinar fácilmente. Sólo sabemos que existe.)

Con esta misma idea, tomando la función $4x^3$ tenemos que

$$\frac{R_3'(\xi)}{4\xi^3} = \frac{R_3'(\xi) - R_3'(0)}{4\left(\xi^3 - 0^3\right)} = \frac{R_3''(\varsigma)}{4.3.\varsigma^2}$$

en donde ahora ς está en el intervalo $(0; \xi)$. Para simplificar esta expresión, podemos usar que el intervalo $(0; \xi)$ está incluido en el intervalo $(0; x)$ y decir directamente que ς está en el intervalo $(0; x)$.

Repetimos una vez más el razonamiento con la función $4.3.x^2$ y entonces

$$\frac{R_3''(\varsigma)}{4.3.\varsigma^2} = \frac{R_3''(\varsigma) - R_3''(0)}{4.3.\left(\varsigma^2 - 0^2\right)} = \frac{R_3'''(\eta)}{4.3.2.\eta}$$

en donde η está en el intervalo $(0; \varsigma)$, o para simplificar tomamos que η está en el intervalo $(0; x)$.

Repetimos una última vez más el procedimiento usando ahora la función $4.3.2.x$ y entonces

$$\frac{R_3'''(\eta)}{4.3.2.\eta} = \frac{R_3'''(\eta) - R_3'''(0)}{4.3.2.\left(\eta - 0\right)} = \frac{R_3^{(4)}(c)}{4.3.2.1}$$

en donde c está en el intervalo $(0; \eta)$, o para simplificar, tomamos que c está en el intervalo $(0; x)$.

Pero como P_3 es un polinomio de grado 3 a lo sumo, entonces al derivarlo cuatro veces se anula. Así que $P_3^{(4)}(x) = 0$ para todo x y por ello

$$R_3^{(4)}(c) = f_3^{(4)}(c) - P_3^{(4)}(c) = f_3^{(4)}(c).$$

Juntando estas fórmulas, queda que

$$\frac{R_3(x)}{x^4} = \frac{R^{(4)}(c)}{4.3.2.1} = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}$$

y despejando obtenemos que

$$R_3(x) = \frac{R^{(4)}(c)}{4.3.2.1} = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$$

con c en el intervalo $(0; x)$.
Veamos cómo usar esto en un ejemplo.

Ejemplo. Sea $f(x) = \ln(1+x)$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $x_0 = 0$ y encontrar la expresión del resto. Con esta estimación, acotar el error que se comete al aproximar $f(0{,}2)$ por $P_3(0{,}2)$.

Solución
Calculemos las derivadas

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x), \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{2.3}{(1+x)^4}. \end{aligned}$$

Así que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$. Entonces,

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \\ &= 0 + 1.x + \left(\frac{-1}{2}\right)x^2 + \frac{2}{6}x^3 \\ &= \boxed{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3}. \end{aligned}$$

Para acotar el error, tenemos que

$$|R_3(0{,}2)| = \left|\frac{0{,}2^4}{4!}f^{(4)}(c)\right| = \left|\frac{1}{15000}\left(-\frac{2.3}{(1+c)^4}\right)\right| = \frac{1}{2500\,(1+c)^4}$$

en donde c está en el intervalo $(0;0{,}2)$.
(Notamos que $\dfrac{1}{(1+x)^4}$ es estrictamente decreciente si x es positivo.) Podemos acotar usando que si $0 < c$ entonces $1+0 < 1+c$ así que $(1+0)^4 < (1+c)^4$ y $\dfrac{1}{(1+0)^4} > \dfrac{1}{(1+c)^4}$ de manera que

$$|R_3\,(0{,}2)| = \frac{1}{2500\,(1+c)^4} < \frac{1}{2500\,(1+0)^4} = \frac{1}{2500}$$

Con esto vemos que si aproximamos $f(0{,}2) = \ln(1{,}2)$ por

$$P_3\,(0{,}2) = 0{,}2 - \frac{1}{2}0{,}2^2 + \frac{1}{3}0{,}2^3 = \boxed{\frac{137}{750}} \approx 0{,}18267...$$

la diferencia es menor que $\boxed{\dfrac{1}{2500} = 0{,}0004}$. □

Generalizando el ejemplo anterior:

Si f es una función con $n+1$ derivadas continuas, el resto de su polinomio de Taylor de orden n en x_0 es

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}$$

con c en el intervalo $(x_0; x)$ si $x_0 < x$ y c en el intervalo $(x; x_0)$ si $x < x_0$.

Apliquemos esta fórmula a uno de los ejemplos anteriores.

Ejemplo. Encontremos la expresión del resto del polinomio de Taylor de orden 5 en $x_0 = 0$ de $f(x) = e^{2x}$ y acotemos su valor en $x = 0{,}1$ y $x = 1$.

Solución
Para el primer caso, tenemos que

$$R_5(0{,}1) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}0{,}1^6 = \frac{2^6 e^{2c}}{6!}0{,}1^6 = \frac{2^6 e^{2c}}{6!}\left(\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{e^{2c}}{11250000}$$

y como e^{2x} es estrictamente creciente, podemos acotar

$$e^{2c} < e^{2.0{,}1} = e^{0{,}2} < e^1 < 3.$$

En esta acotación, $e^{0{,}2}$ es mucho menor que 3, pero la acotamos de esta manera para que el resultado sea más fácil de manejar.

Entonces,

$$|R_5(0{,}1)| = \left|\frac{e^{2c}}{11250000}\right| < \frac{3}{11250000} = \boxed{\frac{1}{3750000}}.$$

Así que $|R_5(0{,}1)| < \dfrac{1}{3750000} = 0{,}000000267...$ por lo que demostramos que los valores de $f(0{,}1)$ y $P_5(0{,}1)$ son muy cercanos, como habíamos visto numéricamente antes.
Para el segundo caso, tenemos que

$$|R_5(1)| = \left|\frac{f^{(6)}(c)}{6!}1^6\right| = \frac{2^6 e^{2c}}{6!}1^6 = \frac{4}{45}e^{2c}$$

y como e^{2x} es estrictamente creciente, acotamos nuevamente usando que

$$e^{2c} < e^2 < 3^2 = 9$$

y entonces

$$|R_5(1)| = \left|\frac{4}{45}e^{2c}\right| < \frac{4}{45}3^2 = \frac{4}{5} \approx 0{,}8.$$

Así que tenemos una acotación del error grande y probablemente sea una mala idea usar $P_5(1)$ como una aproximación de $f(1)$. Esto es coherente con los valores que obtuvimos antes numéricamente para comparar. □

Veamos algunos ejemplos más.

Para acotar se necesita utilizar el máximo del módulo de la derivada $n+1$-ésima de f en el intervalo. Este valor a veces puede alcanzarse en los bordes del intervalo (si la derivada es creciente o decreciente) . Pero es importante recordar que no siempre es así.

Ejemplo. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $x_0 = 0$ y encontrar la expresión del resto. Con esta estimación, acotar el error que se comete al aproximar $f(\pi)$ por $P_3(\pi)$.

Solución
Calculemos las derivadas

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}(x),\\
f'(x) &= \cos(x),\\
f''(x) &= -\operatorname{sen}(x),\\
f'''(x) &= -\cos(x),\\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

Así que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \\ &= 0 + 1.x + \frac{0}{2}x^2 + \left(\frac{-1}{6}\right)x^3 \\ &= \boxed{x - \frac{1}{6}x^3}. \end{aligned}$$

Para acotar el error, tenemos que

$$R_3(\pi) = \frac{\pi^4}{4!}f^{(4)}(c) = \frac{\pi^4}{24}\operatorname{sen}(c)$$

en donde c está en el intervalo $(0;\pi)$. Como $\operatorname{sen}(x)$ no es creciente ni decreciente en este intervalo, hay que tener más cuidado.
Si cometemos el error de evaluar sólo en ambos extremos tenemos que $\operatorname{sen}(0) = 0$ y que $\operatorname{sen}(\pi) = 0$. Es importante recordar que no hay que evaluar en los extremos, sino acotar la función. Por suerte, $\operatorname{sen}(x)$ está acotada entre -1 y 1. Por ello,

$$|R_3(\pi)| = \frac{\pi^4}{24}|\operatorname{sen}(c)| \leq \frac{\pi^4}{24}\cdot 1 < \frac{4^4}{24} = \boxed{\frac{32}{3}}$$

en donde usamos la cota de $\pi < 4$ para obtener una expresión más sencilla. □

Con esto vemos que si aproximamos $f(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$ por

$$P_3(\pi) = \pi - \frac{1}{6}\pi^3 \approx -2{,}0261$$

la diferencia claramente no es 0. Es más, es una mala aproximación. La acotación del resto en este caso da $|R_3(\pi)| < \frac{32}{3} \approx 10{,}667...$, lo cual es coherente con la diferencia que obtuvimos.
En general, estas aproximaciones son útiles cuando se puede dar una cota "chica" del error.
Sólo para comparar, analicemos la aproximación en otro valor fácil de calcular, pero que esté más cercano a $x_0 = 0$.
Si utilizamos el mismo polinomio para estimar $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ queda

$$P_3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = \boxed{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi^3}{1296}} \approx 0{,}49967$$

y la acotación del error queda

$$|R_3(\pi)| = \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{24}|\operatorname{sen}(c)| \leq \frac{\pi^4}{31104}1 < \frac{4^4}{24} = \frac{2}{243}$$

en donde volvemos a usar que $\operatorname{sen}(x)$ está acotada entre -1 y 1. Así que

$$\boxed{|R_3(\pi)| < \frac{2}{243}} \approx 0{,}0082\ldots$$

Analicemos ahora un caso en el que $x < x_0$.

Ejemplo. Sea $f(x) = xe^{x-1}$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 1$ y encontrar la expresión del resto. Con esta estimación, acotar el error que se comete al aproximar $f(0{,}9)$ por $P_2(0{,}9)$.

Solución

Calculemos las derivadas

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{x-1}, \\ f'(x) &= e^{x-1} + xe^{x-1}, \\ f''(x) &= 2e^{x-1} + xe^{x-1}, \\ f'''(x) &= 3e^{x-1} + xe^{x-1}. \end{aligned}$$

Así que $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ y $f''(1) = 3$. Entonces,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 \\ &= \boxed{1 + 2\cdot(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Para acotar el error, tenemos que

$$R_2(0{,}9) = \frac{(0{,}9-1)^3}{6} f'''(c) = \frac{(-0{,}1)^3}{6}\left(3e^{c-1} + ce^{c-1}\right)$$

en donde c está en el intervalo $(0{,}9; 1)$. Tratemos de acotar

$$3e^{c-1} + ce^{c-1} = (3+c)e^{c-1}.$$

Por un lado, como $c < 1$ tenemos que $e^{c-1} < e^{1-1} = e^0 = 1$. Además $3 + c < 3 + 1 = 4$. Entonces,

$$3e^{c-1} + ce^{c-1} = (3+c)\,e^{c-1} < (3+1)e^{1-1} = 4.$$

Por ello,

$$|R_3(0{,}9)| = \frac{\left|-\frac{1}{10}\right|^3}{6}\left(3e^{c-1} + ce^{c-1}\right) < \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{6}4 = \frac{1}{1500}.$$

Con esto vemos que si aproximamos $f(0{,}9) = 0{,}9e^{0{,}9-1}$ por

$$P_2\,(0{,}9) = 1 + 2 \cdot (0{,}9 - 1) + \frac{3}{2}(0{,}9 - 1)^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{163}{200},$$

la acotación del resto da $\boxed{|R_2\,(0{,}9)| < \dfrac{1}{1500}}$. □

3. Problemas varios

A veces es útil encontrar una cota del error para todos los x en un intervalo cercano a x_0.

Ejercicio. Sea $f(x) = xe^{x-1}$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 1$ y dar la expresión del resto. Acotar el error que se comete al aproximar $f(x)$ por $P_2(x)$ cuando x está en el intervalo $(0{,}9; 1{,}1)$.

Solución
La función f y x_0 son iguales a los que utilizamos anteriromente. Por ello,

$$\boxed{P_2(x) = 1 + 2 \cdot (x - 1) + \frac{3}{2}(x - 1)^2}$$

y

$$|R_3\,(x)| = \frac{|x-1|^3}{6}\left(3e^{c-1} + ce^{c-1}\right) = \frac{|x-1|^3}{6}\,(3 + c)\,e^{c-1}$$

con x en el intervalo $(0{,}9; 1{,}1)$ y c en el intervalo $(x; 1)$ ó $(1; x)$, dependiendo de que $x < 1$ o $x > 1$. En todos los casos, para cualquier valor de x, tenemos que c está en el intervalo $(0{,}9; 1{,}1)$.
Para acotar, tenemos que por un lado si x está en el intervalo $(0{,}9; 1{,}1)$ entonces

$$|x - 1| < \frac{1}{10}$$

y entonces $|x-1|^3 < \frac{1}{10^3}$. Por otro lado, tenemos que

$$3 + c < 3 + 1{,}1 < 4{,}1 = \frac{41}{10}$$

y que como e^x es creciente

$$e^{c-1} < e^{1{,}1-1} < e^{0{,}1} < e^1 = e < 3.$$

En esta última parte, $e^{0,1}$ es mucho más chico que 3, pero lo acotamos por 3 para simplificar la expresión. Entonces,

$$|R_3(x)| = \frac{|x-1|^3}{6}(3+c)\,e^{c-1} < \frac{\left(\frac{1}{10^3}\right)}{6}\frac{41}{10}\cdot 3 = \boxed{\frac{41}{20000}}.$$

□

En algunos casos, puede ser útil simplificar aún más la expresión del error, por ejemplo tomando

$$|R_3(x)| = \frac{41}{20000} < \frac{50}{20000} = \frac{1}{400}.$$

Con cada acotación de la cota perdemos un poco de información sobre la precisión del cálculo, pero a cambio ganamos en simplicidad. Si la acotación que utilizamos es muy burda podemos perder de vista la calidad de la aproximación.

Vimos en algunos ejemplos que no podíamos acotar el error por un número "chico". En la mayoría de los casos para obtener aproximaciones más precisas alcanza con aumentar el orden del polinomio de Taylor utilizado.

Ejercicio. Sea $f(x) = e^{2x}$. Encontrar un n tal que al aproximar $f(1) = e^2$ por el polinomio de Taylor de f de orden n en $x_0 = 0$ el error obtenido sea menor que $\frac{1}{1000}$.

Solución

Primero, recordemos que $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 2.2e^{2x}$, ..., $f^{(5)}(x) = 2^5e^{2x}$. En este caso, es posible encontrar una fórmula general para la derivada n-ésima de f, que es

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}.$$

De la misma manera, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 2.2$, ..., $f^{(5)}(0) = 2^5$ y obtenemos que

$$f^{(n)}(0) = 2^n.$$

Entonces,

$$P_n(x) = 1 + 2x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{8}{6}x^3 + \cdots + \frac{2^n}{n!}x^n$$

y la expresión del resto es

$$R_n(x) = \frac{2^{n+1}e^{2c}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

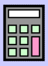
con c en el intervalo $(0,x)$ cuando $x > 0$. En particular tenemos que

$$R_n(1) = \frac{2^{n+1}e^{2c}}{(n+1)!}1^{n+1} < \frac{2^{n+1}e^{2.1}}{(n+1)!}1^{n+1} < \frac{2^{n+1}3^2}{(n+1)!} = \frac{18.2^n}{(n+1)!}.$$

Evaluando en distintos valores de n, vemos que si $n = 10$ entonces

$$R_{10}(1) < \frac{2^{10+1}3^2}{(10+1)!} = \frac{8}{17325} \approx 0{,}00046... < \frac{1}{1000}$$

por lo que $\boxed{n = 10}$ es el número buscado. $\square$



Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Polinomio de Taylor, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.