Práctica 6 - Parte 1

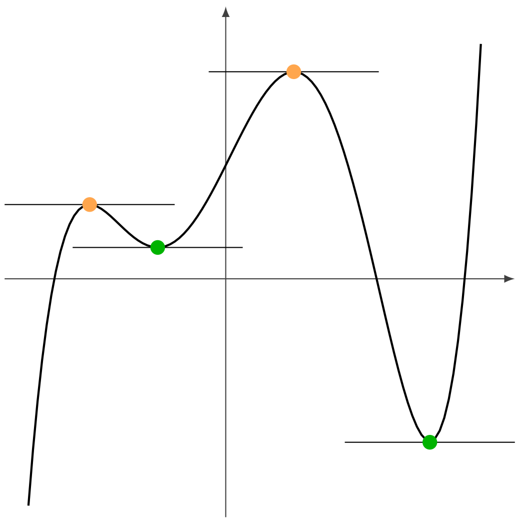
Teorema del valor medio

El teorema del valor medio para derivadas (o teorema de Lagrange) es un resultado central en la teoría de funciones reales. Este teorema relaciona valores de una función con los de su derivada y pone de manifiesto la relación entre el signo de la derivada de una función y el comportamiento de la función con respecto a crecimiento y decrecimiento.

1. Máximos y mínimos de funciones

1.1. Extremos locales

Vamos a ver ahora cómo, conociendo la derivada de una función, podemos obtener información sobre las posibles ubicaciones de los máximos y mínimos de la función. Comencemos observando el siguiente gráfico:



Cada uno de los puntos marcados en naranja corresponde a un valor x_0 tal que $f(x_0)$ es el mayor de los valores que f toma "cerca" de x_0; es decir, si calculamos $f(x)$ para los x "cercanos" a x_0, el máximo valor que obtenemos es $f(x_0)$. Análogamente, cada punto marcado en verde corresponde a un valor x_0 tal que $f(x_0)$ es el menor de los valores que f toma entre x_0 y sus "vecinos cercanos". Esto da lugar a las nociones de máximo local y mínimo local de una función.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f alcanza un *máximo local* (o *relativo*) en $x_0 \in A$ si, para algún $\delta > 0$, vale $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Se dice que f alcanza un *mínimo local* (o *relativo*) en $x_0 \in A$ si, para algún $\delta > 0$, vale $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

En ambos casos, se dice que f alcanza un *extremo local* (o *relativo*) en x_0.

La condición $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ para $\delta > 0$ que aparece en la definición anterior significa que x está en el dominio de f y "cerca" de x_0.

Observando el gráfico de arriba, vemos que en cada punto en el que f alcanza un extremo relativo, la recta tangente a su gráfico es horizontal. Esto es lo que afirma el siguiente teorema:

Teorema de Fermat. Sea f una función definida en $(a; b)$ y tal que f alcanza un extremo local en $x_0 \in (a; b)$. Si f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Demostración. Supongamos que f alcanza un máximo local en x_0 (el caso de un mínimo local es análogo). Entonces, para algún $\delta > 0$, tenemos que vale $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Como f es derivable en x_0, existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Esto significa que también existen los límites laterales y valen:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

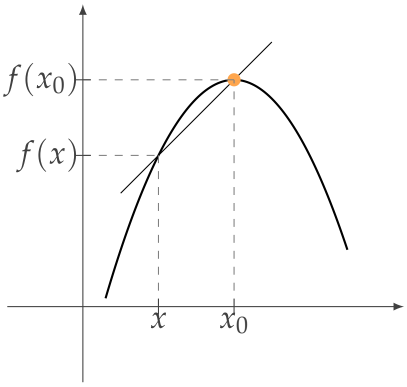
Analicemos entonces el signo de estos límites laterales, estudiando el signo del cociente incremental en cada caso. Recordemos que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x cerca de x_0.

Para $x \to x_0^-$, vale que $x < x_0$; entonces,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

pues $f(x) - f(x_0) \leq 0$ y $x - x_0 < 0$. Luego,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

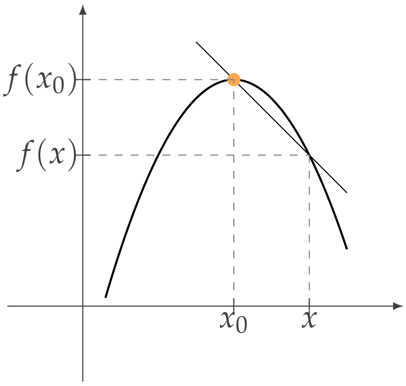


Para $x \to x_0^+$, vale que $x > x_0$; entonces,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

pues $f(x) - f(x_0) \leq 0$ y $x - x_0 > 0$. Luego,

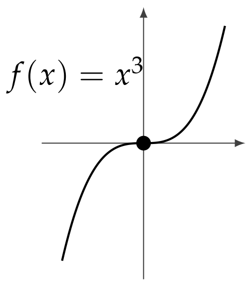
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$



Del análisis de los límites laterales, se deduce que $f'(x_0) \geq 0$ y $f'(x_0) \leq 0$. En consecuencia, debe ser $f'(x_0) = 0$. □

⚠ La condición $f'(x_0) = 0$ *no alcanza* para asegurar que f tenga un extremo local en x_0.

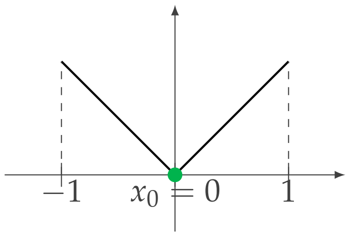
Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, tenemos que $f'(x) = 3x^2$, que se anula en $x_0 = 0$. Sin embargo, como podemos ver en el gráfico de f, la función no tiene un máximo ni un mínimo local en $x_0 = 0$:



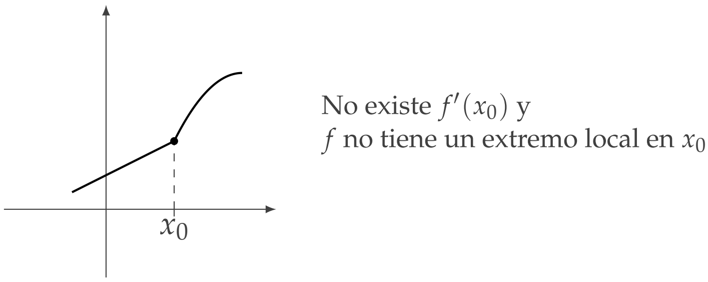
Por otro lado, el teorema de Fermat sólo habla de extremos locales en puntos donde la función es derivable.

> ⚠ Una función f puede tener extremos locales en puntos en los cuales no es derivable.

Esto ocurre, por ejemplo, para la función $f : (-1;1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$:

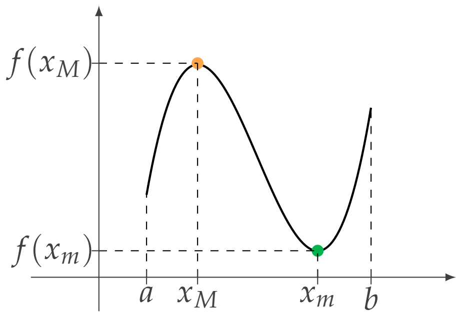


Esta función alcanza un mínimo local en $x_0 = 0$; sin embargo, no es derivable en $x_0 = 0$. Nuevamente, debemos observar que la condición de que f no sea derivable en x_0 *no alcanza* para asegurar que f tenga un extremo local en x_0, como puede verse en el siguiente gráfico:



1.2. Extremos globales

Como vimos en la sección sobre extremos locales, una función puede tener varios máximos o mínimos locales, es decir, puntos donde el valor que toma la función es mayor o igual (o bien, menor o igual) que en todos los puntos ”cercanos”.
Nos preguntamos ahora por máximos o mínimos *globales* para una función, es decir, puntos donde el valor que toma la función es mayor o igual (o bien, menor o igual) que en todos los de su dominio. Por ejemplo, la función $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ del gráfico



alcanza un máximo global en x_M y un mínimo global en x_m.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f alcanza un *máximo global* (o *absoluto*) en $x_M \in A$ si vale $f(x_M) \geq f(x)$ para todo $x \in A$, y que f alcanza un *mínimo global* (o *absoluto*) en $x_m \in A$ si vale $f(x_m) \leq f(x)$ para todo $x \in A$.

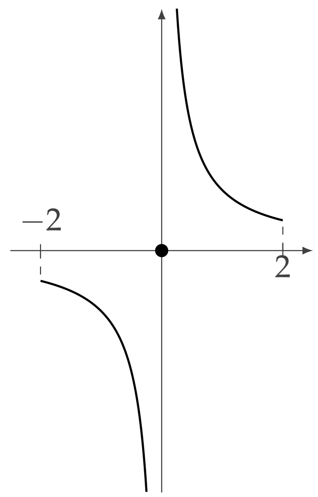
En ambos casos, se dice que f tiene un *extremo global* (o *absoluto*).

No toda función tiene extremos absolutos. Por ejemplo:

La función $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no tiene máximo ni mínimo absolutos, ya que "cerca" de 0 toma valores arbitrariamente grandes en valor absoluto.



En este caso, el problema radica en que la función f tiene una discontinuidad en $x = 0$ y "cerca" de 0 no está acotada.

Las funciones *continuas en intervalos cerrados* poseen una propiedad que, como veremos, asegura que alcanzan su valor máximo y su valor mínimo en el intervalo.

Sea $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada en $[a; b]$; es decir, existen m y $M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a; b]$.

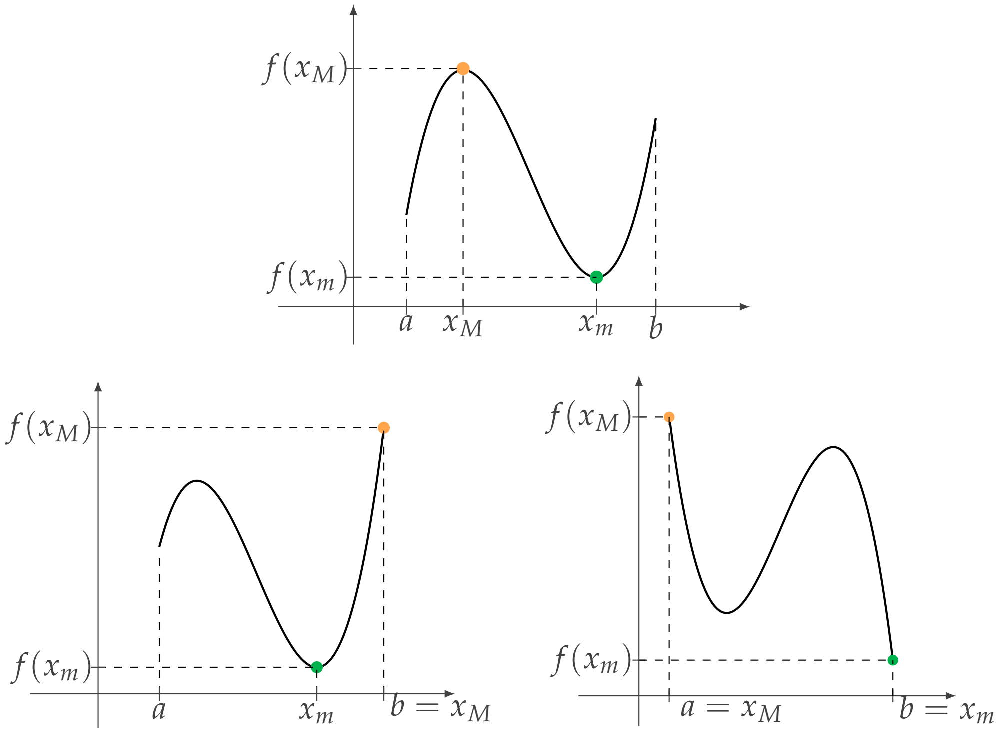
En la entrada "Acotación de funciones continuas en intervalos cerrados" se puede encontrar una demostración de esta propiedad.

Este resultado nos dice que la imagen de una función continua $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo cerrado es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$; por lo tanto, tiene supremo e ínfimo. El teorema que enunciamos a continuación establece que el supremo y el ínfimo de $\text{Im}(f)$, en efecto, se alcanzan, es decir, son máximo y mínimo respectivamente.

Teorema (Existencia de extremos absolutos para funciones continuas en intervalos cerrados). Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f alcanza su valor máximo y su valor mínimo absolutos en $[a;b]$; es decir, existen x_M y x_m en $[a;b]$ tales que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ para todo $x \in [a;b]$.

En la entrada "Extremos absolutos de funciones continuas en intervalos cerrados" se puede ver una demostración de este teorema.

Los máximos y mínimos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $[a;b]$ se encuentran entre sus máximos y mínimos relativos, ya sea en el intervalo abierto $(a;b)$ o bien en los extremos, a o b, del intervalo cerrado, como se muestra en los siguientes gráficos:



Entonces, para determinar los valores x_M y x_m donde se alcanzan los extremos absolutos, podemos valernos de lo visto en la sección anterior.

Ejemplo. Sea $f : [1;3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 12x + 15$. Hallar el valor máximo M y el valor mínimo m que toma f y puntos x_M y $x_m \in [1;3]$ en los que se alcanzan.

Como f es una función continua definida en un intervalo cerrado, el teorema anterior nos asegura que f alcanza un valor máximo M y un valor mínimo m en ciertos puntos del intervalo $[1;3]$. Por otro lado, como f es derivable en todo $x \in (1;3)$, el teorema de Fermat nos

dice que si alguno de estos valores máximo o mínimo se alcanza en un punto del intervalo abierto $(1;3)$, entonces la derivada de f se anulará en dicho punto.
Así, los "candidatos" a puntos donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos son:

- los $x \in (1;3)$ tales que $f'(x) = 0$;
- los extremos del intervalo donde está definida f, que son 1 y 3.

Dado que $f'(x) = 3x^2 - 12$ y que

$$3x^2 - 12 = 0 \iff x = 2 \text{ o } x = -2,$$

el único $x \in (1;3)$ tal que $f'(x) = 0$ es $x = 2$.
Resumiendo, tenemos tres posibles valores,

$$1,\ 2 \text{ y } 3,$$

entre los cuales f, seguro, alcanza su valor máximo y su valor mínimo. Para determinar dónde ocurre esto efectivamente, basta ver en cuál de los tres f toma el mayor valor y en cuál toma el menor valor. Evaluamos la función y obtenemos:

$$f(1) = 4, \quad f(2) = -1, \quad f(3) = 6.$$

Comparando estos valores, concluimos que:

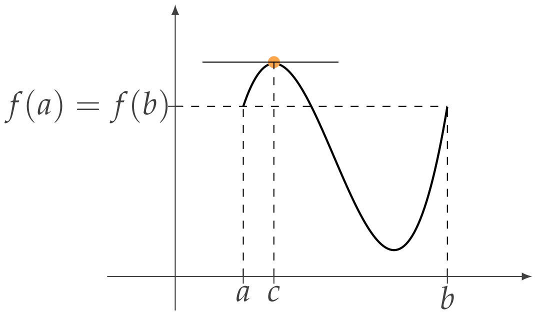
El máximo absoluto de f se alcanza en $x_M = 3$ (el extremo derecho del intervalo $[1;3]$) y vale $M = 6$, y el mínimo absoluto de f se alcanza en $x_m = 2$ (que está en el interior del intervalo $[1;3]$) y vale $m = -1$.

2. Teorema del valor medio

Antes de presentar el teorema de Lagrange, mostraremos un caso particular que nos servirá también para probar el resultado general.

Teorema de Rolle. Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a;b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a;b)$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un valor $c \in (a;b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Geométricamente, el teorema de Rolle dice que si f toma el mismo valor en los dos extremos del intervalo $[a;b]$, entonces habrá algún punto c entre a y b en el cual la recta tangente al gráfico de f es horizontal.



Como puede verse en el gráfico, la idea es que el punto c corresponderá a un máximo o a un mínimo de la función f en el intervalo $(a;b)$. Para garantizar la existencia de este punto c, nos basaremos en el teorema que hemos visto sobre existencia de extremos absolutos para funciones continuas en intervalos cerrados.

Demostración del teorema de Rolle. Como $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ es continua y está definida en un intervalo cerrado $[a;b]$, alcanza máximo y mínimo absolutos en $[a;b]$; es decir, existen x_M y x_m en $[a;b]$ tales que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ para todo $x \in [a;b]$.
Si x_m no es igual a a ni a b (es decir, el mínimo se alcanza en el interior del intervalo), como f alcanza un mínimo local en $x_m \in (a;b)$ y f es derivable en x_m, por el teorema de Fermat, $f'(x_m) = 0$. Entonces $c = x_m$ cumple que $c \in (a;b)$ y $f'(c) = 0$. De la misma manera, si $x_M \in (a;b)$ (es decir, el máximo se alcanza en el interior del intervalo), tomando $c = x_M$ se cumple lo pedido.
Finalmente, si x_m y x_M están ambos en los bordes del intervalo $[a;b]$, el valor máximo y el valor mínimo que toma f coinciden (son ambos iguales a $f(a) = f(b)$). En consecuencia, f es constante en $[a;b]$. Entonces $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a;b)$ y el valor c del enunciado puede ser cualquiera del intervalo $(a;b)$. $\square$

⚠ Al aplicar el teorema, es fundamental verificar que se cumplen *todas* las hipótesis, ya que si alguna de ellas no vale, la conclusión puede no valer tampoco.

Veámoslo en algunos ejemplos:

1. Sea $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

   Esta función es continua en el intervalo $[-1;1]$ y cumple que $f(-1) = f(1) = 1$. Por otro lado,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y f no es derivable en $x = 0$. Observemos que *no existe* $c \in (-1;1)$ *tal que* $f'(c) = 0$ (no vale la conclusión del teorema de Rolle).

En este caso, el problema es que f no es derivable en *todo* el intervalo $(-1;1)$.

2. Sea $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

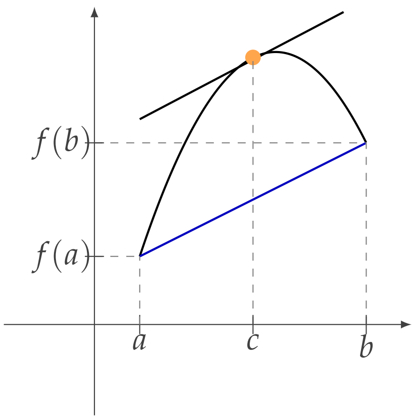
   Esta función cumple que $f(0) = f(1) = 1$. Además, f es derivable en el intervalo abierto $(0;1)$ y vale $f'(x) = 1$ para todo $x \in (0;1)$. Observemos que *no existe* $c \in (0;1)$ *tal que* $f'(c) = 0$ (no vale la conclusión del teorema de Rolle).

   En este caso, lo que ocurre es que f *no es continua en* $x = 0$, es decir, no se cumple la hipótesis de continuidad en *todo* el intervalo $[0;1]$ requerida en el teorema.

El teorema de Rolle es un caso particular del resultado principal que presentamos a continuación.

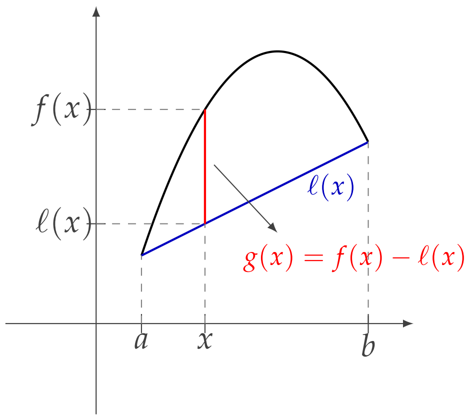
Teorema del valor medio para derivadas (Lagrange). Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a;b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a;b)$. Entonces existe un valor $c \in (a;b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

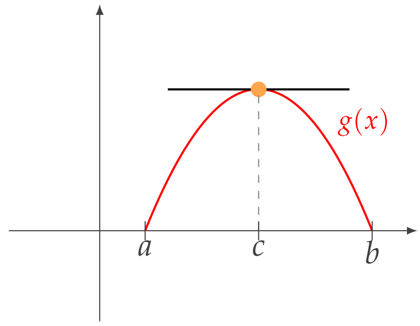
Geométricamente, el teorema del valor medio dice que existirá algún punto c entre a y b donde la pendiente de la recta tangente al gráfico de f, es decir $f'(c)$, es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, es decir, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Demostración del teorema del valor medio. La estrategia de la demostración consiste en reducir el problema a un caso en el que se puede aplicar el teorema de Rolle. Construiremos una función auxiliar, asociada al problema, que toma el mismo valor en los dos extremos a y b del intervalo. Para esto, consideramos, para cada x, la diferencia $g(x) = f(x) - \ell(x)$ entre el valor de f y el valor de la función lineal ℓ cuyo gráfico es la recta que pasa por

$(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Como los valores de f y ℓ coinciden tanto en a como en b, resulta que $g(a) = g(b) = 0$.





La función lineal $\ell : [a, b] \to \mathbb{R}$ está dada por la fórmula

$$\ell(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

es continua y derivable. Por las hipótesis sobre f, la función $g(x) = f(x) - \ell(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a; b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a; b)$. Además, como ya vimos, $g(a) = g(b)$. Entonces, estamos en condiciones de aplicar el teorema de Rolle a la función g, que nos dice que existe un valor $c \in (a; b)$ tal que $g'(c) = 0$. La derivada de g es

$$g'(x) = f'(x) - \ell'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

con lo cual, la condición $g'(c) = 0$ se traduce en que $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ o, equivalentemente,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

⚠ Al igual que en el caso del teorema de Rolle, para aplicar el teorema del valor medio es necesario verificar que se cumplan *todas* las hipótesis. Por otra parte, observamos que estos teoremas sólo garantizan la *existencia* de un valor intermedio c que cumple la propiedad, pero no nos dicen cómo encontrarlo (de hecho puede haber varios valores intermedios que cumplan la conclusión).

En general, la utilidad de estos resultados no estará en encontrar el valor intermedio c sino en obtener información sobre la función a partir de información sobre su derivada en el intervalo considerado. Veamos un ejemplo de esto:

Ejemplo. Probar que $\dfrac{\ln(1+t)}{t} < 1$ para todo $t > 0$.

Dado $t > 0$, consideremos la función $f : [0;t] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(1+x)$. Esta función es continua en el intervalo $[0;t]$ y derivable en el intervalo $(0;t)$. Entonces, por el teorema del valor medio, existe $c \in (0;t)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{\ln(1+t) - \overbrace{\ln(1)}^{=0}}{t} = \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, para este valor $c \in (0;t)$, tenemos que

$$f'(c) = \frac{1}{1+c} < 1$$

porque, siendo $c > 0$, resulta que $1 + c > 1$. Entonces,

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = f'(c) < 1.$$

Deducimos de esta manera que la desigualdad $\dfrac{\ln(1+t)}{t} < 1$ vale para cualquier $t > 0$.

Para terminar, enunciamos una versión generalizada del teorema del valor medio para el caso de dos funciones. En la entrada "Teorema de Cauchy" puede verse una demostración de este resultado.

Teorema de Cauchy. Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a;b]$ y derivables en el intervalo abierto $(a;b)$. Entonces existe un valor $c \in (a;b)$ tal que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Si, además, $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a;b)$, entonces:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. Consecuencias del teorema del valor medio

Sabemos que si f es una función constante en un intervalo, su derivada vale 0. Nos preguntamos si es cierto, recíprocamente, que si la derivada de un función es 0 en un intervalo, entonces la función es constante. El teorema del valor medio nos da la siguiente respuesta afirmativa:

Sea $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a; b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a; b)$. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a; b)$, entonces f es constante en $[a; b]$; es decir, existe un valor $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$ para todo $x \in [a; b]$.

Demostración. Dado $x \in [a; b]$, $x \neq a$, la función f considerada en el intervalo $[a; x]$ cumple las hipótesis del teorema de Lagrange. Luego, existe un valor $c \in (a; x)$ (que depende de x) tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Como $f'(c) = 0$, la igualdad anterior implica que $f(x) - f(a) = 0$, es decir, que $f(x) = f(a)$. Llamamos $k = f(a)$ y, entonces, resulta que $f(x) = k$ para todo $x \in [a; b]$. □

De esta propiedad se deduce que:

Si dos funciones f y g continuas en $[a; b]$ y derivables en $(a; b)$ cumplen que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a; b)$, entonces f y g difieren en una constante; es decir, existe un valor $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo $x \in [a; b]$.

En efecto, si $h : [a; b] \to \mathbb{R}$ es la función definida por $h(x) = f(x) - g(x)$, por las hipótesis sobre f y g, tenemos que h es continua en $[a; b]$ y derivable en $(a; b)$; además, vale que $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para todo $x \in (a; b)$. Entonces, por la propiedad anterior, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = k$ para todo $x \in [a; b]$; es decir, $f(x) - g(x) = k$ para todo $x \in [a; b]$.

Ejercicio 1. Probar que $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución

Sean $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ y $g(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Para probar la validez de la identidad del enunciado, la estrategia será ver, en primer lugar, que f y g difieren en una constante y, posteriormente, que dicha constante debe ser 0, con lo cual $f(x) = g(x)$ para todo x.

El primer paso se obtiene de la propiedad que acabamos de enunciar: tenemos que f y g son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ y vale que

$$f'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x) \;\text{ y }\; g'(x) = -\frac{1}{2}(-\operatorname{sen}(2x)).2 = \operatorname{sen}(2x),$$

o sea, $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$; luego, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + k.$$

Para determinar el valor de k, evaluamos esta identidad en un valor de x, por ejemplo, $x = 0$. Se obtiene:

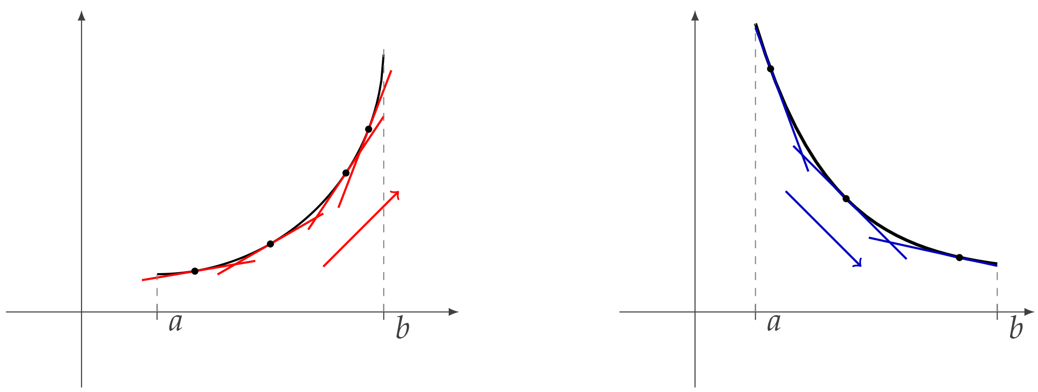
$$f(0) = g(0) + k \iff \operatorname{sen}^2(0) = \frac{1-\cos(2.0)}{2} + k \iff 0 = k$$

En consecuencia, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir,

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Más generalmente, el teorema del valor medio permite relacionar el comportamiento de una función en cuanto a crecimiento y decrecimiento con el signo de los valores que toma su derivada.



Intuitivamente, como podemos observar en los gráficos precedentes, si las rectas tangentes al gráfico de una función en todos los puntos del intervalo $(a;b)$ tienen pendiente positiva, entonces la función es creciente en $[a;b]$ y, si las rectas tangentes en todos los puntos de $(a;b)$ tienen pendiente negativa, la función es decreciente en $[a;b]$.

Crecimiento y decrecimiento. Sea $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a; b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a; b)$.

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a; b)$, f es estrictamente creciente en $[a; b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a; b)$, f es estrictamente decreciente en $[a; b]$.

Demostración. Supongamos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a; b)$ y consideremos dos valores cualesquiera $x_1 < x_2$ en $[a; b]$. La función f cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[x_1; x_2]$. Luego, existe $c \in (x_1; x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$ (puesto que $x_1 < x_2$), de la igualdad anterior deducimos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$; es decir, $f(x_1) < f(x_2)$. Concluimos que f es estrictamente creciente en $[a; b]$.
De manera completamente similar, si suponemos que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a; b)$, se prueba que para cualesquiera $x_1 < x_2$ en $[a; b]$, resulta $f(x_1) > f(x_2)$. $\square$

Ejercicio 2. Sea $f(x) = 2x + \cos(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Analizar el comportamiento de f en el siguiente sentido:

- Decidir si es estrictamente monótona (creciente o decreciente).
- Hallar la imagen de f.
- Determinar cuántas veces el gráfico de f corta al eje x.

Solución
Dado que f es continua y derivable, para ver si es estrictamente monótona, por la propiedad anterior, podemos estudiar el signo de la derivada $f'(x) = 2 - \text{sen}(x)$. Como $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f'(x) = 2 - \text{sen}(x) \geq 2 - 1 > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, en cualquier intervalo, f es estrictamente creciente. Luego,

$$\boxed{f \text{ es estrictamente creciente en todo } \mathbb{R}.}$$

Para hallar la imagen de f, veamos si está acotada o no. Para hacer esto, calculamos los límites en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x + \underbrace{\cos(x)}_{\text{acotada}}) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x + \underbrace{\cos(x)}_{\text{acotada}}) = +\infty$$

Esto nos dice que la imagen de f no está acotada superior ni inferiormente. Como f es continua en todo $\mathbb{R}$, el teorema de Bolzano implica que f toma todos los valores reales, es decir, $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}}$.

Finalmente, analicemos cuántas veces corta el gráfico de f al eje x; es decir, cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$.

En primer lugar, observemos que, como $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, en particular $0 \in \mathrm{Im}(f)$, es decir, existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ (la ecuación tiene alguna solución). Por otra parte, *como f es estrictamente creciente, la ecuación $f(x) = 0$ no puede tener más de una solución* (de lo contrario, habría dos valores $x_1 < x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, contradiciendo la monotonía).

Concluimos entonces que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución, es decir:

$$\boxed{\text{El gráfico de } f \text{ corta al eje } x \text{ exactamente una vez.}}$$

□

Ejercicio 3. Probar que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución

En primer lugar, observemos que

$$e^x \geq 1 + x \iff e^x - 1 - x \geq 0.$$

Así, podemos reinterpretar el problema en términos de la no negatividad de la función

$$f(x) = e^x - 1 - x.$$

El dominio de esta función es $\mathbb{R}$. Además, f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Para probar que f es no negativa en todo $\mathbb{R}$, estudiaremos su crecimiento y decrecimiento. Teniendo en cuenta las consecuencias del teorema del valor medio, consideramos

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Observamos que

$$f'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

Para $x > 0$, se tiene que $e^x > 1$, con lo cual $f'(x) > 0$. Entonces f es estrictamente creciente en $[0; +\infty)$ y, por lo tanto,

$$f(x) > f(0) \quad \text{para todo } x > 0.$$

Para $x < 0$, se tiene que $e^x < 1$, con lo cual $f'(x) < 0$. Entonces, f es estrictamente decreciente en $(-\infty; 0]$ y, por lo tanto,

$$f(x) > f(0) \quad \text{para todo } x < 0.$$

Resumiendo, $f(x) > f(0)$ para todo $x \neq 0$. Si consideramos también $x = 0$, podemos afirmar que

$$f(x) \geq f(0) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como $f(0) = 0$, la desigualdad anterior nos dice que

$$e^x - 1 - x \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

o, equivalentemente, que

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

□

Ejercicio 4. Sea $f(x) = x^4 + 2x^3$. Hallar los intervalos donde crece, los intervalos donde decrece y los extremos locales de f.

Solución

Como f es derivable en todo $\mathbb{R}$, por la consecuencia del teorema del valor medio enunciada anteriormente, para hallar intervalos donde crece y donde decrece, basta determinar intervalos de positividad y negatividad de f'. Por otra parte, por el teorema de Fermat, los extremos locales de f se hallan en valores donde $f'(x) = 0$.

Tenemos que

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 4x^2(x + \frac{3}{2})$$

que es continua en todo $\mathbb{R}$. Entonces, como consecuencia del teorema de Bolzano, los ceros de f' parten a $\mathbb{R}$ en intervalos en los que f' tiene signo constante. Como

$$f'(x) = 0 \iff 4x^2(x + \frac{3}{2}) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = -\frac{3}{2}$$

los intervalos a analizar son $(-\infty; -\frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{2}; 0)$ y $(0; +\infty)$. Dado que f' tiene signo constante en cada uno de estos intervalos, para determinar dicho signo, basta evaluarla en un valor particular de cada intervalo.

- En $(-\infty; -\frac{3}{2})$, elegimos $x = -2$. Como $f'(-2) = -8 < 0$, resulta que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty; -\frac{3}{2})$ y, en consecuencia, f es estrictamente decreciente en $(-\infty; -\frac{3}{2}]$.
- En $(-\frac{3}{2}; 0)$, elegimos $x = -1$. Como $f'(-1) = 2 > 0$, resulta que $f'(x) > 0$ para todo $x \in [-\frac{3}{2}; 0]$ y, en consecuencia, f es estrictamente creciente en $[-\frac{3}{2}; 0]$.
- En $(0; +\infty)$, elegimos $x = 1$. Como $f'(1) = 10 > 0$, resulta que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0; +\infty)$ y, en consecuencia, f es estrictamente creciente en $[0; +\infty)$.

Utilizaremos ahora la información sobre el crecimiento y decrecimiento de f para determinar, en cada uno de los ceros de f', si f tiene un extremo local o no.

- En $x = -\frac{3}{2}$:

  Como f es decreciente en $(-\infty; -\frac{3}{2}]$, tenemos que $f(x) \geq f(-\frac{3}{2})$ para $x \leq -\frac{3}{2}$ y, como f es creciente en $[-\frac{3}{2}; 0]$, vale que $f(-\frac{3}{2}) \leq f(x)$ para $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$. Entonces, para todo x "cerca" de $-\frac{3}{2}$ se tiene que $f(-\frac{3}{2}) \leq f(x)$; luego, f alcanza un mínimo local en $x = -\frac{3}{2}$.
- En $x = 0$:

  Como f es creciente en $[-\frac{3}{2}; 0]$ y en $[0; +\infty)$, cerca de $x = 0$, f toma valores menores que $f(0)$ (a la izquierda de 0) y valores mayores que $f(0)$ (a la derecha de 0). Entonces f *no* tiene un extremo local en $x = 0$.

Resumimos nuestro análisis en la siguiente tabla:

x	$(-\infty; -\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2}; 0)$	0	$(0; +\infty)$
	$f'(-2) < 0$		$f'(-1) > 0$		$f'(1) > 0$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$

Observamos que, dado que f es estrictamente creciente en $[-\frac{3}{2}; 0]$ y en $[0; +\infty)$, entonces es estrictamente creciente en $[-\frac{3}{2}; +\infty)$, la unión de estos dos intervalos.

Concluimos que:

$\boxed{f \text{ decrece en } (-\infty; -\frac{3}{2}] \text{ y crece en } [-\frac{3}{2}; +\infty) \text{, alcanzando un mínimo local en } x = -\frac{3}{2}}$ $\square$

ANEXO

A. Extremos absolutos

Demostramos aquí dos propiedades fundamentales de las funciones continuas en intervalos cerrados que garantizan la existencia de extremos absolutos.

A.1. Acotación de funciones continuas en intervalos cerrados

Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada en $[a;b]$; es decir, existen m y $M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a;b]$.

Demostración. La idea de la demostración es suponer que f no está acotada en $[a;b]$ y llegar a una contradicción.
La observación fundamental es que, si f no está acotada en $[a;b]$ y c es un punto entre a y b, entonces f tampoco está acotada en alguno de los dos intervalos $[a;c]$ o $[c;b]$ en los que c divide a $[a;b]$. En efecto, supongamos que f está acotada superiormente en $[a;c]$ y en $[c;b]$; es decir, existen M_1 y M_2 tales que

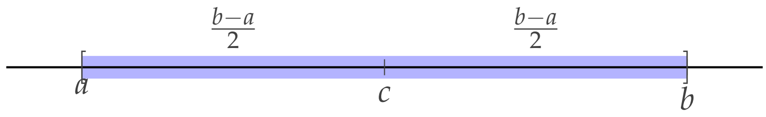
$$f(x) \leq M_1 \text{ para todo } x \in [a;c] \quad \text{y} \quad f(x) \leq M_2 \text{ para todo } x \in [c;b].$$

Entonces, si M es el mayor entre M_1 y M_2, resulta que

$$f(x) \leq M \text{ para todo } x \in [a;b]$$

con lo que M es una cota superior para f en $[a;b]$. Un razonamiento análogo puede hacerse para cotas inferiores.

Supongamos entonces que f no está acotada en $[a;b]$.
Vamos a subdividir el intervalo $[a;b]$ sucesivamente, de manera de construir una sucesión de intervalos, cada vez más pequeños, en los que f no está acotada.
Consideremos el punto medio del intervalo $[a;b]$, que lo divide en dos intervalos de longitud $\dfrac{b-a}{2}$:

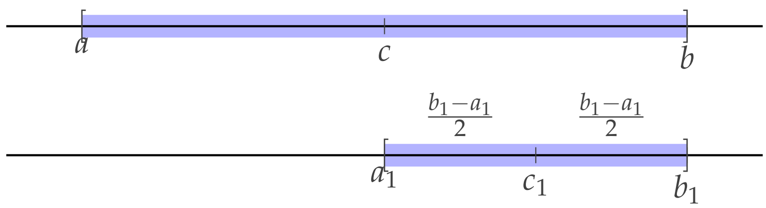


Por la observación anterior, f no está acotada en alguno de los dos intervalos resultantes, llamémoslo $[a_1; b_1]$. Tenemos que:

$$f \text{ no está acotada en } [a_1; b_1] \subset [a; b]$$

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

Repetimos el mismo procedimiento con el intervalo $[a_1; b_1]$; considerando su punto medio, lo dividimos en dos intervalos, cada uno de longitud $\dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{b-a}{4}$:

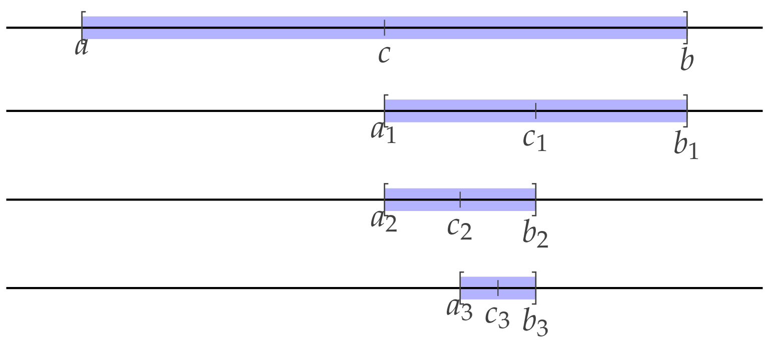


Como f no está acotada en $[a_1; b_1]$, tampoco lo está en alguno de los dos intervalos en los que queda dividido; llamémoslo $[a_2; b_2]$. Entonces

$$f \text{ no está acotada en } [a_2; b_2] \subset [a_1; b_1] \subset [a; b]$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{4}$$

Si continuamos repitiendo el proceso,



$$\cdots$$

obtenemos una sucesión de intervalos, $[a_n; b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tales que

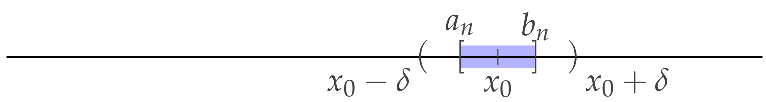
$$f \text{ no está acotada en } [a_n; b_n] \subset \cdots \subset [a_2; b_2] \subset [a_1; b_1] \subset [a; b]$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

Los extremos izquierdos de estos intervalos forman una sucesión creciente de números reales $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \ldots$ acotada superiormente por b; luego, convergente. Sea $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, que pertenece al intervalo $[a;b]$. Observamos que los extremos derechos de los intervalos forman una sucesión decreciente $b \geq b_1 \geq \cdots \geq b_n \geq \ldots$ y acotada inferiormente por a; luego, también converge y, como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n$, resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$.
Por la continuidad de f en x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para todo x con $|x - x_0| < \delta$ vale $|f(x) - f(x_0)| < 1$; es decir,

$$1 - f(x_0) < f(x) < 1 + f(x_0) \quad \text{para } x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

(si $x_0 = a$ o $x_0 = b$, hay que considerar $x \in [a; a+\delta)$ o $x \in (b - \delta; b]$, respectivamente).
Luego, f es acotada en $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.
Volvamos a considerar ahora los intervalos $[a_n; b_n]$, donde sabemos que f no está acotada. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $a_n \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ y $b_n \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$:



Así, $[a_n; b_n] \subset (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, con lo cual f no estaría acotada en $[a_n; b_n]$, contradiciendo la construcción de $[a_n; b_n]$. La contradicción viene de suponer que f no está acotada en $[a;b]$. Luego, f está acotada en $[a;b]$. □

Volver al texto principal

A.2. Extremos absolutos para funciones continuas en intervalos cerrados

Teorema. Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f alcanza su valor máximo y su valor mínimo absolutos en $[a;b]$; es decir, existen x_M y x_m en $[a;b]$ tales que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ para todo $x \in [a;b]$.

Demostración. Como ya vimos, por ser f continua en $[a;b]$, f es acotada en $[a;b]$. Esto significa que $\mathrm{Im}(f)$ es un subconjunto (no vacío) y acotado de $\mathbb{R}$; por lo tanto, tiene supremo e ínfimo. Sean $M = \sup(\mathrm{Im}(f))$, $m = \inf(\mathrm{Im}(f))$. Queremos ver que M y m son, en realidad, máximo y mínimo de $\mathrm{Im}(f)$, es decir, que existen $x_M, x_m \in [a;b]$ tales que $f(x_M) = M$ y

$f(x_m) = m$. Vamos a suponer que no existen tales valores de x y llegaremos a una contradicción (lo haremos para el máximo; el caso del mínimo es similar).
Supongamos que no existe $x \in [a;b]$ tal que $f(x) = M$. Sea

$$g : [a;b] \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Como f es continua en $[a;b]$ y $f(x) \neq M$ para todo $x \in [a;b]$, entonces g es continua en $[a;b]$ y, en consecuencia, g está acotada en $[a;b]$. Sea $K \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \leq K$ para todo $x \in [a;b]$. Entonces, para todo $x \in [a;b]$, teniendo en cuenta que $M - f(x) > 0$ y $K > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq K \iff \frac{1}{K} \leq M - f(x) \iff f(x) \leq M - \frac{1}{K}.$$

Concluimos que $M - \dfrac{1}{K}$ es una cota superior para $\mathrm{Im}(f)$, estrictamente menor que M, contradiciendo que M era el supremo de $\mathrm{Im}(f)$. La contradicción proviene de suponer que no existe $x \in [a;b]$ tal que $f(x) = M$. Luego, debe existir un valor $x_M \in [a;b]$ tal que $f(x_M) = M$. $\square$

Volver al texto principal

B. Teorema de Cauchy

Daremos aquí una demostración del teorema de Cauchy, que fue enunciado a continuación del teorema del valor medio y puede verse como una generalización de este resultado.

Teorema de Cauchy. Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a;b]$ y derivables en el intervalo abierto $(a;b)$. Entonces existe un valor $c \in (a;b)$ tal que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Si, además, $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a;b)$, entonces

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demostración. Consideremos la función $h : [a;b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)).$$

Esta función es continua en $[a;b]$ y derivable en $(a;b)$, como consecuencia de que f y g lo son. Además, $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$ y $h(b) = -f(b)g(a) + g(b)f(a)$; luego, $h(a) = h(b)$. En consecuencia, h satisface las hipótesis del teorema de Rolle y, por lo tanto, existe $c \in (a;b)$ tal que $h'(c) = 0$. Ahora,

$$h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)),$$

con lo cual, la condición $h'(c) = 0$ equivale a que

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)),$$

como queríamos demostrar.
Bajo la hipótesis adicional de que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a;b)$, se tiene que $g'(c) \neq 0$. Por otra parte, $g(b) - g(a) \neq 0$. En efecto, en caso contrario tendríamos que $g(b) = g(a)$ y, en consecuencia, por el teorema de Rolle aplicado a g, existiría algún valor de $x \in (a;b)$ tal que $g'(x) = 0$, contradiciendo la hipótesis. Se puede dividir entonces por $g'(c)$ y $g(b) - g(a)$, obteniéndose que vale

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

que es la segunda igualdad del enunciado del teorema. □

Volver al texto principal

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Teorema del valor medio, Teóricas de Análisis Matemático (28).*